

Mục lục

Lời nói đầu	i
Những kí hiệu	ii
Mục lục	iii
Chương 1. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN	2
1.1. Giới hạn và tính liên tục của hàm nhiều biến	2
1.1.1. Giới hạn của hàm hai biến	2
1.1.2. Tính liên tục của hàm hai biến	5
1.2. Đạo hàm riêng	5
1.2.1. Khái niệm đạo hàm riêng	5
1.2.2. Quy tắc tìm đạo hàm riêng	6
1.2.3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng	6
1.2.4. Đạo hàm riêng cấp cao	7
1.2.5. Phương trình đạo hàm riêng	8
1.3. Mặt phẳng tiếp diện và sự xấp xỉ tuyến tính	8
1.3.1. Mặt phẳng tiếp diện	8
1.3.2. Sự xấp xỉ tuyến tính	9
1.4. Vi phân	11
1.4.1. Định nghĩa hàm khả vi	11
1.4.2. Định nghĩa vi phân	11
1.4.3. Vi phân cấp cao	13
1.5. Đạo hàm của hàm hợp	13
1.5.1. Trường hợp: hàm số $z = f(x, y)$, trong đó $x = x(t), y = y(t)$ ($t \in (a, b)$)	13
1.5.2. Trường hợp: hàm số $z = f(u, v)$, trong đó $u = u(x, y), v = v(x, y)$	15
1.6. Đạo hàm theo hướng	16
1.6.1. Bài toán thực tế	16
1.6.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng	16
1.6.3. Định nghĩa đạo hàm theo hướng	17
1.6.4. Véc-tơ Gradient	18
1.6.5. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng	19

1.7. Đạo hàm của hàm ẩn	20
1.7.1. Đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi $F(x, y) = 0$	20
1.7.2. Phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến với đường cong $y = y(x)$ được xác định bởi $F(x, y) = 0$	20
1.7.3. Đạo hàm riêng của hàm ẩn xác định bởi $F(x, y, z) = 0$	22
1.7.4. Mặt phẳng tiếp diện và phương trình pháp tuyến với mặt cong $z = f(x, y)$ được xác định bởi $F(x, y, z) = 0$	22
1.7.5. Bài toán thực tế ứng dụng véc tơ gradient	24
1.8. Công thức Taylor và ứng dụng	25
1.8.1. Công thức Taylor	25
1.8.2. Công thức Maclaurin	26
1.8.3. Khai triển Taylor bằng cách sử dụng khai triển Maclaurin của hàm một biến	27
1.9. Thực hành MatLab	28
1.9.1. Tính giá trị của hàm hai biến	28
1.9.2. Tính đạo hàm riêng	28
1.9.3. Tính véc tơ gradient	28
1.10. Bài tập	29
1.10.1. Tìm đạo hàm riêng của hàm $z = f(x, y)$	29
1.10.2. Tìm vi phân của hàm $z = f(x, y)$	29
1.10.3. Đạo hàm, vi phân của hàm hợp	30
1.10.4. Đạo hàm theo hướng	30
1.10.5. Đạo hàm, vi phân của hàm ẩn	30
1.10.6. Mặt phẳng tiếp diện, pháp tuyến với mặt cong	31
1.10.7. Tìm khai triển Taylor, Maclaurin	31
Tài liệu tham khảo	35

ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

1.1. Giới hạn và tính liên tục của hàm nhiều biến	2
1.2. Đạo hàm riêng	5
1.3. Mặt phẳng tiếp diện và sự xấp xỉ tuyến tính.....	8
1.4. Vi phân.....	11
1.5. Đạo hàm của hàm hợp	13
1.6. Đạo hàm theo hướng.....	16
1.7. Đạo hàm của hàm ẩn	20
1.8. Công thức Taylor và ứng dụng	25
1.9. Thực hành MatLab	28
1.10. Bài tập	29

1.1 Giới hạn và tính liên tục của hàm nhiều biến

1.1.1 Giới hạn của hàm hai biến

Định nghĩa 1.1. Số $L \in \mathbb{R}$ được gọi là **giới hạn của hàm số $f(x, y)$** khi (x, y) tiến đến $(a, b) \in D$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L,$$

nếu như với mọi $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in D : 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ luôn có $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Định nghĩa 1.2. Số $L \in \mathbb{R}$ được gọi là **giới hạn của hàm số $f(x, y)$** khi (x, y) tiến đến $(a, b) \in D$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L,$$

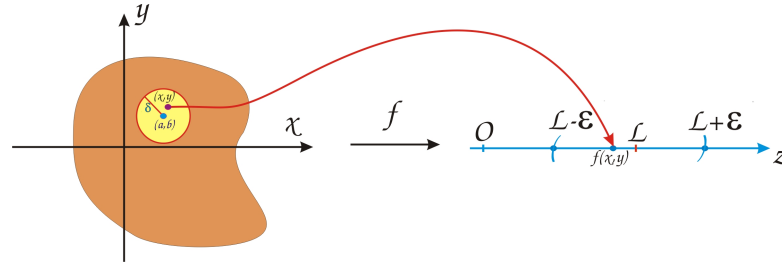
nếu như $\forall \{(x_n), (y_n)\} \subset M \setminus (x_0, y_0) : x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ luôn có bất đẳng thức $f(x_n, y_n) \rightarrow L$.

Ví dụ 1.1.1. Tính $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

Giải. Ta lấy dãy $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 1)$ bất kỳ, tức là $x_n \rightarrow 0$ và $y_n \rightarrow 1$. Khi đó

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n + y_n}{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow \frac{0 + 1}{0^2 + 1^2} = 1.$$

Vậy theo định nghĩa thì $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x + y}{x^2 + y^2} = 1$.



Hình 1.1: Ý nghĩa hình học của giới hạn hàm hai biến

Ý nghĩa hình học của giới hạn hàm hai biến: Với mọi lân cận $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, ta luôn tìm được hình tròn đủ nhỏ D_δ với tâm (a, b) bán kính $\delta > 0$ sao cho hàm số f biến mọi điểm $(x, y) \in D_\delta \setminus (a, b)$ thành những điểm $f(x, y) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Chú ý. Nếu giới hạn của hàm hai biến **tồn tại** thì $f(x, y)$ phải có cùng giới hạn khi (x, y) tiến đến (a, b) , không phụ thuộc vào cách điểm (x, y) tiến đến điểm (a, b) . Do đó, nếu ta chỉ ra hai đường khác nhau để điểm (x, y) tiến đến điểm (a, b) mà hàm số $f(x, y)$ có hai giới hạn khác nhau thì $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$ **không tồn tại**.

Định lý 1.1. Nếu $f(x, y) \rightarrow L_1$ khi $(x, y) \rightarrow (a, b)$ dọc theo đường C_1 và $f(x, y) \rightarrow L_2$ khi $(x, y) \rightarrow (a, b)$ dọc theo đường C_2 , trong đó $C_1 \neq C_2, L_1 \neq L_2$ thì $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$ **không tồn tại**.

Ví dụ 1.1.2. Tìm giới hạn $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Giải. Ta có $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục $Ox (y = 0)$. Khi đó $f(x, y) = f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1, \forall x \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow 1$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục Ox .

Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục $Oy (x = 0)$. Khi đó $f(x, y) = f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1, \forall y \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow -1$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục Oy .

Vậy f có hai giới hạn khác nhau dọc theo hai đường khác nhau nên giới hạn đã cho **không tồn tại**.

Ví dụ 1.1.3. Tìm giới hạn $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Giải. Ta có $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục $Ox (y = 0)$. Khi đó $f(x, y) = f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0, \forall x \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow 0$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục Ox .

Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục $Oy (x = 0)$. Khi đó $f(x, y) = f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0, \forall y \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow 0$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo trục Oy .

Mặc dù, chúng ta có được những giới hạn **giống nhau** dọc theo hai trục tọa độ khác nhau, nhưng điều đó cũng chưa thể kết luận giới hạn của hàm đã cho tồn tại và bằng 0.

Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường $y = x$. Khi đó $f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}, \forall x \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường $y = x$.

Vậy f có các giới hạn khác nhau dọc theo các đường khác nhau nên giới hạn đã cho **không tồn tại**.

Ví dụ 1.1.4. Tìm giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

Giải. Ta có $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$. Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo mọi đường $y = mx$. Khi đó $f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}, \forall x \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow 0$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo mọi đường $y = mx$.

Mặc dù, chúng ta có được những giới hạn **giống nhau** dọc mọi đường $y = mx$, nhưng điều đó cũng chưa thể kết luận giới hạn của hàm đã cho tồn tại và bằng 0.

Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường $x = y^2$. Khi đó $f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}, \forall y \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường $x = y^2$.

Vậy f có các giới hạn khác nhau dọc theo các đường khác nhau nên giới hạn đã cho **không tồn tại**.

Ví dụ 1.1.5. Tìm giới hạn $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

Giải. Ta có $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$. Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo mọi đường $y = mx$. Khi đó $f(x, y) = f(x, mx) = \frac{3x^2(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{3mx^3}{x^2 + m^2x^2}, \forall x \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow 0$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo mọi đường $y = mx$.

Mặc dù, chúng ta có được những giới hạn **giống nhau** dọc mọi đường $y = mx$, nhưng điều đó cũng chưa thể kết luận giới hạn của hàm đã cho tồn tại và bằng 0.

Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường $x = y^2$. Khi đó $f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{3(y^2)^2 \cdot y}{(y^2)^2 + y^2} = \frac{3y^5}{y^2 + y^4}, \forall y \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow 0$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường $x = y^2$.

Cho $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường $y = x^2$. Khi đó $f(x, y) = f(x, x^2) = \frac{3x^2 \cdot x^2}{x^2 + (x^2)^2} = \frac{3x^4}{x^2 + x^4}, \forall x \neq 0$. Do đó $f(x, y) \rightarrow 0$ khi $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dọc theo đường $y = x^2$.

Vậy f có các giới hạn giống nhau dọc theo các đường khác nhau. Ta sẽ chứng minh giới hạn đã cho **tồn tại** và bằng 0.

Cho tùy ý $\varepsilon > 0$. Chúng ta tìm $\delta > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ luôn có $\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$, có nghĩa là nếu $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ thì $\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$.

Ta có $\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}$. Do đó nếu ta chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ và cho $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ thì ta được $\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Vậy theo định nghĩa giới hạn của hàm hai biến $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$.

1.1.2 Tính liên tục của hàm hai biến

Định nghĩa 1.3. Hàm hai biến f được gọi là **liên tục tại (a, b)** nếu như

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Định nghĩa 1.4. Hàm hai biến f được gọi là **liên tục trên miền D** nếu như f liên tục tại **mọi điểm $(a, b) \in D$** .

Ví dụ 1.1.6. Cho $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Hãy khảo sát tính liên tục của hàm $f(x, y)$.

