

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

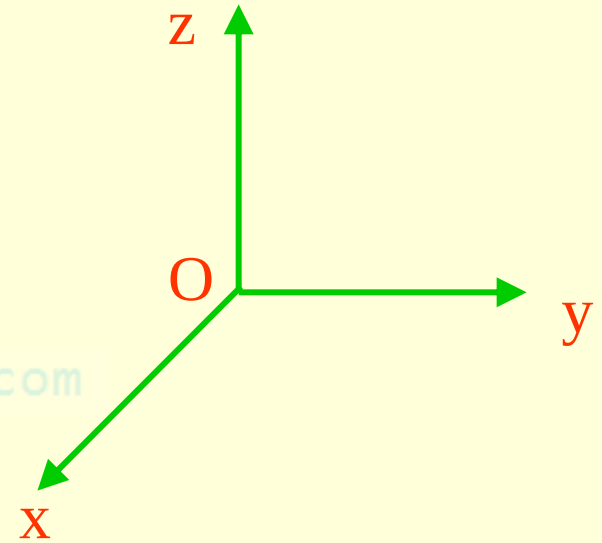
CHƯƠNG 6:

CÁC TÍCH VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN R_3

cuu duong than cong . com

1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ ĐỀ – CÁC VUÔNG GÓC

* Các trục Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi một và tạo thành một tam diện thuận (Khi một người đứng theo hướng dương trục Oz chân tại O , nhìn góc xoay hướng dương trục Ox đến hướng dương trục Oy là ngược chiều kim đồng hồ).



* Các vector đơn vị chỉ hướng dương của các trục tương ứng là: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

1. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ ĐỀ – CÁC VUÔNG GÓC (tt)

* Trong không gian R_3 lấy hai điểm $M_1(x_1, y_1, z_1)$ và $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ta có vectơ từ điểm M_1 đến M_2 là:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1 M_2} &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\end{aligned}$$

* Khoảng cách giữa M_1 và M_2 bằng độ dài của vectơ $\overrightarrow{M_1 M_2}$

$$d(M_1, M_2) = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA 2 VECTƠ $\vec{a}$ VÀ $\vec{b}$

* Trong không gian R_3 , lấy hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Tích vô hướng của 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là **một số** và được ký hiệu là: **$(\vec{a}, \vec{b})$**

Ở đây: $(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \varphi$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Với φ là góc hợp giữa hai vectơ và $(0 \leq \varphi \leq \pi)$.

Ta có các bất đẳng thức sau:

+ Bất đẳng thức Cauchy – Shwarz: $|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

+ Bất đẳng thức tam giác: $\|(\vec{a} + \vec{b})\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

3. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA 2 VECTƠ $\vec{a}$ VÀ $\vec{b}$

* Trong không gian R_3 , lấy hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Tích có hướng của 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là **1 vector** và được ký hiệu là: **$\vec{a} \times \vec{b}$**

Vectơ này được xác định như sau:

- * Có độ dài bằng $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \varphi$
(φ là góc hợp giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$)
- * Có phương vuông góc với mặt phẳng chứa $\vec{a}$ và $\vec{b}$
- * Có hướng sao cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{a} \times \vec{b}$ tạo thành một tam diện thuận.

3. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA 2 VECTƠ $\vec{a}$ VÀ $\vec{b}$ (tt)

Chú ý:

* $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ bằng diện tích hình bình hành dựng trên hai vectơ đó

$$\begin{aligned} * \quad \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

$$* \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$* \quad \alpha (\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$$

3. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA 2 VECTƠ $\vec{a}$ VÀ $\vec{b}$ (tt)

Chú ý (tt):

$$* \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$* \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ tỷ lệ.}$$

Ví dụ 1: Trong không gian R_3 cho ba điểm $A(1,-1,2)$, $B(-1,0,3)$ và $C(0,2,1)$. Tính diện tích của tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 3, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, -3, -5)$$

3. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA 2 VECTƠ $\vec{a}$ VÀ $\vec{b}$ (tt)

Nhận xét: $\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$ là diện tích của hình bình hành dựng trên hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

Do đó: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{50}$

Ví dụ 2: Trong không gian R_3 , lấy hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 5$ và góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\frac{\pi}{4}$. Tính diện tích của tam giác có cạnh là các vectơ $\vec{a} - 2\vec{b}$ và $3\vec{a} + 2\vec{b}$

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \|(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})\| \\ &= \frac{1}{2} \times \|8 \times (\vec{a} \times \vec{b})\| \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin \frac{\pi}{4} = 50 \sqrt{2} \end{aligned}$$

3. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA 2 VECTƠ $\vec{a}$ VÀ $\vec{b}$ (tt)

Ví dụ 3: Tính diện tích của tam giác và đường cao BD của tam giác ABC. Trong đó A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1).

Ta có: $\vec{AB} = (4, -5, 0)$

$$\vec{AC} = (0, 4, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (15, 12, 16)$$

Vậy: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{25}{2}$

Cạnh AC của tam giác có độ dài là $\|\vec{AC}\| = 5$

$\Rightarrow$ Đường cao BD của ΔABC là 5.

