

CHƯƠNG 4:

HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN & MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

1. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN MỘT MA TRẬN

Ta gọi phép biến đổi sơ cấp trên ma trận $A \in M_{m \times n}(K)$ là phép biến đổi có một trong các dạng sau:

a/ $h_i \leftrightarrow h_j$ ($C_i \leftrightarrow C_j$)

(Đổi chỗ 2 hàng hay 2 cột với nhau)

b/ $h_i \rightarrow \alpha \cdot h_i$ ($C_i \rightarrow \alpha \cdot C_i$), $\alpha \neq 0$

(Nhân một hàng hay một cột với 01 số khác không)

c/ $h_i \rightarrow h_i + \beta h_j$ ($C_i \rightarrow C_i + \beta C_j$)

(Thêm vào một hàng hay một cột bội số của hàng khác hoặc cột khác)

1. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN MỘT MA TRẬN (tt)

Ký hiệu: $A \rightarrow B$ để chỉ ma trận B nhận được từ ma trận A sau một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên A

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \rightarrow 2 \cdot h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2. ĐỊNH NGHĨA MA TRẬN BẬC THANG

Cho ma trận $A \in M_{m \times n}(K)$

Ma trận A được gọi là có dạng bậc thang nếu như:

a/ Các hàng khác không (có ít nhất một phần tử nằm trên hàng nào đó khác không) **nằm trên các hàng bằng không.**

b/ Với hai hàng khác không, phần tử khác không đầu tiên ở hàng dưới luôn nằm bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên.

2. ĐỊNH NGHĨA MA TRẬN BẬC THANG (tt)

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Là những ma trận bậc thang

Chú ý: Mọi ma trận đều có thể đưa về dạng bậc thang nhờ các phép biến đổi sơ cấp. Ta minh họa bởi ví dụ sau:

2. ĐỊNH NGHĨA MA TRẬN BẬC THANG (tt)

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 2 & -2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4 \rightarrow h_4 - 3h_1]{h_2 \rightarrow h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_4 \rightarrow h_4 + h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{h_4 \rightarrow h_4 - h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. ĐỊNH NGHĨA HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN

a/ Định nghĩa:

Cho ma trận $A \in M_{m \times n}(K)$. Ta nói ma trận A có hạng bằng p (ký hiệu là $r(A) = p$) nếu như A chứa một ma trận con cấp p có định thức khác không, còn mọi định thức con cấp $p+1$ đều bằng không.

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

Nói một cách khác, hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không của nó.

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

* Ta quy ước ma trận 0 có hạng bằng 0

3. ĐỊNH NGHĨA HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN (tt)

b/ Hàng của ma trận có các tính chất sau:

. $r(A) = r(AT)$

. $r(A_{m \times n}) \leq \min \{m, n\}$

. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

. $r(A.B) \leq \min \{r(A), r(B)\}$

. Cho ma trận $A \in M_{m \times n}(K)$

$X \in M_n(K), \det X \neq 0$

$Y \in M_m(K), \det Y \neq 0$

Khi đó: $r(A) = r(A.X) = r(Y.A)$

3. ĐỊNH NGHĨA HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN (tt)

b/ Hàng của ma trận có các tính chất sau (tt):

. Nếu $A \rightarrow B$ (Ma trận B nhận được từ A qua một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp)

Khi đó: $r(A) = r(B)$

cuu duong than cong . com

. Nếu $A \in M_n(K)$ thì:

$$+ r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

$$+ r(A) < n \Leftrightarrow \det A = 0$$

cuu duong than cong . com

3. ĐỊNH NGHĨA HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN (tt)

c/ Định lý:

Cho $A \in M_{m \times n}(K)$ là một ma trận bậc thang có p hàng khác không.

Khi đó: $r(A) = p$

cuu duong than cong . com

Nhận xét:

Từ định lý này ta thấy, để tìm hạng của một ma trận, thì ta biến đổi sơ cấp trên ma trận đã cho để đưa nó về dạng bậc thang. Khi đó ta dễ dàng suy ra hạng của ma trận.

3. ĐỊNH NGHĨA HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN (tt)

Ví dụ 1: Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{h_3 \rightarrow h_3 - 3h_1 \\ h_5 \rightarrow h_5 - 2h_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 \rightarrow \frac{1}{2}h_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{h_3 \rightarrow h_3 + 11h_2 \\ h_4 \rightarrow h_4 - 5h_2 \\ h_5 \rightarrow h_5 + 5h_2}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 2$

3. ĐỊNH NGHĨA HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN (tt)

Ví dụ 2: Tìm hạng của ma trận sau theo tham số a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & a \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\substack{h_2 \rightarrow h_2 - 2h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - 3h_1 \\ h_4 \rightarrow h_4 - 4h_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & a - 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{h_3 \rightarrow h_3 - 2h_2 \\ h_4 \rightarrow h_4 - 3h_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a - 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a - 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Biện luận:

. a = 7 thì r(A) = 2

. a ≠ 7 thì r(A) = 3

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

a/ Định nghĩa ma trận phụ hợp

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, khi đó ta gọi ma trận

$$P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

là ma trận phụ hợp của ma trận A

Ở đây: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(C_{ij})$ là phần bù đại số của phần tử a_{ij} .

C_{ij} là ma trận có cấp $(n-1)$ nhận được từ ma trận A bằng cách bỏ hàng thứ i và cột thứ j .