Giải. Hàm số $f(x, y)$ liên tục tại mọi điểm $(x, y) \neq (0, 0)$. Tuy nhiên, hàm số **không liên tục tại điểm $(0, 0)$** vì $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ **không tồn tại**.

Ví dụ 1.1.7. Cho $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Hãy khảo sát tính liên tục của hàm $f(x, y)$.

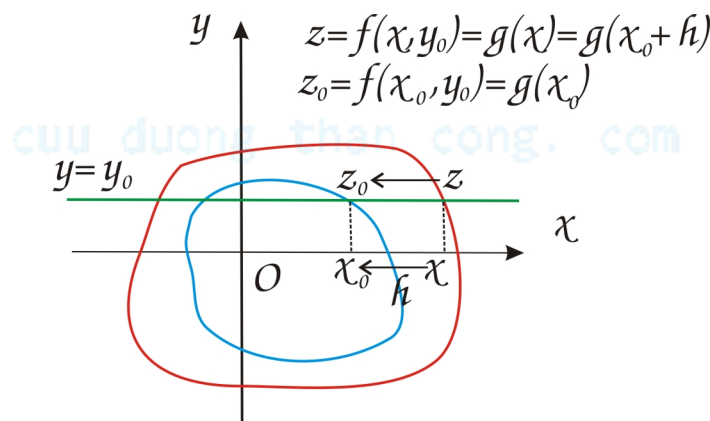
Giải. Hàm số $f(x, y)$ liên tục tại mọi điểm $(x, y) \neq (0, 0)$. Hàm số **liên tục tại điểm $(0, 0)$** vì $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$. Như vậy, f **liên tục trên $\mathbb{R}^2$** .

1.2 Đạo hàm riêng

1.2.1 Khái niệm đạo hàm riêng

Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$. Khi cho x thay đổi, y cố định ($y = y_0$) thì ta được hàm một biến x : $g(x) = f(x, y_0)$. Nếu $g(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì ta gọi đó là đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) **theo biến x** .

Định nghĩa 1.5. Số (nếu có) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ được gọi là **đạo hàm riêng** của hàm số $f(x, y)$ tại điểm $(x_0, y_0) \in G$ **theo biến x** . Đạo hàm riêng này được ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0)$ hoặc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.



Hình 1.2: Khái niệm đạo hàm riêng

Tương tự như vậy, ta sẽ định nghĩa đạo hàm riêng của hàm số $f(x, y)$ tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ theo biến y .

Định nghĩa 1.6. Số (nếu có) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$ được gọi là **đạo hàm riêng** của hàm số $f(x, y)$ tại điểm $(x_0, y_0) \in G$ **theo biến y** . Đạo hàm riêng này được ký hiệu là $f'_y(x_0, y_0)$ hoặc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Ví dụ 1.2.1. Cho $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Hãy tính $f'_x(2, 1)$ và $f'_y(2, 1)$

Giải. Cho $y = 1$ ta được $g(x) = f(x, 1) = x^3 + x^2 - 2 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow g'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16 = f'_x(2, 1)$.

Cho $x = 2$ ta được $h(y) = f(2, y) = 2^3 + 2^2y^3 - 2y^2 \Rightarrow h'(y) = 12y^2 - 4y \Rightarrow h'(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8 = f'_y(2, 1)$.

1.2.2 Quy tắc tìm đạo hàm riêng

- Để tìm f'_x ta xem y là hằng số và lấy đạo hàm của $f(x, y)$ theo biến x .
- Để tìm f'_y ta xem x là hằng số và lấy đạo hàm của $f(x, y)$ theo biến y .

Ví dụ 1.2.2. Tìm các đạo hàm riêng của hàm số $z = f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$.

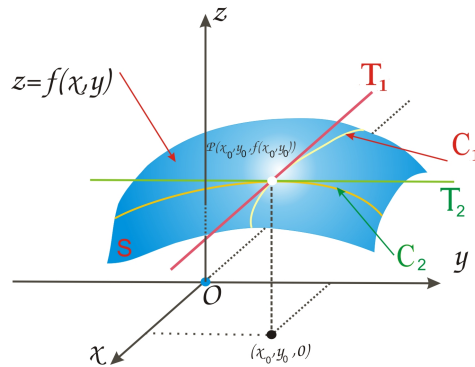
Giải. Khi tính $\frac{\partial f}{\partial x}$ ta xem y như hằng số, còn khi tính $\frac{\partial f}{\partial y}$ ta xem x như hằng số.

Ta có

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

1.2.3 Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng



Hình 1.3: Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng

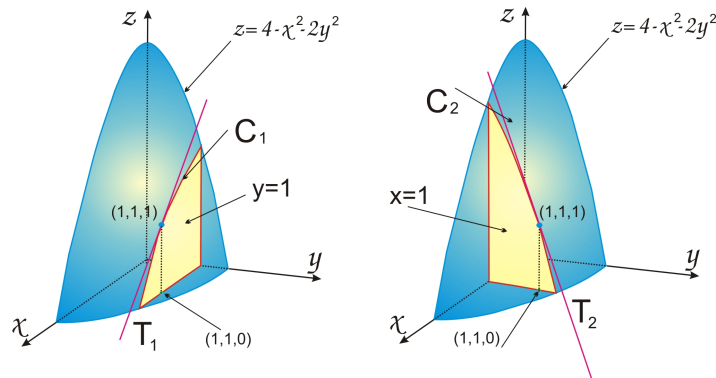
Đồ thị của hàm $z = f(x, y)$ là mặt cong S . Cho $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nằm trên mặt cong S . Khi cố định $y = y_0$ ta thấy mặt phẳng $y = y_0$ sẽ cắt mặt cong S theo giao tuyến C_1 . Khi cố định $x = x_0$ ta thấy mặt phẳng $x = x_0$ sẽ cắt mặt cong S theo giao tuyến C_2 . Cả hai đường cong C_1 và C_2 đều đi qua điểm P .

Như vậy, đường cong C_1 chính là đồ thị của hàm số $g(x) = f(x, y_0)$ trên mặt phẳng $y = y_0$, do đó tiếp tuyến của nó T_1 tại P sẽ có hệ số góc là $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Đường cong C_2 chính là đồ thị của hàm số $h(y) = f(x_0, y)$ trên mặt phẳng $x = x_0$, do đó tiếp tuyến của nó T_2 tại P sẽ có hệ số góc là $h'(y_0) = f'_y(x_0, y_0)$.

Tóm lại, ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) là:

1. $f'_x(x_0, y_0)$ là **hệ số góc của tiếp tuyến** T_1 với đường cong C_1 (trong đó C_1 là giao tuyến của mặt cong S với mặt phẳng $y = y_0$)
2. $f'_y(x_0, y_0)$ là **hệ số góc của tiếp tuyến** T_2 với đường cong C_2 (trong đó C_2 là giao tuyến của mặt cong S với mặt phẳng $x = x_0$).

Ví dụ 1.2.3. Cho $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f'_x(1, 1)$, $f'_y(1, 1)$ và nêu ý nghĩa hình học của chúng.



Hình 1.4: Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng $f'_x(1, 1)$, $f'_y(1, 1)$

Giải. Ta có

$$f'_x = -2x \Rightarrow f'_x(1, 1) = -2; f'_y = -4y \Rightarrow f'_y(1, 1) = -4.$$

Đồ thị của hàm số f là **paraboloid** $z = 4 - x^2 - 2y^2$ và mặt phẳng $y = 1$ cắt paraboloid theo đường parabol $C_1 : z = 2 - x^2, y = 1$. Hệ số góc tiếp tuyến T_1 với parabol C_1 tại điểm $(1, 1, 1)$ là $f'_x(1, 1) = -2$.

Tương tự, mặt phẳng $x = 1$ cắt paraboloid theo đường parabol $C_2 : z = 3 - 2y^2, x = 1$. Hệ số góc tiếp tuyến T_2 với parabol C_2 tại điểm $(1, 1, 1)$ là $f'_y(1, 1) = -4$.

1.2.4 Đạo hàm riêng cấp cao

Với hàm hai biến $z = f(x, y)$ thì đạo hàm riêng f'_x và f'_y cũng là những hàm hai biến, do đó những đạo hàm riêng của chúng $(f'_x)'_x, (f'_x)'_y, (f'_y)'_x, (f'_y)'_y$ được gọi là **đạo hàm riêng cấp hai** của hàm f . Như vậy,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}; \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.4. Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

Giải. Ta có $f'_x = 3x^2 + 2xy^3$, $f''_{xx} = 6x + 2y^3$, $f''_{xy} = 6xy^2$, $f'_y = 3x^2y^2 - 4y$, $f''_{yy} = 6x^2y - 4$, $f''_{yx} = 6xy^2$.

Ví dụ 1.2.5. Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x, y) = xye^y$.

Giải. Ta có $f'_x = ye^y$, $f''_{xx} = 0$, $f''_{xy} = e^y + ye^y$, $f'_y = x(e^y + ye^y)$, $f''_{yy} = x(2e^y + ye^y)$, $f''_{yx} = e^y + ye^y$.

Ví dụ 1.2.6. Cho hàm số $f(x, y) = \sin(xy)$. Tính $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ và $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= x \cos(xy); & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -x^2 \sin(xy). \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 \sin(xy)) = -2x \sin(xy) - x^2 y \cos(xy).\end{aligned}$$

Định lý 1.2. (Định lý Clairaut.) Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D . Khi đó nếu f''_{xy} và f''_{yx} là những hàm liên tục trên D thì với mọi $(x_0, y_0) \in D$ ta có $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

1.2.5 Phương trình đạo hàm riêng

Từ khái niệm đạo hàm riêng, ta xây dựng những **phương trình đạo hàm riêng** để mô tả những quy luật vật lý.

Định nghĩa 1.7. Phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

được gọi là **phương trình Laplace**.

Nghiệm của phương trình này được gọi những **hàm điều hòa**, đóng vai trò quan trọng trong những bài toán truyền nhiệt, lan truyền chất lỏng, điện trường,...

Ví dụ 1.2.7. Chứng minh rằng $u(x, y) = e^x \sin y$ là nghiệm của phương trình Laplace.

Giải. Ta có

$$u'_x = e^x \sin y, u'_y = e^x \cos y, u''_{xx} = e^x \sin y, u''_{yy} = -e^x \sin y.$$

Do đó $u''_{xx} + u''_{yy} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$. Vậy $u(x, y) = e^x \sin y$ là nghiệm của phương trình Laplace.

Định nghĩa 1.8. Phương trình đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

được gọi là **phương trình sóng**.

Phương trình sóng mô tả dạng của sóng: sóng biển, sóng âm, sóng ánh sáng, sóng dao động,...

Ví dụ 1.2.8. Chứng minh rằng $u(x, t) = \sin(x - at)$ là nghiệm của phương trình sóng.