4. TÍCH HỖN HỢP CỦA 3 VECTO $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

* Trong không gian R_3 cho ba vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ và $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Tích hỗn hợp của 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là **1 số** và được ký hiệu là: **$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$**

Tính chất:

* $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| =$ Thể tích của hình hộp dựng trên 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$*(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng phẳng.

4. TÍCH HỖN HỢP CỦA 3 VECTO $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (tt)

Tính chất (tt):

$$*(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

$$*(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \alpha (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + \beta (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$$

* Thể tích của tứ diện ABCD bằng $1/6$ thể tích của hình hộp dựng trên 3 vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

Ví dụ 1: Chứng minh rằng 4 điểm A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1) và D(2,3,1) cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ta có: $\vec{AB} = (-1, -1, 6)$

$$\vec{AC} = (-2, 0, 2)$$

$$\vec{AD} = (1, -1, 4)$$

4. TÍCH HỖN HỢP CỦA 3 VECTO $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (tt)

Ví dụ 1 (tt):

Nhận xét: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ thuộc cùng một mặt phẳng. Tức là 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ví dụ 2: Tính thể tích của tứ diện ABCD với các đỉnh là A(2,-3,5), B(0,2,1), C(-2,-2,3) và D(3,2,4).

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2, 5, 4)$

$$\overrightarrow{AC} = (-4, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, 5, -1)$$

4. TÍCH HỖN HỢP CỦA 3 VECTO $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (tt)

Ví dụ 2 (tt):

Thể tích của hình hộp dựng trên ba vectơ này là:

$$V = |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = 36$$

Mà thể tích của tứ diện ABCD là bằng $1/6$ thể tích hình hộp dựng trên 3 vectơ nên thể tích của tứ diện ABCD bằng 6.

Ví dụ 3: Cho tứ diện ABCD với các đỉnh là A(1,1,1), B(2,0,2), C(2,2,2) và D(3,4,-3). Tính chiều cao hạ từ đỉnh D của tứ diện.

Ta có: $\vec{AB} = (1, -1, 1)$

$$\vec{AC} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{AD} = (2, 3, -4)$$

4. TÍCH HỖN HỢP CỦA 3 VECTO $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (tt)

Ví dụ 3 (tt):

Nhận xét thể tích tứ diện ABCD = $\frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = 2$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|(-2, 0, 2)\| = \sqrt{2}$$

Do thể tích tứ diện ABCD = $\frac{1}{3}$ diện tích đáy x đường cao

$\Rightarrow$ Đường cao hạ từ đỉnh D là:

$$h = \frac{3 \times V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \times 2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

5. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

a/ Đường thẳng:

Cho Δ là đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và song song với vectơ $\vec{v} = (m, n, p)$

Vậy Δ sẽ bao gồm tất cả các điểm $M(x, y, z)$ sao cho $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{v}$

$$\text{Vậy } M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Nếu ký hiệu các tỷ số trên là t , ta được phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

5. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

a/ Đường thẳng (tt):

Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng Δ được tính bởi công thức:

$$d = \frac{\|\overrightarrow{M_0 P} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Ví dụ: Tính khoảng cách từ điểm P(2,1,3) đến đường thẳng Δ :

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{4} = z$$

Ta có: $\vec{v} = (5, 4, 1)$, $M_0(1, -2, 0)$

Vậy $\overrightarrow{M_0 P} = (1, 3, 3)$

5. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

a/ Đường thẳng (tt):

$$\overrightarrow{M_0P} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-9, 14, -11)$$

$$\Rightarrow d = \frac{\|\overrightarrow{M_0P} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{9^2 + 14^2 + 11^2}}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 1^2}}$$

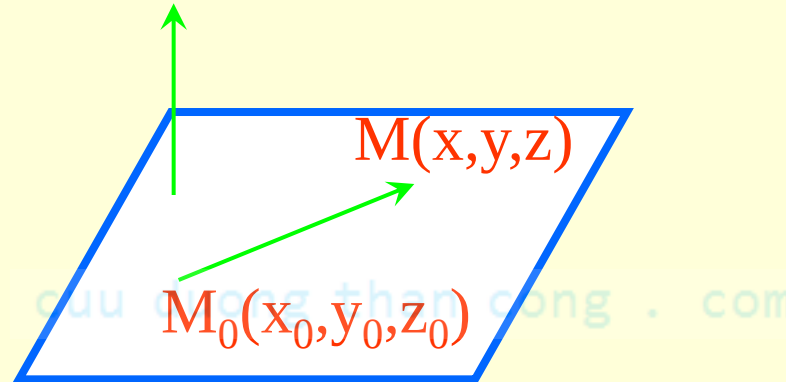
b/ Mặt phẳng:

Cho P là mặt phẳng qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ và vuông góc với vector $\vec{n} = (A, B, C)$. Khi đó mặt phẳng P sẽ bao gồm tất cả các điểm $M(x, y, z)$ có tính chất $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$

5. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

b/ Mặt phẳng (tt):

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng P được viết ở dạng: **$Ax + By + Cz + D = 0$** .

