

Đại học Quốc gia TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
Khoa: Khoa Học Ứng Dụng
Bộ môn: Toán Ứng Dụng



TOÁN 2

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 2 :

MA TRẬN

NỘI DUNG :

I/ LÝ THUYẾT :

1. Một số định nghĩa.

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

2. Các phép toán trên ma trận.

II/ BÀI TẬP :

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN :

I/ LÝ THUYẾT

cuu duong than cong . com

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

1. Một số định nghĩa :

a/ Một ma trận A cỡ $m \times n$ trên trường K (K là thực hay phức) là một bảng chữ nhật gồm m hàng, n cột có dạng sau:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Người ta thường ký hiệu $A_{m \times n} = (a_{ij})$

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Ở đây :

Các số a_{ij} $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$

là các phần tử nằm ở hàng thứ i , cột thứ j của ma trận A .

b/ Tập hợp các ma trận A cỡ $m \times n$ trên trường K được ký hiệu là $M_{m \times n}(K)$

c/ Ma trận không là ma trận mà mọi phần tử của nó đều bằng 0.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

d/ $A_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận cột.

e/ $A_{1 \times n} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận hàng.

f/ Nếu $m = n$ thì A được gọi là ma trận vuông.

Ký hiệu: $M_n(K)$ là tập hợp các ma trận vuông cỡ $n \times n$, gọi chung là tập hợp các ma trận vuông cấp n .

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

g/ Ma trận $A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

được gọi là ma trận chéo.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

h/ Ma trận $I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{l} a_{ij} = 1 \quad \forall i = j, \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \\ i, j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right)$$

được gọi là ma trận đơn vị cấp n .

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

i/ Ma trận $A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

được gọi là ma trận tam giác trên.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

$$\text{Ma trận } A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận tam giác dưới.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

j/ Ma trận $A^T = (a_{ji})$ được gọi là ma trận đối của A .

k/ Ma trận $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ được gọi là ma trận liên hợp của A .

Nếu $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ thì $A = \overline{A}$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

2. Các phép toán trên ma trận :

a/ Ma trận bằng nhau :

Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$

là $A_{m \times n} = a_{ij}$ và $B_{m \times n} = b_{ij}$

Ta nói :

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

b/ Ma trận chuyển vị :

Cho ma trận $A_{m \times n} = a_{ij}$

Ta gọi ma trận A^T là ma trận chuyển vị của ma trận A nếu như $A^T = a_{ji}$

Như vậy ma trận A^T có cấp $n \times m$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

$$\text{Nếu } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{thì } A^T_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ta dễ dàng nhận thấy $A^{T^T} = A$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Cho ma trận $A \in M_n K$. Khi đó :

- * Nếu $A^T = A$, tức là $a_{ij} = a_{ji}$, $j = 1, 2, \dots, n$ thì A được gọi là ma trận đối xứng.
- * Nếu $A^T = -A$, tức là $a_{ij} = -a_{ji}$, $j = 1, 2, \dots, n$ thì A được gọi là ma trận phản đối xứng.

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

c/ Nhân ma trận với một số :

Cho ma trận $A_{m \times n} = (a_{ij})$

cuu duong than cong . com

Ta có : $\alpha \cdot A_{m \times n} = B_{m \times n}$

với $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$
 $j = 1, 2, \dots, n$

cuu duong than cong . com

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Dễ dàng nhận thấy :

* $1 \cdot A = A$

* $-1 \cdot A = -A$

* $0 \cdot A = 0$, $\forall$ ma trận A

* $\alpha \cdot 0 = 0$, $\forall \alpha \in K$

* $\alpha \beta \cdot A = \alpha \beta A$, $\forall \alpha, \beta \in K$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

d/ Cộng hai ma trận :