Giải. Ta có

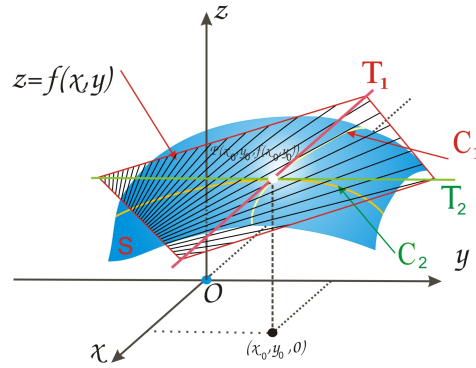
$$u'_x = \cos(x - at), u'_t = -a \cos(x - at), u''_{xx} = -\sin(x - at), u''_{tt} = -a^2 \sin(x - at) = a^2 \cdot u''_{xx}.$$

Do đó $u(x, t) = \sin(x - at)$ là nghiệm của phương trình sóng.

1.3 Mặt phẳng tiếp diện và sự xấp xỉ tuyến tính

1.3.1 Mặt phẳng tiếp diện

Cho $z = f(x, y)$ có đồ thị là mặt cong S . Hàm số f có đạo hàm riêng cấp một liên tục và cho $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là một điểm trên mặt cong S . C_1, C_2 lần lượt là những đường cong giao tuyến của mặt phẳng $y = y_0$ và $x = x_0$ với mặt cong S . T_1, T_2 lần lượt là những tiếp tuyến với đường cong C_1, C_2 tại điểm P .

Hình 1.5: Mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $z = f(x, y)$

Định nghĩa 1.9. Mặt phẳng tiếp diện với mặt cong S tại điểm $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là mặt phẳng chứa 2 tiếp tuyến T_1 và T_2 .

Định lý 1.3. Giả sử hàm số $f(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp một liên tục thì phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt cong $z = f(x, y)$ tại điểm $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Chứng minh. Phương trình mặt phẳng tiếp diện với mặt cong $z = f(x, y)$ đi qua điểm $P(x_0, y_0, z_0)$ có dạng

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

trong đó $C \neq 0$ vì nếu $C = 0$ mặt phẳng tiếp diện sẽ cắt mặt cong theo nhiều điểm khác nhau (trái với định nghĩa mặt phẳng tiếp diện chỉ cắt mặt cong tại 1 điểm duy nhất).

Chia hai vế của phương trình này cho C và đặt $a = -\frac{A}{C}, b = -\frac{B}{C}$ ta được

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Vì mặt phẳng tiếp diện chứa tiếp tuyến T_1 mà tiếp tuyến T_1 nằm trong mặt phẳng $y = y_0$ nên phương trình tiếp tuyến T_1 là

$$z - z_0 = a(x - x_0), y = y_0.$$

Tiếp tuyến T_1 này có hệ số góc bằng a và theo ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng thì $a = f'_x(x_0, y_0)$. Lập luận tương tự cho tiếp tuyến T_2 ta cũng được $b = f'_y(x_0, y_0)$.

Ví dụ 1.3.1. Tìm mặt phẳng tiếp diện với paraboloid elliptic $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm $(1, 1, 3)$.

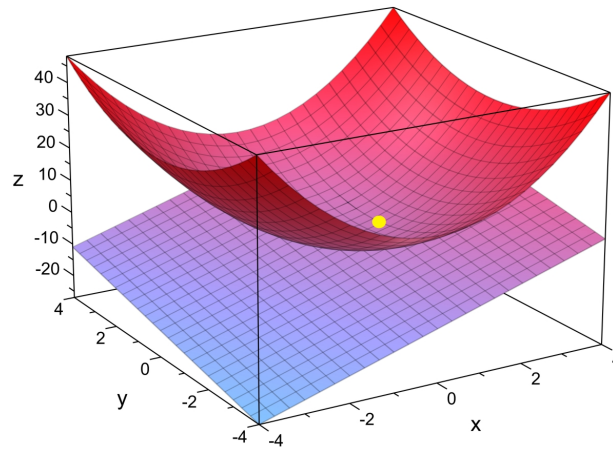
Giải. Phương trình mặt phẳng tiếp diện với paraboloid elliptic $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm $(1, 1, 3)$ là

$$z - f(1, 1) = f'_x(1, 1)(x - 1) + f'_y(1, 1)(y - 1)$$

$$\Leftrightarrow z = 4x + 2y - 3.$$

1.3.2 Sự xấp xỉ tuyến tính

Trong ví dụ (1.3.1), mặt phẳng tiếp diện của hàm $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ tại điểm $(1, 1, 3)$ là $z = 4x + 2y - 3$. Điều này có nghĩa là hàm tuyến tính $L(x, y) = 4x + 2y - 3$ là sự xấp xỉ tốt nhất hàm $f(x, y)$ khi (x, y) nằm gần $(1, 1)$.



Hình 1.6: Mặt paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ và mặt phẳng tiếp diện $z = 4x + 2y - 3$ tại điểm $(1, 1, 3)$

Hàm tuyến tính $L(x, y) = 4x + 2y - 3$ được gọi là **hàm tuyến tính hóa** của hàm f tại điểm $(1, 1)$, và sự xấp xỉ

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

được gọi là **sự xấp xỉ tuyến tính** của hàm f tại $(1, 1)$.

Ví dụ, tại điểm $(1.1, 0.95)$ sự xấp xỉ tuyến tính là $f(1.1, 0.95) \approx 4 \cdot (1.1) + 2 \cdot (0.95) - 3 = 3.3$ và giá trị chính xác là $f(1.1, 0.95) = 2 \cdot (1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$. Tuy nhiên, nếu tại điểm $(2, 3)$ thì $L(2, 3) = 11$, trong khi đó $f(2, 3) = 17$. Điều này có nghĩa là tại những điểm xa điểm $(1, 1)$ ta sẽ không có được sự xấp xỉ tuyến tính tốt.

Định nghĩa 1.10. Nếu phương trình mặt phẳng tiếp diện của $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) là

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

thì hàm tuyến tính

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

được gọi là **hàm tuyến tính hóa** của f tại (x_0, y_0) và sự xấp xỉ

$$z = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

được gọi là **sự xấp xỉ tuyến tính** của f tại (x_0, y_0) .

Ý nghĩa. Trong lân cận của điểm $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$,

$$z \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Đây chính là công thức tính gần đúng giá trị của $f(x, y)$ tại những điểm trong lân cận của điểm (x_0, y_0) .

Chú ý. Chúng ta xác định được mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $z = f(x, y)$ khi f có **đạo hàm riêng cấp một liên tục**. Điều gì xảy ra khi f'_x, f'_y **không liên tục**?

Xét hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Theo định nghĩa đạo hàm riêng, ta có $f'_x(0,0) = 0$ và $f'_y(0,0) = 0$, nhưng f'_x, f'_y không liên tục. Sự xấp xỉ tuyến tính là $f(x,y) \approx f'_x(0,0) \cdot (x-0) + f'_y(0,0) \cdot (y-0) = 0$, nhưng $f(x,y) = \frac{1}{2}$ tại tất cả những điểm trên đường thẳng $y = x$. Do đó, để có được mặt phẳng tiếp diện và sự xấp xỉ tuyến tính thì hàm số f phải có đạo hàm riêng cấp một liên tục.

1.4 Vi phân

1.4.1 Định nghĩa hàm khả vi

Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in D$ là 1 điểm cố định. Cho x_0 số gia $\Delta x = x - x_0$, y_0 số gia $\Delta y = y - y_0$ sao cho điểm $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$. Lập hiệu $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$. Hiệu này được gọi là số gia toàn phần của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) và được kí hiệu là $\Delta f(x_0, y_0)$.

Định nghĩa 1.11. Hàm số $f(x, y)$ được gọi là khả vi tại điểm $(x_0, y_0) \in D$, nếu như số gia toàn phần của nó $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ tại điểm (x_0, y_0) được biểu diễn dưới dạng

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

ở đây $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Ý nghĩa. Hàm khả vi là hàm có sự xấp xỉ tuyến tính tốt khi điểm (x, y) gần điểm (x_0, y_0) .

Định lý 1.4. Nếu hàm $f(x, y)$ xác định trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại điểm (x_0, y_0) thì hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) .

Ví dụ 1.4.1. Chứng minh rằng, hàm $f(x, y) = xe^{xy}$ khả vi tại điểm $(1, 0)$ và tìm hàm tuyến tính hóa của nó tại điểm $(1, 0)$. Sử dụng sự xấp xỉ tuyến tính gần đúng $f(1.1, -0.1)$.

Giải. Các đạo hàm riêng cấp một là

$$f'_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}, f'_y(x, y) = x^2e^{xy} \Rightarrow f'_x(1, 0) = 1, f'_y(1, 0) = 1.$$

Cả f'_x, f'_y đều là những hàm liên tục nên f khả vi. Hàm tuyến tính hóa là

$$L(x, y) = f(1, 0) + f'_x(1, 0)(x - 1) + f'_y(1, 0)(y - 0) = 1 + 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot y = x + y.$$

Sự xấp xỉ tuyến tính là $f(x, y) = xe^{xy} \approx x + y \Rightarrow f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$, trong khi đó kết quả chính xác là $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$.

Ví dụ 1.4.2. Tìm hàm số $z = f(x, y)$ để tính gần đúng giá trị của biểu thức $\sqrt[3]{1.02^2 + 0.05^2}$.

Giải. Chọn hàm $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ và chọn $x = 1.02; y = 0.05; x_0 = 1; y_0 = 0; \Delta x = 0.02; \Delta y = 0.05$. Ta có $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$

Vì $f'_x(1, 0) = \frac{2}{3}$; $f'_y(1, 0) = 0$ nên $f(1.02, 0.05) = \sqrt[3]{1.02^2 + 0.05^2} \approx \sqrt[3]{1^2 + 0^2} + \frac{2}{3} \times 0.02 + 0 \times 0.05 \approx 1.013$.

1.4.2 Định nghĩa vi phân

Định nghĩa 1.12. Biểu thức $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) và được kí hiệu là $df(x_0, y_0)$.

