

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

CHƯƠNG 5:

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

cuu duong than cong . com

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM

a/ Định nghĩa:

* Hệ thống m phương trình tuyến tính, n ẩn là hệ thống có dạng:

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Trong đó: a_{ij} , b_i ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$) là những số cho trước thuộc trường K còn $x_1, \dots, x_n$ là các ẩn của hệ.

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM (tt)

* Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận của hệ (1)

* Ma trận

$$A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận mở rộng của hệ (1)

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM (tt)

b/ Chú thích:

* Nếu đặt

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

thì hệ (1) được viết dưới dạng ma trận như sau: $A.X = B$

* Nếu $B = 0$ thì hệ (1) được gọi là hệ phương trình thuần nhất.

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM (tt)

b/ Chú thích (tt):

* Hệ (1) được gọi là **hệ tương thích** nếu hệ này có ít nhất một nghiệm; ngược lại **hệ không tương thích** nếu hệ này không có nghiệm.

* Hệ thuần nhất $AX = 0$ luôn luôn tương thích vì nó có ít nhất một nghiệm là $X = 0$ và nghiệm này được gọi là **ng nghiệm tầm thường**.

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER

a/ Định nghĩa:

Hệ phương trình Cramer là hệ phương trình tuyến tính có **số phương trình bằng số ẩn** và ma trận của hệ **không suy biến**.

Tức là hệ có dạng:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Trong đó $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ và $\det A \neq 0$

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER (tt)

b/ Định lý Cramer:

Hệ Cramer (2) có nghiệm duy nhất cho bởi công thức:

$$x_i = \frac{|A^{(i)}|}{|A|}, i = 1, 2, \dots, n$$

Trong đó: $A^{(i)}$ là ma trận nhận được từ A bằng cách thay cột thứ i bởi cột

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER (tt)

Chú thích:

- * Nếu $B = 0$ thì hệ Cramer (2) có nghiệm duy nhất là $X = 0$.
- * Vậy hệ thuần nhất $AX = 0$ (Ở đây $m = n$) có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow \det A = 0$.

Ví dụ: giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER (tt)

Ví dụ (tt) :

Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

Nhận xét: $\det A \neq 0$. Vậy đây là hệ phương trình Cramer nên có nghiệm duy nhất cho bởi công thức:

$$x_i = \frac{|A^{(i)}|}{|A|}, \quad i = 1, 2, 3$$

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER (tt)

Ví dụ (tt) :

$$\left| A^{(1)} \right| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$\left| A^{(2)} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 18 \quad \left| A^{(3)} \right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -36$$

Vậy nghiệm của hệ là
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

3. ĐIỀU KIỆN TƯƠNG THÍCH CỦA HỆ

a/ Định lý Kronecker – Capeli

(Đối với hệ phương trình tuyến tính tổng quát m phương trình n ẩn)

Hệ phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow r(A) = r(A_B)$

b/ Chú ý:

cuuduongthancong.com

- * Hệ p.trình (1) có **ng nghiệm duy nhất** $\Leftrightarrow r(A) = r(A_B) = n$.
- * Hệ p.trình (1) có **vô số nghiệm** $\Leftrightarrow r(A) = r(A_B) < n$.
(lúc này số ẩn tự do của hệ là $n - r(A)$)
- * Hệ phương trình (1) **vô nghiệm** $\Leftrightarrow r(A) < r(A_B)$.

3. ĐIỀU KIỆN TƯƠNG THÍCH CỦA HỆ (tt)

Ví dụ: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m + 2)(m - 1)^2$$

3. ĐIỀU KIỆN TƯƠNG THÍCH CỦA HỆ (tt)

Ví dụ (tt):

$$\text{a/ Trường hợp: } \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \det A \neq 0$$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{1}{m+2} \\ y = \frac{1}{m+2} \\ z = \frac{1}{m+2} \end{cases}$$

3. ĐIỀU KIỆN TƯƠNG THÍCH CỦA HỆ (tt)

Ví dụ (tt):

b/ Trường hợp $m = 1$:

Hệ đã cho tương đương với hệ gồm 1 phương trình

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{1}$$

Lúc này $r(A) = r(A_B) = 1$

Vậy hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn tự do

$$\begin{cases} x = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}, \quad t_1, t_2 \in R$$

3. ĐIỀU KIỆN TƯƠNG THÍCH CỦA HỆ (tt)

Ví dụ (tt):

c/ Trường hợp $m = -2$:

Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Ta tính được: $r(A) = 2 < r(A_B) = 3$

Do đó trường hợp: $m = -2$ hệ vô nghiệm

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$(3) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Hệ này viết lại ở dạng ma trận là: **$A \cdot X = 0$**

Với $A \in M_{m \times n}(K)$, $X \in M_{n \times 1}(K)$

- * Hệ thuần nhất luôn có nghiệm tầm thường là:
 $x = (0, 0, \dots, 0)^T$.

