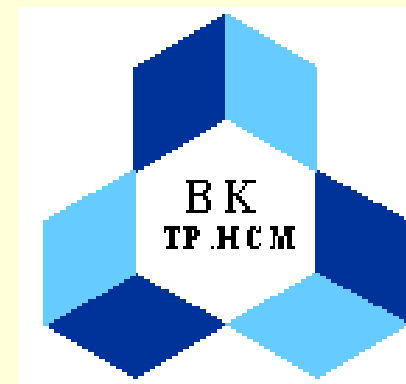


Đại học Quốc gia TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
Khoa: Khoa Học Ứng Dụng
Bộ môn: Toán Ứng Dụng



TOÁN 2



CHƯƠNG 3 : ĐỊNH THỨC CỦA MỘT MA TRẬN VUÔNG

NỘI DUNG :

I/ LÝ THUYẾT :

1. Định nghĩa.
2. Định thức của một số ma trận đặc biệt.
3. Tính chất của định thức.
4. Tính định thức bằng khai triển Laplace.

II/ BÀI TẬP :

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN :



LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

1. Định nghĩa :

Cho ma trận $A \in M_n(K)$

Định thức của ma trận A là 1 số và được ký hiệu là $\det A$ hay $|A|$

a/ Định thức cấp 1 :

$$A = a_{11}$$

Ta định nghĩa : $\det A = a_{11}$

1. ĐỊNH NGHĨA

b/ Định thức cấp 2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ta định nghĩa : $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

c/ Định thức cấp 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ta khai triển định thức theo hàng 1

1. ĐỊNH NGHĨA

Khi đó :

$$\det A = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Chú ý : Để tính định thức của một ma trận vuông ta có thể khai triển định thức theo $h_1, h_2, \dots$ hoặc $c_1, c_2, \dots$

1. ĐỊNH NGHĨA

d/ Định thức cấp n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta khai triển định thức theo hàng 1

$$\det A = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det C_{11} + \dots + a_{1n} \cdot (-1)^{1+n} \cdot \det C_{1n}$$

1. ĐỊNH NGHĨA

Ở đây :

C_{ij} là ma trận vuông cấp $(n - 1)$ có được từ ma trận A bằng cách bỏ hàng thứ i và cột thứ j

cuu duong than cong . com

Đặt :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det C_{ij}$$

cuu duong than cong . com

A_{ij} được gọi là phần bù đại số của phần tử a_{ij}

1. ĐỊNH NGHĨA

* VD 1:

Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Khai triển định thức theo cột 3 ta được

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 6 = -12$$

2. ĐỊNH THỨC CỦA MỘT SỐ MA TRẬN ĐẶC BIỆT :

2. Định thức của một số ma trận đặc biệt :

a/ Định thức của ma trận đường chéo :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lần lượt khai triển định thức theo hàng 1 ta sẽ được kết quả : $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$

Hệ quả : $\det I_n = 1$

2. ĐỊNH THỨC CỦA MỘT SỐ MA TRẬN ĐẶC BIỆT :

b/ Định thức của ma trận tam giác trên :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lần lượt khai triển định thức theo cột 1 ta sẽ được kết quả :

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$$

2. ĐỊNH THỨC CỦA MỘT SỐ MA TRẬN ĐẶC BIỆT :

c/ Định thức của ma trận tam giác dưới:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lần lượt khai triển định thức theo hàng 1 ta sẽ được kết quả :

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$$

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

3. Tính chất của định thức :

a/ $\det A = \det A^T$

b/ Nếu ta đổi chỗ 2 hàng (hay 2 cột) của định thức thì định thức đổi dấu.

c/ Nếu ma trận A có 2 hàng (hay 2 cột) giống nhau thì $\det A = 0$

d/ Nếu ma trận A có 2 hàng (hay 2 cột) tỷ lệ thì $\det A = 0$

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

- f/ Nếu ma trận A có 1 hàng (hay 1 cột) bằng không thì $\det A = 0$
- g/ Thừa số chung của 1 hàng hay 1 cột có thể đem ra khỏi định thức.
- h/ Định thức không đổi nếu ta thêm vào 1 hàng (hay 1 cột) một tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hoặc cột khác).
- i/ Cho A và B là 2 ma trận vuông cùng cấp.