Định lý 1.5. Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ và

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Chứng minh. Cho $f(x, y) = x$ ta được $f'_x = 1, f'_y = 0$ và

$$df = dx = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = 1 \cdot \Delta x.$$

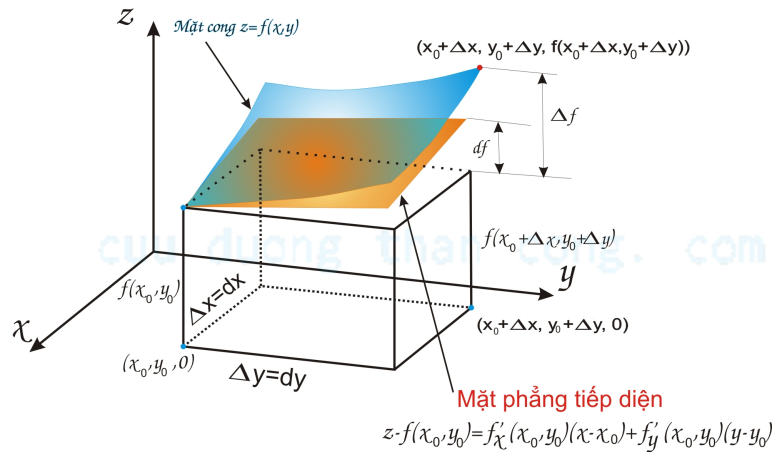
Cho $f(x, y) = y$ ta được $f'_x = 0, f'_y = 1$ và

$$df = dy = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = 1 \cdot \Delta y.$$

Vậy

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Ý nghĩa hình học của vi phân và số gia toàn phần: vi phân df biểu diễn sự thay đổi độ cao của mặt phẳng tiếp diện, còn số gia toàn phần Δf biểu diễn sự thay đổi độ cao của mặt cong $z = f(x, y)$ khi cho (x, y) thay đổi từ (x_0, y_0) đến $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.



Hình 1.7: Ý nghĩa hình học của vi phân và số gia toàn phần

Ví dụ 1.4.3. Cho $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$.

1. Tìm df
2. Cho x thay đổi từ 2 đến 2.05 và y thay đổi từ 3 đến 2.96, hãy so sánh giá trị của Δf và df .

Giải.

1. Theo công thức vi phân ta có

$$df = f'_x dx + f'_y dy = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy.$$

2. Cho $x_0 = 2, dx = \Delta x = 2.05 - 2 = 0.05, y_0 = 3, dy = \Delta y = 2.96 - 3 = -0.04$ ta được

$$df(x_0, y_0) = df(2, 3) = (2x_0 + 3y_0)dx + (3x_0 - 2y_0)dy = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3)0.05 + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 3)(-0.04) = 0.65.$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(2.05, 2.96) - f(2, 3) = [2.05^2 + 3 \times 2.05 \times 2.96 - 2.96^2] - [2^2 + 3 \times 2 \times 3 - 3^2] = 0.6449.$$

Như vậy $\Delta f \approx df$ nhưng df dễ dàng tính toán hơn.

1.4.3 Vi phân cấp cao

Vi phân cấp một của hàm $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) là $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$.

Vi phân cấp hai của hàm $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) là

$$\begin{aligned} d^2f(x_0, y_0) &= d(df(x_0, y_0)) = d(f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy) = \\ &= (f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy)'_x dx + (f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy)'_y dy = \\ &= f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + f''_{yx}(x_0, y_0)dydx + f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2 = \\ &= f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.13. **Vi phân cấp n** của hàm $f(x, y)$ tại (x_0, y_0) là $d^n f(x_0, y_0) = d(d^{n-1}f(x_0, y_0))$

Định lý 1.6. Với vi phân cấp $n \in \mathbb{N}$, luôn có công thức

$$d^n f = \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k.$$

Ví dụ 1.4.4. Tìm vi phân cấp hai của $f(x, y) = x^2y + y^3 + x^3 + \frac{y}{x}$ tại $x = 1, y = 2$.

Giải. $f'_x = 2xy + 3x^2 - \frac{y}{x^2}$, $f''_{xx} = 2y + 6x + \frac{2y}{x^3} \Rightarrow f''_{xx}(1, 2) = 14$, $f''_{xy} = 2x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''_{xy}(1, 2) = 1$.
 $f'_y = x^2 + 3y^2 + \frac{1}{x}$, $f''_{yy} = 6y \Rightarrow f''_{yy}(1, 2) = 12$.

Vậy $d^2f(1, 2) = 14dx^2 + 2dxdy + 12dy^2$

1.5 Đạo hàm của hàm hợp

1.5.1 Trường hợp: hàm số $z = f(x, y)$, trong đó $x = x(t), y = y(t)$ ($t \in (a, b)$)

Cho hàm số $z = f(x, y)$, trong đó $x = x(t), y = y(t)$ ($t \in (a, b)$). Khi đó nếu ta thay $x = x(t), y = y(t)$ thì thu được hàm $z = f(x(t), y(t)) = z(t)$ phụ thuộc vào biến t . Để tìm đạo hàm của hàm số $z(t)$ theo biến t ta sử dụng định lý sau:

Định lý 1.7. Cho hàm số $z = f(x, y)$ **khả vi** trên D , $x = x(t), y = y(t)$ ($t \in (a, b)$) là các hàm **khả vi** sao cho $(x(t), y(t)) \in D$. Khi đó **đạo hàm của hàm số z theo t** được tính theo công thức

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Chứng minh. Sự thay đổi Δt sẽ dẫn đến sự thay đổi Δx và Δy , từ đó dẫn đến sự thay đổi của Δz . Theo công thức số gia toàn phần, ta có

$$\Delta z = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y,$$

ở đây $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Chia hai vế của phương trình này cho Δt ta được

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Cho $\Delta t \rightarrow 0$, ta được $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) \rightarrow 0, \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) \rightarrow 0$, vì $x(t), y(t)$ là những **hàm khả vi nên liên tục**. Từ đó suy ra $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$. Như vậy,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \\ &= f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t) + 0 \cdot x'(t) + 0 \cdot y'(t) = f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Ví dụ 1.5.1. Cho $z = f(x, y) = x^2y + 3xy^4$ và $x = \sin 2t, y = \cos t$. Tính $\frac{dz}{dt}$ tại $t = 0$.

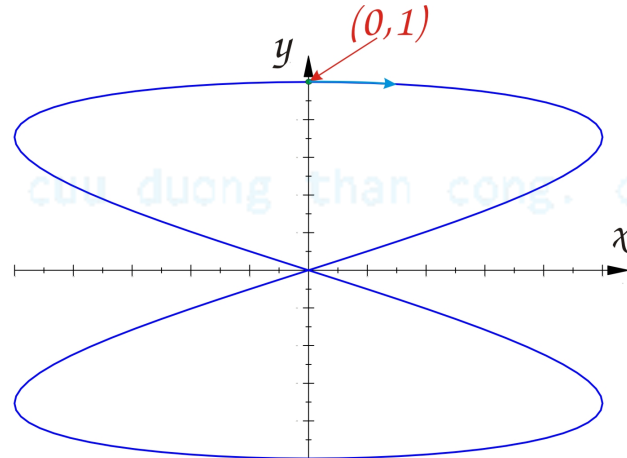
Giải. Ta có

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2xy + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t).$$

Khi $t = 0$ thì $x = \sin 0 = 0$ và $y = \cos 0 = 1$. Vậy

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\sin 0) = 6.$$

Ý nghĩa thực tiễn của đạo hàm $z'(t)$: là tốc độ thay đổi của z theo biến t khi điểm (x, y) di chuyển theo đường cong C được xác định bởi phương trình tham số $x = \sin 2t, y = \cos t$. Trong trường hợp $t = 0$, điểm (x, y) là $(0, 1)$ và $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 6$ là tốc độ thay tăng khi điểm (x, y) di chuyển dọc theo đường cong C qua điểm $(0, 1)$. Ví dụ, nếu $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ biểu diễn nhiệt độ tại điểm (x, y) trên bề mặt của một bếp điện lò xo, thì hàm $z = T(\sin 2t, \cos t)$ sẽ biểu diễn nhiệt độ tại những điểm thuộc đường cong C tức là tại những điểm trên lò xo và đạo hàm $\frac{dz}{dt}$ biểu diễn tốc độ thay đổi nhiệt độ dọc theo đường cong C . Từ đó, chúng ta sẽ biết được tốc độ thay đổi nhiệt độ tại những điểm trên lò xo từ khi cắm điện vào bếp.



Hình 1.8: Đường cong $x = \sin 2t, y = \cos t$.

Ví dụ 1.5.2. Áp suất p (kilopascal), thể tích V (lít) và nhiệt độ T (Kelvins) của một mol khí lý tưởng quan hệ với nhau bởi phương trình $pV = 8.31.T$. Hãy tìm **tốc độ thay đổi của áp suất** khi nhiệt độ là $300K$ và tăng với tốc độ $0.1K/s$ và thể tích là 100ℓ và tăng với tốc độ $0.2\ell/s$.

Giải. Hàm áp suất $p = f(T, V)$ phụ thuộc vào nhiệt độ và thể tích, còn hàm nhiệt độ và thể tích $T = T(t), V = V(t)$ phụ thuộc vào thời gian t . Theo giả thuyết bài toán, ta có

$$T = 300, \frac{dT}{dt} = 0.1, V = 100, \frac{dV}{dt} = 0.2.$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức

$$P = 8.31 \cdot \frac{T}{V}$$

ta được

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \frac{dV}{dt} = 8.31 \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{dT}{dt} - 8.31 \cdot \frac{T}{V^2} \cdot \frac{dV}{dt} = 8.31 \cdot \frac{1}{100} \cdot (0.1) - 8.31 \cdot \frac{300}{100^2} \cdot (0.2) = -0.04155.$$

Vậy áp suất sẽ giảm với tốc độ là $0.04155kPa/s$.

Ví dụ 1.5.3. Cho $f(x, y) = e^{xy}$ trong đó $y = \sin x$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{df}{dx}$.

Giải. Ta có $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = ye^{xy}$.

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = f'_x \cdot x'_x + f'_y \cdot y'_x = f'_x + f'_y \cdot y'(x) = ye^{xy} + xe^{xy} \cdot \cos x$$

Ví dụ 1.5.4. Cho $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ trong đó $y = \frac{1}{3}x^3 + x$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{df}{dx}$.

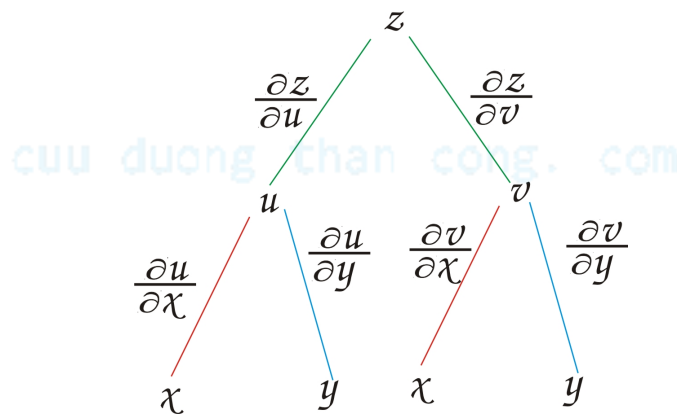
Giải. Ta có $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \frac{e^x}{e^x + e^y}$.