- * Vấn đề ta quan tâm ở đây là khi nào hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường ($X \neq 0$)

a/ Định lý:

Hệ thuần nhất (3) có nghiệm không tầm thường
 $\Leftrightarrow r(A) < n$ (Số ẩn của hệ)

b/ Hệ nghiệm cơ bản:

Nếu $r(A) = r < n$ thì hệ phương trình (3) có vô số nghiệm trong đó có $n - r$ ẩn tự do.

Do đó nghiệm tổng quát của hệ là:

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

b/ Hệ nghiệm cơ bản (tt):

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \zeta_1(t_1, t_2, \dots, t_{n-r}) \\ x_2 = \zeta_2(t_1, t_2, \dots, t_{n-r}) \\ \dots \\ x_r = \zeta_r(t_1, t_2, \dots, t_{n-r}) \\ x_{r+1} = t_1 \\ \dots \\ x_n = t_{n-r} \end{array} \right. ; \text{ ở đây: } t_1, t_2, \dots, t_{n-r} \text{ tùy ý}$$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

b/ Hệ nghiệm cơ bản (tt):

Trong (*) lần lượt cho:

$$t_1 = 1, t_2 = 0, \dots, t_{n-r} = 0$$

$$t_1 = 0, t_2 = 1, \dots, t_{n-r} = 0$$

...

$$t_1 = 0, t_2 = 0, \dots, t_{n-r} = 1$$

Thì ta sẽ được $(n - r)$ nghiệm là: $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$

Trong đó nghiệm x_k có dạng:

$$x_k = \begin{pmatrix} \xi_{1k} \\ \xi_{2k} \\ \vdots \\ \xi_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ở đây: Số 1 nằm ở hàng thứ $r + k$

$\xi_{1k} = \xi(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ với vị trí thứ k bằng 1.

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

b/ Hệ nghiệm cơ bản (tt):

Các nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_{n-r}$ được gọi là **hệ nghiệm cơ bản** của hệ thuần nhất.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất sau đây

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

Xét:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{h_2 \rightarrow h_2 - h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - 2h_2}]{\substack{h_2 \rightarrow h_2 - h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - 2h_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \rightarrow h_3 - h_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4 \\ x_2 = 5x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

Ở đây $r(A) = 2 < n = 4$ nên hệ có vô số nghiệm với 2 ẩn số tự do và nghiệm tổng quát có dạng:

$$\begin{cases} x_1 = -14t_1 + 11t_2 \\ x_2 = 5t_1 - 4t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

Ví dụ 1 (tt):

Lần lượt cho $t_1 = 1, t_2 = 0$ và $t_1 = 0, t_2 = 1$, ta có 2 nghiệm cơ bản của hệ là:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

Ví dụ 2:

Với điều kiện nào của α thì hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường? Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ trong trường hợp ấy?

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -2(\alpha + 1)$$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

Nhận xét: Hệ này có nghiệm không tầm thường

$$\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Với $\alpha = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{h_2 \rightarrow h_2 - 2h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - 4h_1}]{\substack{h_2 \rightarrow h_2 - 2h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - 4h_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3 \rightarrow h_3 - h_2}]{\substack{h_3 \rightarrow h_3 - h_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT (tt)

Ví dụ 2 (tt):

Vậy với $\alpha = -1$ hệ tương đương với hệ:
$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 \\ 3x_2 = x_3 \end{cases}$$

Ở đây $r(A) = 2 < n = 3$ nên hệ có vô số nghiệm với 1 ẩn tự do và nghiệm tổng quát có dạng:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}t \\ x_2 = \frac{1}{3}t \\ x_3 = t \end{cases}; t \text{ tùy ý}$$

5. Phương pháp Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính

* Nội dung của phương pháp này là dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các phương trình của hệ đã cho để đưa nó về một hệ tương đương, đơn giản, dễ tìm nghiệm.

* Một phép biến đổi sơ cấp trên một hệ phương trình tuyến tính là phép biến đổi có một trong các dạng sau:

a/ Đổi chỗ 2 phương trình của hệ cho nhau.

b/ Nhân 1 phương trình của hệ với một số khác không.

c/ Thêm vào một phương trình bội số của phương trình khác.

Nhận xét: Các phép biến đổi sơ cấp nói trên chính là các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận mở rộng của hệ.

* Nội dung của phương pháp Gauss là dùng các phép biến đổi sơ cấp nói trên để đưa ma trận mở rộng của hệ đã cho về một ma trận có dạng bậc thang.

Ở dạng đó ta biết phương trình có nghiệm hay không và việc tìm nghiệm cũng không khó khăn so với các phương pháp khác.

Ta trình bày phương pháp Gauss qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

Ma trận mở rộng của hệ là:

$$A_B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array} \right)$$

5. PHƯƠNG PHÁP GAUSS ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (tt)

Ví dụ 1 (tt):

$$\begin{array}{l} h_2 \rightarrow h_2 - 3h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 + 2h_1 \\ \text{--- } h_4 \rightarrow h_4 - 3h_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{--- } h_2 \leftrightarrow h_3 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

5. PHƯƠNG PHÁP GAUSS ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (tt)

Ví dụ 1 (tt):

$$\begin{array}{l} h_3 \rightarrow h_3 + 3h_2 \\ \text{--- } h_4 \rightarrow h_4 + 2h_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{array} \right)$$

$$\text{--- } h_4 \rightarrow h_4 - h_3 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

5. PHƯƠNG PHÁP GAUSS ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (tt)

Ví dụ 1 (tt):

Ma trận cuối có dạng bậc thang, trong đó phương trình cuối có dạng: $0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 2$.