Khi đó : $\det A.B = \det A . \det B$

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

$$j/ \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

$$\begin{aligned}
 k/ \quad |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

* Ví dụ 2 : Tính định thức

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Ta sẽ đưa ma trận A về dạng ma trận tam giác trên

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

$$\left| A \right| \begin{array}{l} h_2 \rightarrow h_2 + 2h_1 \\ \hline h_3 \rightarrow h_3 - 3h_1 \\ h_4 \rightarrow h_4 - h_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

$$\begin{array}{l}
 h_3 \rightarrow h_3 + h_2 \\
 \hline
 h_4 \rightarrow h_4 - h_2
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 0 & 1 & 9 & 10 \\
 0 & 0 & 7 & 0 \\
 0 & 0 & -7 & -10
 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 h_4 \rightarrow h_4 + h_3 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 0 & 1 & 9 & 10 \\
 0 & 0 & 7 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -10
 \end{vmatrix} = -70$$

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

* Ví dụ 3 : Tính định thức

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & b + c \\ 1 & b & a + c \\ 1 & c & a + b \end{vmatrix}$$

$$|A| \xrightarrow{c_2 \rightarrow c_2 + c_3} \begin{vmatrix} 1 & a + b + c & b + c \\ 1 & a + b + c & a + c \\ 1 & a + b + c & a + b \end{vmatrix} = 0$$

Do cột 1 và cột 2 tỷ lệ với nhau.

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

* Ví dụ 4 :

Không tính định thức, chứng minh rằng:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

là một số chia hết cho 15

3. TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC :

$$|A| \xrightarrow{h_1 \rightarrow h_1 + h_2 + h_3} \begin{vmatrix} 9 & 15 & 9 \\ 2 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Đặt thừa số chung ở hàng 1 là 3 và thừa số chung ở hàng 3 là 5. Ta được :

$$|A| = 3 \times 5 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Điều phải chứng minh}$$

4. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG KHAI TRIỂN LAPLACE :

IV. Tính định thức bằng khai triển Laplace :

a/ Định lý Laplace :

Định thức của ma trận A bằng tổng của các tích mọi định thức con rút ra từ k hàng (hoặc k cột) với phần bù đại số tương ứng của nó.

b/ Nhận xét :

Từ định lý trên ta nhận thấy khi tính $\det A$, ta nên khai triển định thức theo k hàng (hay k cột) nào đó có càng nhiều số không càng tốt.

4. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG KHAI TRIỂN LAPLACE :

* Ví dụ 5 : Tính định thức

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 24 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 24 & 38 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}$$

4. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG KHAI TRIỂN LAPLACE :

Khai triển định thức theo 3 hàng đầu ta được

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \cdot (-1)^s \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 25 & 81 \end{vmatrix} = 128$$

Ở đây : $s = 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3$

4. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG KHAİ TRIỂN LAPLACE :

* Ví dụ 6 : Tính định thức

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

4. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG KHAI TRIỂN LAPLACE :

Khai triển định thức theo 3 hàng đầu ta được

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot s \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -65$$

Ở đây : $s = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

4. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG KHAI TRIỂN LAPLACE :

* Ví dụ 7 : Tính định thức

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

4. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG KHAİ TRIỂN LAPLACE :