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = f'_x \cdot x'_x + f'_y \cdot y'_x = f'_x + f'_y \cdot y'(x) = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} \cdot (x^2 + 1)$$

1.5.2 Trường hợp: hàm số $z = f(u, v)$, trong đó $u = u(x, y), v = v(x, y)$

Định lý 1.8. Cho hàm số $z = f(u, v)$ có đạo hàm riêng liên tục trong một miền mở G , $u = u(x, y), v = v(x, y)$ là các hàm khả vi với 2 biến x, y . Khi đó đạo hàm riêng của hàm số z theo x, y được tính theo công thức

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$



Hình 1.9: Đạo hàm riêng của hàm số $z = f(u, v)$, trong đó $u = u(x, y), v = v(x, y)$

Như vậy, muốn tính đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}$ ta thực hiện theo đường màu xanh lá cây từ z xuống u, v và từ u, v theo đường màu đỏ xuống x và được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Tương tự, muốn tính đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial y}$ ta thực hiện theo đường màu xanh lá cây từ z xuống u, v và từ u, v theo đường màu xanh xuống y và được

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

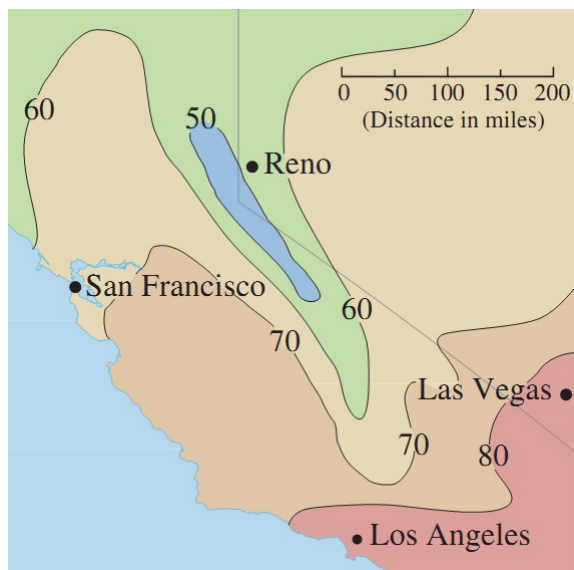
Ví dụ 1.5.5. Cho $f(u, v) = u^2v - uv^2$ và $u = x \cdot \sin y, v = y \cdot \cos x$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

Giải. Ta có $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = (2uv - v^2) \cdot \sin y + (u^2 - 2uv) \cdot y(-\sin x) = (2x \cdot \sin y \cdot y \cdot \cos x - y^2 \cdot \cos^2 x) \cdot \sin y - (x^2 \cdot \sin^2 y - 2x \cdot \sin y \cdot y \cdot \cos x) \cdot y \cdot \sin x$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = (2x \cdot \sin y \cdot y \cdot \cos x - y^2 \cdot \cos^2 x) \cdot x \cos y + (x^2 \cdot \sin^2 y - 2x \cdot \sin y \cdot y \cdot \cos x) \cdot \cos x.$$

1.6 Đạo hàm theo hướng

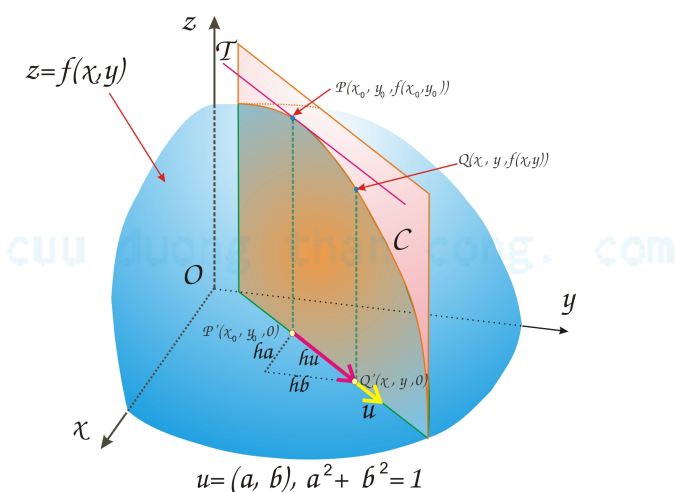
1.6.1 Bài toán thực tế



Hình 1.10: Đường đẳng trị của hàm nhiệt độ $T(x, y)$

Trên hình (1.6.1) biểu diễn đường đẳng trị của hàm nhiệt độ $T(x, y)$ tại bang California. Đạo hàm riêng T'_x tại điểm thành phố Reno cho ta biết tốc độ thay đổi nhiệt độ khi chúng ta di chuyển theo phương ngang, còn đạo hàm riêng T'_y biểu diễn tốc độ thay đổi nhiệt độ theo phương thẳng đứng. Nhưng nếu chúng ta cần biết tốc độ thay đổi nhiệt độ khi chúng ta di chuyển từ Reno đến Las Vegas thì phải tính như thế nào? Để tính được tốc độ thay đổi nhiệt độ theo một hướng nào đó, chúng ta sẽ tìm hiểu khái niệm **đạo hàm theo hướng**.

1.6.2 Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng



Hình 1.11: Ý nghĩa hình học của đạo hàm theo hướng

Giả sử chúng ta cần tìm tốc độ thay đổi của hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm (x_0, y_0) theo hướng của véc tơ đơn vị $\vec{u} = (a, b)$ ($a^2 + b^2 = 1$). Hàm số $z = f(x, y)$ có đồ thị là mặt cong S . Cho $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là một điểm nằm trên mặt cong S . Mặt phẳng thẳng đứng đi qua P theo hướng véc tơ $\vec{u}$ sẽ cắt mặt

cong S theo đường cong C . Hệ số góc tiếp tuyến T với đường cong C tại điểm P chính là tốc độ thay đổi của hàm số $z = f(x, y)$ theo hướng của véc tơ $\vec{u}$.

Ý nghĩa hình học: đạo hàm theo hướng là hệ số góc tiếp tuyến T với đường cong C tại điểm P .

Nếu $Q(x, y, f(x, y))$ là một điểm khác thuộc C và P', Q' lần lượt là hình chiếu của P, Q xuống mặt phẳng Oxy thì véc tơ $\overrightarrow{P'Q'}$ sẽ song song với véc tơ $\vec{u}$. Do đó

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\vec{u} = (ha, hb), \quad h \in \mathbb{R} \Rightarrow x - x_0 = ha, y - y_0 = hb \Rightarrow x = x_0 + ha, y = y_0 + hb.$$

Khi đó

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Lấy giới hạn khi $h \rightarrow 0$ ta được tốc độ thay đổi giá trị của hàm $z = f(x, y)$ theo hướng của véc tơ $\vec{u}$ và ta gọi đó là **đạo hàm của hàm số $z = f(x, y)$ theo hướng của véc tơ $\vec{u}$** .

1.6.3 Định nghĩa đạo hàm theo hướng

Định nghĩa 1.14. Đạo hàm theo hướng véc-tơ đơn vị $\vec{u} = (a, b)$, $(a^2 + b^2 = 1)$ của hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ là giới hạn

$$f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Chú ý. Nếu $u = (1, 0)$ thì $f'_{\vec{u}} = f'_x$, còn nếu $u = (0, 1)$ thì $f'_{\vec{u}} = f'_y$.

Khi tính đạo hàm theo hướng, chúng ta sử dụng công thức trong định lý sau:

Định lý 1.9. Cho $f(x, y)$ là hàm khả vi và có đạo hàm theo hướng của véc-tơ đơn vị $u = (a, b)$, $(a^2 + b^2 = 1)$. Khi đó

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = f'_x(x, y).a + f'_y(x, y).b.$$

Chứng minh. Đặt

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb),$$

khi đó theo định nghĩa đạo hàm theo hướng, ta có

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = f'_{\vec{u}}(x_0, y_0)$$

Mặt khác, do $x = x_0 + ha, y = y_0 + hb$, nên theo công thức đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dh} = f'_x(x, y).a + f'_y(x, y).b$$

Cho $h = 0$ ta được $x = x_0, y = y_0$ và

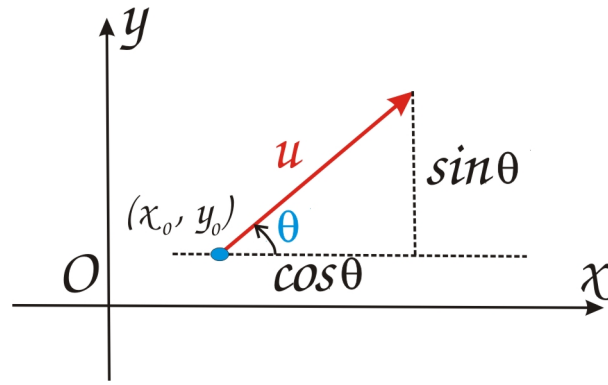
$$g'(0) = f'_x(x_0, y_0).a + f'_y(x_0, y_0).b$$

Như vậy, $f'_{\vec{u}}(x, y) = f'_x(x, y).a + f'_y(x, y).b$. ■

Ví dụ 1.6.1. Tìm đạo hàm theo hướng của véc-tơ đơn vị $\vec{u}$ tạo với tia Ox góc $\theta = \frac{\pi}{6}$ tại điểm $(1, 2)$ của hàm số $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 3y, f'_y = -3x + 8y \Rightarrow f'_{\vec{u}}(1, 2) = f'_x(1, 2) \cos \frac{\pi}{6} + f'_y(1, 2) \sin \frac{\pi}{6} = \\ &= (3.1^2 - 3.2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3.1 + 8.2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Hình 1.12: Véc tơ đơn vị u

1.6.4 Véc-tơ Gradient

Định nghĩa 1.15. Cho $z = f(x, y)$. Khi đó **véc-tơ gradient** của hàm số f được xác định như sau

$$\nabla f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

Ví dụ 1.6.2. Cho $f(x, y) = \sin x + e^{xy}$. Tìm véc-tơ gradient $\nabla f(0, 1)$.

Giải. Ta có $f'_x = \cos x + ye^{xy}$, $f'_y = xe^{xy} \Rightarrow \nabla f(0, 1) = (f'_x(0, 1), f'_y(0, 1)) = (2, 0)$. Theo công thức tính đạo hàm theo hướng, ta có định lý sau:

Định lý 1.10. Cho $z = f(x, y)$, $u = (a, b)$, $(a^2 + b^2 = 1)$. Khi đó

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = \langle \nabla f(x, y), u \rangle.$$

Ví dụ 1.6.3. Tìm đạo hàm theo hướng véc-tơ $v = (2, 5)$ của hàm số $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ tại điểm $(2, -1)$.

Giải. Ta có $f'_x = 2xy^3$, $f'_y = 3x^2y^2 - 4 \Rightarrow \nabla f(2, -1) = (f'_x(2, -1), f'_y(2, -1)) = (-4, 8)$.

$$u = \left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + 5^2}}, \frac{5}{\sqrt{2^2 + 5^2}} \right) \Rightarrow f'_v(2, -1) = \langle \nabla f(2, -1), u \rangle = \frac{32}{\sqrt{29}}.$$

Tương tự, ta có thể mở rộng cho trường hợp hàm ba biến.