Cho 2 ma trận cùng cỡ $m \times n$ là

$$A_{m \times n} = a_{ij} \text{ và } B_{m \times n} = b_{ij}$$

$$\text{Ta có : } A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}$$

$$\text{với } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Dễ thấy rằng với các ma trận cùng cỡ thì

$$* \quad A + B = B + A$$

$$* \quad A + B + C = A + B + C$$

$$* \quad \alpha(A + B) = \alpha.A + \alpha.B, \quad \forall \alpha \in K$$

$$* \quad (\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A, \quad \forall \alpha, \beta \in K$$

$$* \quad A + 0 = 0 + A = A$$

$$* \quad (\alpha.A + \beta.B)^T = \alpha.A^T + \beta.B^T$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Ví dụ 1 :

$$\text{Cho } A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com

$$B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com

Tính $3A + 2B$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Ta có :

$$3A + 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 12 & 18 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com

$$= \begin{pmatrix} 8 & 11 & 15 \\ 12 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

d/ Nhân hai ma trận :

Cho 2 ma trận $A_{m \times n} = a_{ij}$, $B_{n \times p} = b_{ij}$

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Ở đây : $C_{m \times p} = C_{ij}$

$$\text{với } C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} , \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* **VD 2**: Cho $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Tính $A.B$ và $B.A$

Ta có: $A.B = C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$

$$B.A = D_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* **VD 3:** Cho $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Tính $A.B$ và $B.A$

Ta có: $A.B = C_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 15 \\ 7 & 22 & 33 \end{pmatrix}$

$B.A$ không tồn tại

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* Nhận xét :

- * Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

cuuduongthancong.com

- * Nếu $A.B = B.A$ ta nói tích hai ma trận có tính giao hoán.

- * Nếu A và I là hai ma trận vuông cấp n thì $A.I = I.A = A$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* Phép nhân ma trận có tính chất sau :

* $A.B .C = A. B.C = A.B.C$

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

* $A. B + C = A.B + A.C$

* $B + C .A = B.A + C.A$

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

* $A.B^T = B^T .A^T$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

- * Từ phép nhân ma trận ta có thể định nghĩa lũy thừa của một ma trận vuông như sau:

Cho $A \in M_n(K)$. Ta định nghĩa :

- * $A_{n \times n}^0 = I_{n \times n}$

- * $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ lần}}$

- * $A^p \cdot A^q = A^{p+q}, \quad p, q \in \mathbb{N}$

- * $A^{p^q} = A^{p \cdot q}$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* **VD 4**: Cho ma trận $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Tính A^n với $n = 2, 3, \dots$

Ta có:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng quy nạp được $A^n = \begin{pmatrix} a^n & n \cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* VD 5 :

$$\text{Cho } A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Tính $f(A)$

$$\text{với } f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Ta có: $f(A) = A^3 - 3A^2 + 4A + 2I$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^3 - 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 + 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 18 & -13 \end{pmatrix}$$

II/ BÀI TẬP

II/ BÀI TẬP MA TRẬN

BÀI 1: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$

Tính AB và BA .

BÀI 2: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^n

BÀI 3: Cho $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Tính A^2 , A^3 , A^{2n} , A^{2n+1}

III/ BÀI TẬP MA TRẬN

BÀI 4 : Cho A và B là hai ma trận đối xứng.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a/ $A.B$ và $B.A$ có phải là ma trận đối xứng.

b/ Có nhận xét gì về $A.B$ và $B.A$

III/ BÀI TẬP MA TRẬN

BÀI 5 : Giải các phương trình ma trận.

$$\text{a/ } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b/ } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

cuu duong than cong . com

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

BÀI 1: $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}$

[cuuduongthancong . com](http://cuuduongthancong.com)

BÀI 2: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

[cuuduongthancong . com](http://cuuduongthancong.com)

BÀI 3: $A^n = A, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

BÀI 4 :

a/ $A.B$ và $B.A$ không phải là ma trận đối xứng.

b/ $AB = BA^T$

BÀI 5 :

a/ $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

b/ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$