Trong đó: $\vec{n} = (A, B, C)$ là pháp vector của mặt phẳng.

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ và được tính bởi công thức sau:

5. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

b/ Mặt phẳng (tt):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ví dụ 1: Tìm phương trình của mặt phẳng đi qua $M(2,3,0)$ và song song với mặt phẳng $5x - 3y - z - 4 = 0$.

Nhận xét: Pháp vector của mặt phẳng cần tìm cũng là pháp vector của mặt phẳng $5x - 3y - z - 4 = 0$, tức là $\vec{n} = (5, -3, -1)$

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$$5(x - 2) - 3(y - 3) - 1(z - 0) = 0$$

$$\text{hay là } 5x - 3y - z - 1 = 0.$$

5. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

b/ Mặt phẳng (tt):

Ví dụ 2: Cho đường thẳng (d):

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 3}{1}$$

Tìm tọa độ của H là chân đường vuông góc hạ từ gốc O xuống (d).

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua gốc O và vuông góc với (d). Vậy vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (2, 3, 1)$

$\Rightarrow$ Phương trình của (P) là: $2x + 3y + z = 0$.

5. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

b/ Mặt phẳng (tt):

Ví dụ 2 (tt):

Phương trình tham số của đường thẳng là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Mà H chính là giao điểm của (P) và (d)

$$\Rightarrow 2(2 + 2t) + 3(1 + 3t) + (3 + t) = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{5}{7}$$

$$\text{Vậy } H \left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7} \right)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 6: CÁC TÍCH VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN R_3

Bài 1: Cho $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, 3, 5)$. Tìm $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Bài 2: Trong không gian R_3 , cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết rằng $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$, góc giữa 2 vectơ là $\frac{\pi}{3}$.
cuu duong than cong . com

Tính $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$; $\|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\|$

Bài 3:

Cho tứ diện ABCD, trong đó $A(1, 0, 2)$, $B(3, -2, 2)$, $C(4, 2, 6)$ và $D(3, 5, -2)$. Tính thể tích của tứ diện.
cuu duong than cong . com

BÀI TẬP CHƯƠNG 6 (tt)

Bài 4:

Tìm đỉnh thứ tư của tứ diện ABCD nếu biết $A(-1,10,0)$, $B(0,5,2)$, $C(6,32,2)$, $V = 29$ và D nằm trên trục Oy.

Bài 5:

Cho điểm $A(1,2,4)$. Từ điểm A hạ các đường vuông góc với các mặt tọa độ. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua chân các đường vuông góc nói trên.

Bài 6:

Viết phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $A(1,7,-5)$ và cắt các trục tọa độ (Phần dương) theo các đoạn chắn bằng nhau.

PHẦN ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

Bài 1: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (7, -3, -1)$

Bài 2: $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{3}$

$$\|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\| = 3\sqrt{3}$$

Hướng dẫn: $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3(\vec{a} \times \vec{b})$

Ở đây ta sử dụng tính chất $(2\vec{a} \times \vec{a}) = 0$ vì $2\vec{a}$ và $\vec{a}$ tỷ lệ
và tính chất $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$

Bài 3: Thể tích tứ diện $V = 16$

Hướng dẫn:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \right| = 16$$

PHẦN ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

Bài 4:

Đỉnh thứ tư của tứ diện là $D(0,0,0)$ hoặc $D(0,29,0)$.

Hướng dẫn: D nằm trên Oy nên có tọa độ là $D(0,m,0)$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (1, -5, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (7, 22, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, m - 10, 0)$$

$$\text{Mà } V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} |12m - 174| = 16$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 29.$$

PHẦN ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

Bài 5: Phương trình mặt phẳng đi qua chân các đường vuông góc là: $4x + 2y + z - 8 = 0$.

Hướng dẫn:

Gọi M_1, M_2, M_3 là chân các đường vuông góc hạ từ điểm A xuống các mặt phẳng Oxy, Oxz, Oyz.

Ta có: $M_1(1,2,0), M_2(1,0,4), M_3(0,2,4)$. Phương trình mặt phẳng đi qua M_1, M_2, M_3 là:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8x - 4y - 2z + 16 = 0$$

Hay viết rút gọn là: $4x + 2y + z - 8 = 0$

PHẦN ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

Bài 6:

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $x + y + z - 3 = 0$.

Hướng dẫn:

Phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} - 1 = 0$$

Mặt phẳng này đi qua $A(1, 7, -5)$ nên

$$\frac{1}{a} + \frac{7}{a} - \frac{5}{a} - 1 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$\Rightarrow$ Mặt phẳng cần tìm là: $x + y + z - 3 = 0$.

KẾT THÚC CHƯƠNG 6

cuu duong than cong . com