Định nghĩa 1.16. Cho hàm ba biến $f(x, y, z)$. Khi đó **véc-tơ gradient** của hàm số f được xác định như sau

$$\nabla f(x, y, z) = (f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)).$$

Định lý 1.11. Cho $f(x, y, z)$, $u = (a, b, c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$. Khi đó

$$f'_{\vec{u}}(x, y, z) = \langle \nabla f(x, y, z), u \rangle.$$

Ví dụ 1.6.4. Tìm đạo hàm theo hướng véc-tơ $v = (1, 2, -1)$ của hàm số $f(x, y, z) = x \sin yz$ tại điểm $(1, 3, 0)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f'_x &= \sin yz, f'_y = xz \cos yz, f'_z = xy \cos yz \\ \Rightarrow \nabla f(1, 3, 0) &= (f'_x(1, 3, 0), f'_y(1, 3, 0), f'_z(1, 3, 0)) = (0, 0, 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}}, \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right) \\ \Rightarrow f'_v(1, 3, 0) &= \langle \nabla f(1, 3, 0), u \rangle = -\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

1.6.5 Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng

Giả sử, chúng ta có hàm f hai biến hoặc ba biến và trong mọi hướng đều tính được đạo hàm của f tại một điểm cho trước. Điều này có nghĩa là chúng ta sẽ biết được tốc độ thay đổi của f theo mọi hướng. Như vậy, theo hướng nào hàm số f thay đổi nhanh nhất (hoặc chậm nhất)? Để trả lời câu hỏi này, ta sử dụng định lý sau:

Định lý 1.12. Cho f là hàm khả vi hai biến hoặc ba biến. Giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng véc-tơ đơn vị $u : f'_{\vec{u}}$ là $|\nabla f|$ đạt được khi $\vec{u} \uparrow \nabla f$. Giá trị nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng véc-tơ đơn vị $u : f'_{\vec{u}}$ là $-|\nabla f|$ đạt được khi $\vec{u}$ cùng phương và ngược chiều ∇f .

Chứng minh. Theo công thức tính đạo hàm theo hướng, ta có

$$f'_{\vec{u}} = \langle \nabla f, u \rangle = |\nabla f| \cdot |u| \cdot \cos \theta = |\nabla f| \cdot \cos \theta,$$

trong đó θ là góc giữa hai véc tơ $\nabla f, u$. Giá trị lớn nhất của $\cos \theta$ là 1, đạt được khi $\theta = 0$, giá trị nhỏ nhất của $\cos \theta$ là -1 , đạt được khi $\theta = \pi$. Do đó, giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng véc-tơ đơn vị $u : f'_{\vec{u}}$ là $|\nabla f|$ đạt được khi $\vec{u} \uparrow \nabla f$, giá trị nhỏ nhất của đạo hàm theo hướng véc-tơ đơn vị $u : f'_{\vec{u}}$ là $-|\nabla f|$ đạt được khi $\vec{u}$ cùng phương và ngược chiều ∇f .

Ví dụ 1.6.5. Cho $f(x, y) = xe^y$.

1. Tìm đạo hàm theo hướng véc tơ $\overrightarrow{PQ}$ tại điểm $P(2, 0)$ với $Q(\frac{1}{2}, 2)$.
2. Theo hướng nào đạo hàm theo hướng của f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $P(2, 0)$. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải. Ta có

$$1. \overrightarrow{PQ} = (-\frac{3}{2}, 2) \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{-3/2}{5/2}, \frac{2}{5/2} \right).$$

$$f'_x = e^y, f'_y = xe^y \Rightarrow \nabla f(2, 0) = (f'_x(2, 0), f'_y(2, 0)) = (1, 2)$$

$$\text{Vậy } f'_{\vec{u}}(2, 0) = 1.$$

2. Đạo hàm theo hướng của f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $P(2, 0)$ khi $\vec{v} \uparrow \nabla f(2, 0) = (1, 2)$.

$$\text{Giá trị lớn nhất là } |\nabla f(2, 0)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Ví dụ 1.6.6. Cho $f(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$. Theo hướng nào đạo hàm theo hướng của f đạt giá trị lớn nhất tại $(1, 1, -2)$. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải. Ta có

$$f'_x = -\frac{80(2x)}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}, f'_y = -\frac{80(4y)}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}, f'_z = -\frac{80(6z)}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}$$

$$\Rightarrow \nabla f(1, 1, -2) = (f'_x(1, 1, -2), f'_y(1, 1, -2), f'_z(1, 1, -2)) = \left(-\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{15}{4} \right)$$

$$\text{Đạo hàm theo hướng của } f \text{ đạt giá trị lớn nhất tại điểm } (1, 1, -2) \text{ khi } \vec{v} \uparrow \nabla f(1, 1, -2) = \left(-\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{15}{4} \right).$$

$$\text{Giá trị lớn nhất là } |\nabla f(1, 1, -2)| = \frac{5}{8}\sqrt{41}.$$

1.7 Đạo hàm của hàm ẩn

1.7.1 Đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi $F(x, y) = 0$

Giả sử phương trình $F(x, y) = 0$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$, có nghĩa là $F(x, y(x)) = 0$. Nếu F là **hàm khả vi** thì chúng ta có thể áp dụng quy tắc đạo hàm của hàm hợp, lấy đạo hàm hai vế của phương trình $F(x, y) = 0$ theo biến x ta sẽ thu được

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Nếu $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ ta có

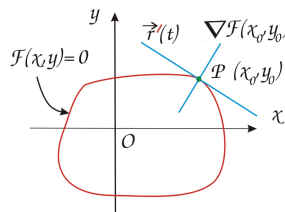
$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Ví dụ 1.7.1. Tính $y'(0)$ nếu $y \sin x - \cos(x - y) = 0$ với giả thiết $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Giải. Ta có $F(x, y) = y \sin x - \cos(x - y)$. Theo công thức tính đạo hàm của hàm ẩn ta có

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin x - \sin(x - y)}. \Rightarrow y'(0) = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{1} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

1.7.2 Phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến với đường cong $y = y(x)$ được xác định bởi $F(x, y) = 0$



Hình 1.13: Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong $y = y(x)$ được xác định bởi $F(x, y) = 0$

Giả sử C là đường cong của hàm số $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$, cho $P(x_0, y_0)$ là một điểm trên đường cong C .

Như vậy, C được xác định bởi hàm véc tơ liên tục $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Giả sử t_0 là điểm sao cho $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0) = P$.

Vì C là đường cong của hàm số $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$ nên $F(x(t), y(t)) = 0$. Nếu $x(t), y(t)$ là **những hàm khả vi theo biến t** và F là hàm khả vi thì theo quy tắc lấy **đạo hàm của hàm hợp**, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

Vì $\nabla F = (F'_x, F'_y)$ và $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$, nên $\langle \nabla F, \vec{r}'(t) \rangle = 0$

Khi $t = t_0$ ta được $\langle \nabla F(x_0, y_0), \vec{r}'(t_0) \rangle = 0$. Điều này có nghĩa là, véc tơ gradient $\nabla F(x_0, y_0) = (F'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0))$ tại điểm $P = (x_0, y_0)$ sẽ **vuông góc** với véc tơ tiếp tuyến $\vec{r}'(t_0)$ của đường cong C đi qua P .

Vậy nếu $\nabla F(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ thì ta luôn xác định được **tiếp tuyến với đường cong $y = y(x)$ được xác định bởi $F(x, y) = 0$** . Vì $\nabla F(x_0, y_0)$ vuông góc tiếp tuyến tại điểm P nên $\nabla F(x_0, y_0)$ được gọi là **pháp véc tơ** với đường cong C tại P .

Định lý 1.13. Cho đường cong C được xác định bởi $F(x, y) = 0$, $P(x_0, y_0) \in C$. Khi đó **phương trình tiếp tuyến** với đường cong C tại điểm P là

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

Định lý 1.14. **Pháp tuyến** với đường cong C tại điểm P là đường thẳng vuông góc với tiếp tuyến và được xác định như sau

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Chú ý. Trong trường hợp đặc biệt khi đường cong C được xác định bởi $y = y(x)$ thì $F(x, y) = y(x) - y = 0$ và

$$F'_x(x_0, y_0) = y'(x_0), F'_y(x_0, y_0) = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến lúc này sẽ là

$$y'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0 \Leftrightarrow y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Đây cũng chính là phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = y(x)$.

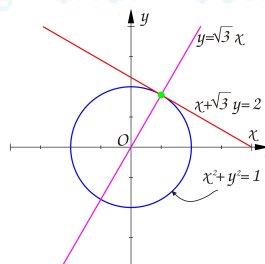
Ví dụ 1.7.2. Tìm phương trình tiếp tuyến, phương trình pháp tuyến tại điểm $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ với đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

Giải. Ta có $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow F'_x = 2x, F'_y = 2y \Rightarrow F'_x\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1, F'_y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$.

1. Phương trình tiếp tuyến

$$F'_x\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + F'_y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y = 2.$$

2. Phương trình pháp tuyến $\frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}$.



Hình 1.14: Phương trình tiếp tuyến, phương trình pháp tuyến tại điểm $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ với đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

1.7.3 Đạo hàm riêng của hàm ẩn xác định bởi $F(x, y, z) = 0$

Định lý 1.15. Cho hàm $F(x, y, z)$ thỏa mãn các điều kiện:

1. $F(x, y, z)$ xác định và liên tục trong hình cầu chứa điểm (x_0, y_0, z_0) ;
2. F'_x, F'_y, F'_z tồn tại và liên tục trong hình cầu chứa điểm (x_0, y_0, z_0) ;
3. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;
4. $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Khi đó phương trình $F(x, y, z) = 0$ xác định một hàm ẩn $z = f(x, y)$, sao cho $f(x_0, y_0) = z_0$ và $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Hàm $z = f(x, y)$ có đạo hàm riêng

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ví dụ 1.7.3. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ nếu $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

Giải. Cho $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$, ta được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

Ví dụ 1.7.4. Tính $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ nếu $u = \frac{x+z}{y+z}$ trong đó $z = z(x, y)$ được xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

Giải. Theo công thức hàm hợp, ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x + u'_z \cdot z'_x = \frac{1}{y+z} + \frac{y-x}{(y+z)^2} \cdot z'_x.$$

Trong đó $z(x, y)$ là hàm ẩn được xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$ nên khi đặt $F(x, y, z) = ze^z - xe^x - ye^y$ ta có

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{e^x + xe^x}{e^z + ze^z} = \frac{1+x}{1+z} \cdot e^{x-z}.$$