Khai triển định thức theo 2 hàng đầu ta được

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

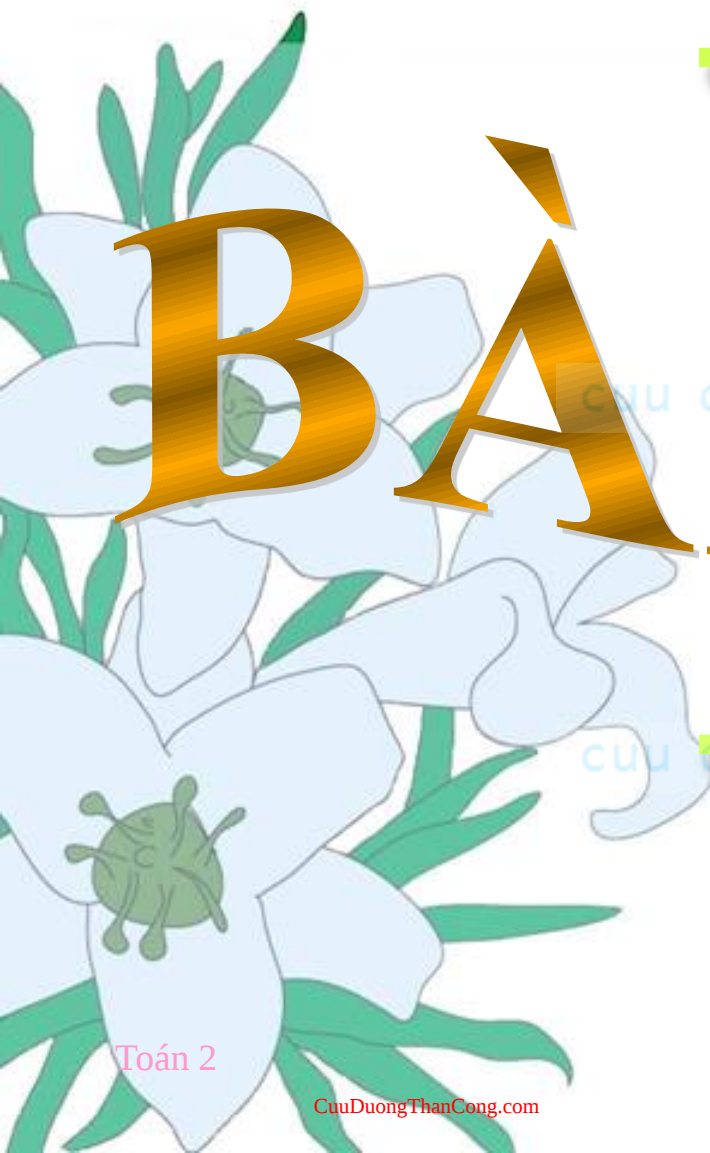
Ở đây : $s = 1 + 2 + 1 + 2$

4. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG KHAİ TRIỂN LAPLACE :

Tiếp tục khai triển định thức sau theo 2 hàng đầu ta được

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

Ở đây : $k = 1 + 2 + 1 + 2$



BÀI TẬP

II/ BÀI TẬP ĐỊNH THỨC :

BÀI 1 :

Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tính $\det 3.A.B$

III/ BÀI TẬP ĐỊNH THỨC :

BÀI 2 :

Tính định thức :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

II/ BÀI TẬP ĐỊNH THỨC :

BÀI 3 :

Cho

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 2m - 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Tìm điều kiện của m để $|A| > 0$

III/ BÀI TẬP ĐỊNH THỨC :

BÀI 4 :

Tính định thức :

$$|A| = \begin{vmatrix} x & x' & ax + bx' \\ y & y' & ay + by' \\ z & z' & az + bz' \end{vmatrix}$$

III/ BÀI TẬP ĐỊNH THỨC :

BÀI 5 :

Tính định thức :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

III/ BÀI TẬP ĐỊNH THỨC :

BÀI 6 :

Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính $\det A$

III/ BÀI TẬP ĐỊNH THỨC :

BÀI 7 :

Giải phương trình :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$



ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

Toán 2

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

BÀI 1: $\det 3.A.B = 324$

cuu duong than cong . com

HD: $\det 3.A.B = 3^3 . \det A . \det B$

Nhớ công thức $\det \alpha . A_n = \alpha^n . \det A_n$

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

BÀI 2 : $\det A = 30$

HD : Đưa ma trận A về dạng bậc thang.

Hoặc tính định thức bằng cách khai triển Laplace theo hàng 2 và hàng 4.

BÀI 3 : ĐK: $m < 2$ thì $|A| > 0$

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

BÀI 4 : $\det A = 0$

HD : Tính định thức bằng cách tách cột 3.

Ta sẽ được tổng của 2 định thức cấp 3.

BÀI 5 : $\det A = 6$

BÀI 6 : $\det A = -36$

HD : $\det A = \det B \cdot \det C = 6 \cdot -6 = -36$

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

BÀI 7 : Nghiệm của phương trình này là

$$x = 2 \quad \text{và} \quad x = -1$$

HD: Phương trình này là phương trình bậc 2 theo biến x

Dễ dàng nhận thấy nghiệm của phương trình này là

$$x = 2 \quad \text{và} \quad x = -1$$

Do với $x = 2$ hàng 1 và hàng 2 giống nhau nên định thức bằng 0.

với $x = -1$ hàng 1 và hàng 3 giống nhau nên định thức bằng 0.



Kết thúc Chương 3 - Toán 2

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com