Vậy hệ đã cho là vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

5. PHƯƠNG PHÁP GAUSS ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (tt)

Ma trận mở rộng của hệ là:

$$A_B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 19 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{h_2 \rightarrow h_2 - 2h_1 \\ h_3 \rightarrow h_3 - 5h_1 \\ h_4 \rightarrow h_4 - 3h_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 11 & -14 \\ 0 & -4 & 14 & -18 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{h_3 \rightarrow h_3 + 3h_2 \\ h_4 \rightarrow h_4 + 4h_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{h_4 \rightarrow h_4 - h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

5. PHƯƠNG PHÁP GAUSS ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (tt)

Ví dụ 2 (tt):

Ma trận cuối có dạng bậc thang, trong đó:

$$\begin{cases} 2x_3 = -2 \\ x_2 = 4 + 3x_3 \\ x_1 = 6 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

⇒ Hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

5. PHƯƠNG PHÁP GAUSS ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (tt)

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

cuuduongthancong.com

Ma trận mở rộng của hệ là:

$$A_B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & -1 \end{array} \right)$$

cuuduongthancong.com

5. PHƯƠNG PHÁP GAUSS ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (tt)

Ví dụ 3 (tt):

$$\begin{array}{l} h_2 \rightarrow h_2 - h_1 \\ \underline{h_3 \rightarrow h_3 - 2h_1} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \end{array} \right)$$

$$\underline{h_3 \rightarrow h_3 - h_2} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

5. PHƯƠNG PHÁP GAUSS ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (tt)

Ví dụ 3 (tt):

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$$

Ta chọn ẩn số tự do là x_3, x_4 . Lúc này hệ có vô số nghiệm và nghiệm tổng quát có dạng:

$$\begin{cases} x_1 = 7 + 7t_1 - 14t_2 \\ x_2 = -3 - 2t_1 + 4t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} ; \quad t_1, t_2 \text{ tùy ý}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{l} a / \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{array} \right. \\ b / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{array} \right. \\ c / \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5 (tt)

Bài 2: Giải các hệ phương trình thuần nhất sau (Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản)

$$a / \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$b / \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5 (tt)

Bài 3: Giải hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

Bài 4: : Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$a / \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

$$b / \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5 (tt)

Bài 5: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + mx_4 = m + 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = m + 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2mx_4 = 2m + 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3mx_4 = 3m + 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2mx_4 = m^2 + m + 2 \end{cases}$$

Bài 6: Giải hệ sau bằng cách dùng ma trận nghịch đảo

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

PHẦN ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau

a/ $r(A) = r(A_B) = 2 < n = 4 \Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm

Nghiệm tổng quát có dạng:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = -t_1 + 2t_2 \\ x_4 = 1 \end{cases}; \quad t_1, t_2 \in R$$

b/ $r(A) = 3 < r(A_B) = 4 \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

c/ $r(A) = 3 = r(A_B) \Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Bài 2:

a/ $r(A) = r(A_B) = 3 < n = 6 \Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm
(Có 3 ẩn số tự do)

Nghiệm tổng quát có dạng:
$$\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 & x_4 = t_1 \\ x_2 = t_1 - t_3, & x_5 = t_2 \\ x_3 = t_1 & x_6 = t_3 \end{cases}$$

với t_1, t_2, t_3 tùy ý

Ba nghiệm cơ bản là: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

PHẦN ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 2 (tt):

b/ $r(A) = r(A_B) = 2 < n = 4 \Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm
(Có 2 ẩn số tự do)

$$\begin{cases} x_1 = -14t_1 + 11t_2 \\ x_2 = 5t_1 - 4t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

Hai nghiệm cơ bản của hệ là: $x_1 = \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

PHẦN ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 3:

$$\left. \begin{array}{l} \det A = 2 \\ \det A^{(1)} = 6 \\ \det A^{(2)} = 2 \\ \det A^{(3)} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm duy nhất là: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Bài 4:

$$a/ r(A) = r(A_B) = 4$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

PHẦN ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 4 (tt):

$$\text{b/ } r(A) = r(A_B) = 4$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài 5:

$$\text{Trường hợp } m \neq 0, r(A) = r(A_B) = 4$$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất là:

$$\begin{cases} x_1 = -m^2 + m + 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = m \end{cases}$$

PHẦN ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 5 (tt):

Trường hợp $m = 0$, $r(A) = r(AB) = 3 < n = 4$

$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm (Có 1 ẩn tự do)

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = t \end{cases}, \quad t \text{ tùy ý}$$

Bài 6: Hệ này viết lại dưới dạng ma trận là: $A.X = B$

$\Rightarrow$ Nghiệm của hệ là $X = A^{-1}.B$, với

PHẦN ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài 6 (tt):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -4 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Nghiem của hệ là } x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tức là: } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Kết thúc chương 5 - Toán 2

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com