Như vậy,

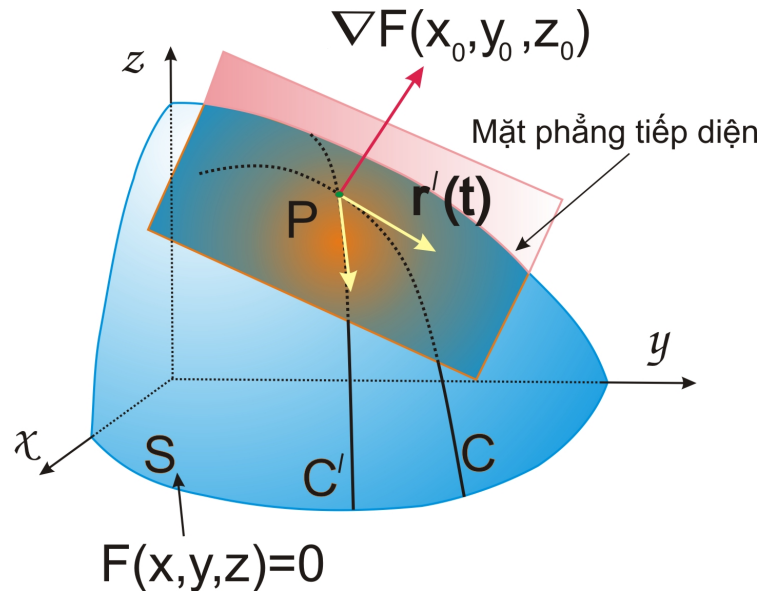
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} + \frac{y-x}{(y+z)^2} \cdot \frac{1+x}{1+z} \cdot e^{x-z}.$$

Tương tự, ta tính được

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{y-x}{(y+z)^2} \cdot \frac{1+y}{1+z} \cdot e^{y-z}.$$

1.7.4 Mặt phẳng tiếp diện và phương trình pháp tuyến với mặt cong $z = f(x, y)$ được xác định bởi $F(x, y, z) = 0$

Giả sử S là mặt cong của hàm số $z = f(x, y)$ được xác định bởi phương trình $F(x, y, z) = 0$, cho $P(x_0, y_0, z_0)$ là một điểm trên mặt cong S . Cho C là đường cong bất kỳ thuộc mặt cong S và đi qua P



Hình 1.15: Mặt phẳng tiếp diện với mặt cong $z = f(x, y)$ được xác định bởi $F(x, y, z) = 0$

Như vậy, C được xác định bởi hàm véc tơ liên tục $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Giả sử t_0 là điểm sao cho $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0) = P$.

Vì C thuộc mặt cong S nên $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Nếu $x(t), y(t), z(t)$ là **những hàm khả vi theo biến t** và F là hàm khả vi thì theo quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

Vì $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$ và $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, nên $\langle \nabla F, \vec{r}'(t) \rangle = 0$

Khi $t = t_0$ ta được $\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), \vec{r}'(t_0) \rangle = 0$. Điều này có nghĩa là, véc tơ gradient $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$ tại điểm $P = (x_0, y_0, z_0)$ sẽ **vuông góc** với véc tơ tiếp tuyến $\vec{r}'(t_0)$ của mọi đường cong C đi qua P . Do đó, nếu C' cũng là đường cong bất kỳ khác C , đi qua điểm P và thuộc mặt cong S thì $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ cũng vuông góc với tiếp tuyến của đường cong C' tại P .

Vậy nếu $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ thì ta luôn xác định được **mặt phẳng tiếp diện với mặt cong $z = f(x, y)$ được xác định bởi $F(x, y, z) = 0$** . Vì $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ vuông góc các tiếp tuyến nên vuông góc với mặt phẳng tiếp diện với mặt cong S tại điểm P . Do đó, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ được gọi là **pháp véc tơ** của mặt phẳng tiếp diện.

Định lý 1.16. Cho mặt cong S được xác định bởi $F(x, y, z) = 0$, $P(x_0, y_0, z_0)$. Khi đó **phương trình mặt phẳng tiếp diện** với mặt cong S tại điểm P là

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Định lý 1.17. **Pháp tuyến** với mặt cong S tại điểm P là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tiếp diện và được xác định như sau

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Chú ý. Trong trường hợp đặc biệt khi mặt cong S được xác định bởi $z = f(x, y)$ thì $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ và

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0, z_0) = f'_y(x_0, y_0), F'_z(x_0, y_0, z_0) = -1.$$

Phương trình mặt phẳng tiếp diện lúc này sẽ là

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Đây cũng chính là phương trình mặt phẳng tiếp diện của mặt cong $z = f(x, y)$ được nêu ở phần trên.

Ví dụ 1.7.5. Tìm phương trình mặt phẳng tiếp diện, phương trình pháp tuyến tại điểm $(-2, 1, -3)$ với ellipsoid

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3.$$

Giải. Ta có $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3 \Rightarrow F'_x = \frac{x}{2}, F'_y = 2y, F'_z = \frac{2z}{9}$
 $\Rightarrow F'_x(-2, 1, -3) = -1, F'_y(-2, 1, -3) = 2, F'_z(-2, 1, -3) = -\frac{2}{3}.$

1. Phương trình mặt phẳng tiếp diện

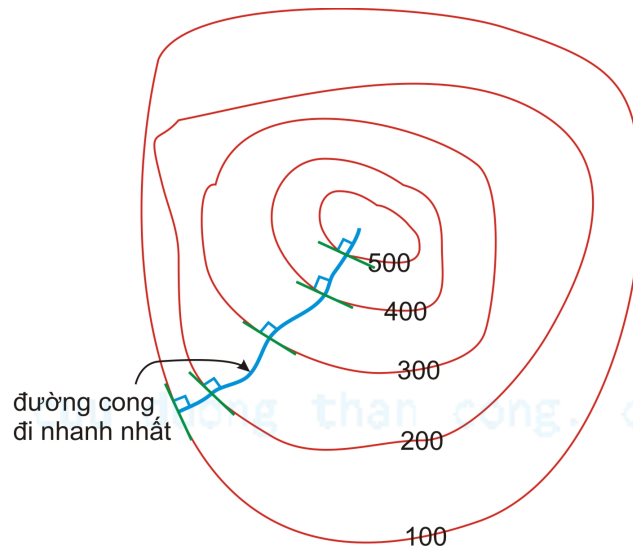
$$F'_x(-2, 1, -3)(x + 2) + F'_y(-2, 1, -3)(y - 1) + F'_z(-2, 1, -3)(z + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6y + 2z + 18 = 0.$$

2. Phương trình pháp tuyến $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-\frac{2}{3}}$

1.7.5 Bài toán thực tế ứng dụng véc tơ gradient

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ biểu diễn độ cao của một ngọn núi so với mực nước biển. Một vận động viên leo núi muốn đi từ chân núi lên đến đỉnh núi với vận tốc không đổi. **Đi theo hướng nào thì vận động viên leo được lên núi nhanh nhất?**



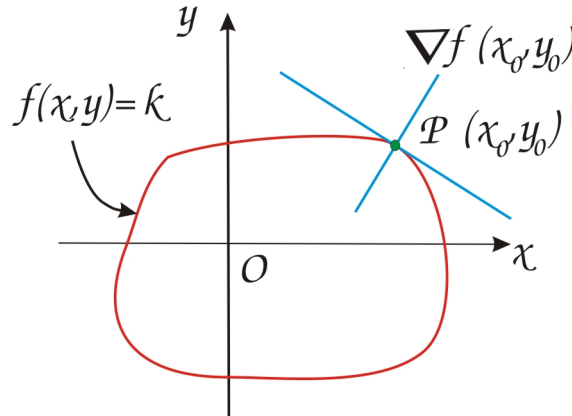
Hình 1.16: Đường đẳng trị biểu diễn độ cao của ngọn núi

Theo yêu cầu bài toán, chúng ta phải tìm **hướng** $\vec{u}$ mà tốc độ thay đổi độ cao z là nhanh nhất, có nghĩa là đạo hàm của $z = f(x, y)$ theo hướng đó đạt giá trị lớn nhất. Mà giá trị lớn nhất của đạo hàm theo hướng là $|\nabla f|$, đạt được khi $\vec{u} \uparrow \nabla f$. Do đó, ta sẽ đi tìm hướng của ∇f .

Cho $f(x, y) = k$ là đường đẳng trị của hàm số $z = f(x, y)$, $P(x_0, y_0)$. Đặt $F(x, y) = f(x, y) - k = 0$. Ta có $\nabla F(x_0, y_0) = (F'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0)) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) = \nabla f(x_0, y_0)$. Do đó, theo công

thức của pháp véc tơ với đường cong $F(x, y) = 0$ tại điểm $P(x_0, y_0)$, ta được $\nabla f(x_0, y_0)$ sẽ vuông góc tiếp tuyến với đường đẳng trị $f(x, y) = k$ tại điểm P .

Vậy để vận động viên leo được lên núi nhanh nhất thì phải đi theo hướng của véc tơ gradient ∇f , có nghĩa là hướng vuông góc tiếp tuyến với đường đẳng trị $f(x, y) = k$ tại điểm $P(x_0, y_0)$.



Hình 1.17: Véc tơ gradient vuông góc với tiếp tuyến của đường đẳng trị

1.8 Công thức Taylor và ứng dụng

1.8.1 Công thức Taylor

Giả sử hàm $f(x, y)$ có đạo hàm riêng liên tục đến cấp $(n+1)$ trong lân cận của điểm (x_0, y_0) . Khi đó trong lân cận của (x_0, y_0) luôn có công thức

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) + R_n(\Delta x, \Delta y),$$

trong đó $R_n(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \alpha\Delta x, y_0 + \alpha\Delta y)$, $(\alpha \in (0, 1))$ được gọi là phần dư Lagrange. Phần dư này có thể viết dưới dạng Peano như sau $R_n = o(\rho^n)$ với $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Ví dụ 1.8.1. Khai triển hàm $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ theo công thức Taylor ở lân cận điểm $(2, 1)$.

Giải. Ta có $f(x, y) = f(2, 1) + df(2, 1) + \frac{d^2f(2, 1)}{2!} + \frac{d^3f(2, 1)}{3!} + o(\rho^3) = f(2, 1) + f'_x(2, 1)(x-2) + f'_y(2, 1)(y-1) + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(2, 1)(x-2)^2 + 2f''_{xy}(2, 1)(x-2)(y-1) + f''_{yy}(2, 1)(y-1)^2] + \frac{1}{3!} [f'''_{xxx}(2, 1)(x-2)^3 + 3f'''_{xxy}(2, 1)(x-2)^2(y-1) + 3f'''_{xyy}(2, 1)(x-2)(y-1)^2 + f'''_{yyy}(2, 1)(y-1)^3] + o(\rho^3)$

Vậy $f(x, y) = 8 + (x-2) + 5(y-1) + (x-2)^2 - (x-2)(y-1) + (y-1)^2 + (x-2)^3 + o(\rho^3)$

Ví dụ 1.8.2. Tìm khai triển Taylor trong lân cận của điểm $(1, 1)$ đến cấp 2, của hàm $z = f(x, y)$ được xác định bởi phương trình $z^3 - 2xz + y = 0$, biết $f(1, 1) = 1$.