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

* Ma trận phụ hợp P_A có tính chất sau:

$$A \cdot P_A = P_A \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Hãy tìm ma trận phụ hợp P_A

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad \dots$$

Cuối cùng ta tính được ma trận

$$P_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \Rightarrow P_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

b/ Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Cho ma trận $A \in M_n(K)$

- * A được gọi là ma trận không suy biến nếu $\det(A) \neq 0$
- * A được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại $B \in M_n(K)$ sao cho: $A.B = B.A = I_n$

Lúc này, B được gọi là ma trận nghịch đảo của A và được ký hiệu là $B = A^{-1}$

Do vậy ta có: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

c/ Định lý

Cho ma trận $A \in M_n(K)$

A không suy biến $\Leftrightarrow A$ khả nghịch và lúc này

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot P_A$$

d/ Ma trận nghịch đảo có các tính chất sau:

Cho $A, B \in M_n(K)$. Khi đó:

. Nếu A không suy biến thì A^{-1} , A^T cũng không suy biến và $(A^{-1})^{-1} = A$ và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

. Nếu A và B không suy biến thì $A.B$ cũng không suy biến và $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

Ví dụ 1: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}

Nhận xét: $\det A = -2 \neq 0$. Vậy A khả nghịch.

$$\text{Ta có: } A_{11} = (-1)^{1+1}.4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}.3 \\ A_{21} = (-1)^{2+1}.2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}.1$$

$$\Rightarrow P_A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot P_A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

Ví dụ 2: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}

Nhận xét: $\det A = 1 \neq 0$ nên tồn tại A^{-1}

Ta có: $A_{11} = -4$ $A_{12} = -3$ $A_{13} = -7$

$A_{21} = 3$ $A_{22} = 6$ $A_{23} = 5$

$A_{31} = -2$ $A_{32} = -5$ $A_{33} = -4$

$$\Rightarrow P_A = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

$$\text{Vậy } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot P_A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

e/ Tìm ma trận nghịch đảo bằng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

Ta còn có một thuật toán khác để tìm A^{-1} chỉ qua các phép biến đổi sơ cấp trên hàng như sau:

$$(A \mid I) \xrightarrow[\text{trên hàng}]{\text{PB ĐBĐ}} (I \mid A^{-1})$$

Chú ý: Phương pháp này tiện cho việc tính A^{-1} mà ma trận A có cấp cao.

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

Ví dụ 3: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}

Ta viết $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{\substack{h_2 \rightarrow h_2 - 3h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - 2h_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

Ví dụ 3 (tt):

$$\xrightarrow{h_2 \rightarrow h_2 - h_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} h_1 \rightarrow h_1 - 2h_2 \\ h_3 \rightarrow h_3 + 5h_2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right)$$

4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO (tt)

Ví dụ 3 (tt):

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{h_1 \rightarrow h_1 + h_3} \\ \xrightarrow{h_2 \rightarrow h_2 + h_3} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{array} \right)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4: HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN & MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Bài 1: Tìm hạng của ma trận

$$a / A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad b / A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -1 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c / A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & -4 & 5 & 2 & 10 \\ 5 & -6 & 7 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 2: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & m+5 & m^2+1 \\ 1 & -1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$

Tìm điều kiện của m để $r(A) = 3$

Bài 3: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Hãy biện luận $r(A)$ theo tham số a

BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 4: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & m \end{pmatrix}$

Tìm điều kiện của m để A khả nghịch

Bài 5: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

Tìm điều kiện của m để A khả nghịch

BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 6: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Tìm A^{-1}

Bài 7: Giải phương trình ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Bài 8: Cho $A \in M_n(K)$, $\det A = 4$. Hãy tính $\det A^{-1}$, $\det(A.A^T)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 9: Tìm A^{-1} bằng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng

$$a / A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$b / A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài 1: Tìm hạng của ma trận

a/ $r(A) = 2$

b/ $r(A) = 3$

c/ $r(A) = 3$

Bài 2: Để $r(A) = 3$ thì điều kiện là $m \neq 2$ và $m \neq -1$

Bài 3: $r(A) = 5, \forall a$

Hướng dẫn: Do $\det A \neq 0$ không phụ thuộc vào a

Bài 4: Để ma trận A khả nghịch điều kiện là $m \neq \frac{13}{7}$

Hướng dẫn: A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{13}{7}$

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 5: Không tồn tại m để ma trận A khả nghịch

Hướng dẫn: Đặt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

Ta có: $A = B.C$

$$\Rightarrow \det A = \det B \cdot \det C$$

Mà $\det B = 0$ (Do ma trận B có 2 hàng tỷ lệ)

Vậy $\det A = 0, \forall m$

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 6:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Hướng dẫn: $\det A = 1 \neq 0$, vậy tồn tại A^{-1}

Ta có:

$$P_A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Mà

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot P_A \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 7:

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Hướng dẫn: Ta có $A.X = B$

$$\Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}.B$$

Mà

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ (Đã làm ở bài 6)}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 8: $\det A^{-1} = \frac{1}{4}$, $\det(A.A^T) = 16$

Hướng dẫn: Ta có: $A.A^{-1} = I_n$

$$\Rightarrow \det(A.A^{-1}) = \det I_n = 1$$

$$\Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Ta có: } \det(A.A^T) = \det A \cdot \det A^T$$

$$\text{Mà } \det A^T = \det A$$

$$\text{Do đó } \det(A.A^T) = 16$$

ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 4 (tt)

Bài 9: Tìm A^{-1} bằng phép biến đổi sơ cấp theo hàng

Hướng dẫn:

$$a / \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b / \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$