Giải. Vì phân cấp một của $z = f(x, y)$ tại điểm $(1, 1)$ là

$$df(1, 1) = f'_x(1, 1)dx + f'_y(1, 1)dy = f'_x(1, 1)(x-1) + f'_y(1, 1)(y-1),$$

trong đó $z = f(x, y)$ là hàm ẩn được xác định bởi phương trình $F(x, y, z) = z^3 - 2xz + y = 0$ nên $f'_x = z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-2z}{3z^2 - 2x} = \frac{2z}{3z^2 - 2x}$, $f'_y = z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{3z^2 - 2x}$, từ đó suy ra

$$f'_x(1, 1) = \frac{2.1}{3.1^2 - 2.1} = 2, f'_y(1, 1) = -\frac{1}{3.1^2 - 2.1} = -1.$$

Vi phân cấp hai của $z = f(x, y)$ tại điểm $(1, 1)$ là

$$\begin{aligned} d^2 f(1, 1) &= f''_{xx}(1, 1)dx^2 + 2f''_{xy}(1, 1)dx dy + f''_{yy}(1, 1)dy^2 = \\ &= f''_{xx}(1, 1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1, 1)(x-1)(y-1) + f''_{yy}(1, 1)(y-1)^2, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= (f'_x)'_x = \left(\frac{2z}{3z^2 - 2x} \right)'_x = \frac{2z'_x(3z^2 - 2x) - 2z(6z \cdot z'_x - 2)}{(3z^2 - 2x)^2}, \\ f''_{xy} &= (f'_x)'_y = \left(\frac{2z}{3z^2 - 2x} \right)'_y = \frac{2z'_y(3z^2 - 2x) - 2z(6z \cdot z'_y)}{(3z^2 - 2x)^2}, \\ f''_{yy} &= (f'_y)'_y = \left(-\frac{1}{3z^2 - 2x} \right)'_y = \frac{6z \cdot z'_y}{(3z^2 - 2x)^2}, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$\begin{aligned} f''_{xx}(1, 1) &= \frac{2 \cdot 2(3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1) - 2 \cdot 1(6 \cdot 1 \cdot 2 - 2)}{(3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1)^2} = -16, \\ f''_{xy}(1, 1) &= \frac{2 \cdot (-1)(3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1) - 2 \cdot 1(6 \cdot 1 \cdot (-1))}{(3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1)^2} = 10, \\ f''_{yy}(1, 1) &= \frac{6 \cdot 1 \cdot (-1)}{(3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1)^2} = -6 \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 1) + df(1, 1) + \frac{d^2 f(1, 1)}{2!} + o(\rho^2) = \\ &= 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + o(\rho^2). \end{aligned}$$

1.8.2 Công thức Maclaurin

Nếu công thức Taylor khai triển tại điểm $(x_0, y_0) = (0, 0)$ thì được gọi là công thức Maclaurin.

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}df(0, 0) + \frac{1}{2!}d^2 f(0, 0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(0, 0) + o(\rho^n).$$

Ví dụ 1.8.3. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x, y) = \sin x \sinh 2y$ đến số hạng bậc 5.

Giải.

Cách 1. Ta có $f(x, y) = f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{d^2 f(0, 0)}{2!} + \frac{d^3 f(0, 0)}{3!} + \frac{d^4 f(0, 0)}{4!} + \frac{d^5 f(0, 0)}{5!} + o(\rho^5)$

$$\begin{aligned} &= f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(0, 0)x^2 + 2f''_{xy}(0, 0)xy + f''_{yy}(0, 0)y^2] + \frac{1}{3!} [f'''_{xxx}(0, 0)x^3 + \\ &+ 3f'''_{xxy}(0, 0)x^2y + 3f'''_{xyy}(0, 0)xy^2 + f'''_{yyy}(0, 0)y^3] + \frac{1}{4!} [f^{(4)}_{xxxx}(0, 0)x^4 + 4f^{(4)}_{xxxxy}(0, 0)x^3y + 6f^{(4)}_{xxxyy}(0, 0)x^2y^2 + \\ &+ 4f^{(4)}_{xyyyy}(0, 0)xy^3 + f^{(4)}_{yyyyy}(0, 0)y^4] + \frac{1}{5!} [f^{(5)}_{xxxxx}(0, 0)x^5 + 5f^{(5)}_{xxxxy}(0, 0)x^4y + 10f^{(5)}_{xxxyy}(0, 0)x^3y^2 + \\ &+ 10f^{(5)}_{xyyyy}(0, 0)x^2y^3 + 5f^{(5)}_{xyyyy}(0, 0)xy^4 + f^{(5)}_{yyyyy}(0, 0)y^5] + o(\rho^5) = 2xy - \frac{1}{3}x^3y + \frac{4}{3}xy^3 + o(\rho^5). \end{aligned}$$

Cách 2. Sử dụng công thức **khai triển Maclaurin của hàm một biến** đối với hàm $\sin x$ và $\sinh 2y$ đến cấp 5. Sau đó **rút gọn và loại bỏ những phần tử có bậc lớn hơn 5**, ta được

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \cdot \left(2y + \frac{(2y)^3}{3!} + \frac{(2y)^5}{5!} + o(y^5) \right) = \\ &= 2xy - \frac{1}{3}x^3y + \frac{2x^5y}{5!} + \frac{4}{3}xy^3 - \frac{4x^3y^3}{3 \cdot 3!} + \frac{4x^5y^3}{3 \cdot 5!} + \frac{x(2y)^5}{5!} - \frac{x^3(2y)^5}{3! \cdot 5!} + \frac{x^5(2y)^5}{5! \cdot 5!} + o(\rho^5) = \\ &= 2xy - \frac{1}{3}x^3y + \frac{4}{3}xy^3 + o(\rho^5). \end{aligned}$$

1.8.3 Khai triển Taylor bằng cách sử dụng khai triển Maclaurin của hàm một biến

Tìm khai triển Taylor bằng công thức rất mất thời gian, nên trong đa số trường hợp ta sử dụng cách sau:

1. Đặt $X = x - x_0, Y = y - y_0$
2. Tìm khai triển Maclaurin của hàm $f(X, Y)$ bằng việc **khai triển Maclaurin của hàm một biến**
3. Đổi $f(X, Y)$ sang $f(x, y)$
4. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần của các bậc của $x - x_0, y - y_0$.

Ví dụ 1.8.4. Tìm khai triển Taylor của hàm $z = f(x, y) = e^{x+y}$ ở lân cận của điểm $(1, -1)$ đến số hạng bậc 3.

Giải.

Cách 1.

1. Đặt $X = x - 1, Y = y + 1$
2. Tìm khai triển Maclaurin của hàm $f(X, Y)$ bằng việc khai triển Maclaurin của hàm một biến

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= e^{X+1+Y-1} = e^X \cdot e^Y = \left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + o(X^3)\right) \cdot \left(1 + Y + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + o(Y^3)\right) = \\ &= 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + Y + XY + \frac{X^2Y}{2!} + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^2X}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + o(\rho^3). \end{aligned}$$

3. Đổi $f(X, Y)$ sang $f(x, y)$ ta được

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + (y+1) + (x-1)(y+1) + \frac{(x-1)^2(y+1)}{2!} + \frac{(y+1)^2}{2!} + \\ &\quad + \frac{(y+1)^2(x-1)}{2!} + \frac{(y+1)^3}{3!} + o(\rho^3). \end{aligned}$$

4. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần của các bậc của $x - 1, y + 1$, ta được

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + (x-1) + (y+1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + (x-1)(y+1) + \frac{(y+1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^2(y+1)}{2!} + \\ &\quad + \frac{(y+1)^2(x-1)}{2!} + \frac{(y+1)^3}{3!} + o(\rho^3). \end{aligned}$$

Cách 2. Đặt $X = x - 1, Y = y + 1$. Tìm khai triển Maclaurin của hàm $f(X, Y)$ bằng việc khai triển Maclaurin của hàm một biến

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= e^{X+1+Y-1} = e^{X+Y} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(\rho^3) = \\ &= 1 + X + Y + \frac{X^2}{2!} + XY + \frac{Y^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^2Y}{2!} + \frac{Y^2X}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + o(\rho^3). \end{aligned}$$

Đổi $f(X, Y)$ sang $f(x, y)$ ta được

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + (x-1) + (y+1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + (x-1)(y+1) + \frac{(y+1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \\ &\quad + \frac{(x-1)^2(y+1)}{2!} + \frac{(y+1)^2(x-1)}{2!} + \frac{(y+1)^3}{3!} + o(\rho^3). \end{aligned}$$

1.9 Thực hành MatLab

1.9.1 Tính giá trị của hàm hai biến

Tính giá trị của hàm số $z = f(x, y)$ tại điểm (a, b)

1. `subs(z, {x, y}, {a, b})`
2. `subs(z, [x, y], [a, b])`

1.9.2 Tính đạo hàm riêng

Cho hàm số $z = f(x, y)$. Muốn tính toán hình thức với những biến hình thức thì ta phải khai báo `syms x y`

1. `diff(f, x)` - tính đạo hàm riêng f'_x
2. `diff(f, y)` - tính đạo hàm riêng f'_y
3. `diff(f, x, 2)` - tính đạo hàm riêng cấp hai f''_{xx}
4. `diff(f, y, 2)` - tính đạo hàm riêng cấp hai f''_{yy}
5. `diff(diff(f, x), y)` - tính đạo hàm riêng cấp hai f''_{xy}

1.9.3 Tính véc tơ gradient

Muốn tính toán hình thức với những biến hình thức thì ta phải khai báo `syms x y` (đối với hàm hai biến) hoặc `syms x y z` (đối với hàm ba biến)

1. Nếu $z = f(x, y)$ thì véc tơ gradient của f là $\text{nabla} = \text{gradient}(f, [x, y])$, và véc tơ gradient của f tại điểm (x_0, y_0) là `subs(nabla, [x, y], [x0, y0])`.
2. Nếu $u = f(x, y, z)$ thì véc tơ gradient của f là $\text{nabla} = \text{gradient}(f, [x, y, z])$ và véc tơ gradient của f tại điểm (x_0, y_0, z_0) là `subs(nabla, [x, y, z], [x0, y0, z0])`.

Ví dụ: `syms x y`

» `f = x^2 + y^3`

» `nabla=gradient(f,[x,y])`

`nabla =`

`2 * x`

`3 * y^2`

» `subs(nabla,[x,y],[1,2])`

`ans =`

`2`

`12`

1.10 Bài tập

1.10.1 Tìm đạo hàm riêng của hàm $z = f(x, y)$

Bài tập 1.10.1. Tìm đạo hàm riêng cấp một z'_x, z'_y

1. $z = x^3 + 3x^2y + e^{xy}$

2. $z = \cos^3(x^2 + 2y)$

3. $z = \ln\left(3 + \frac{y}{x}\right)$

4. $z = e^y(\cos x + y \sin x)$

5. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $z = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$

Bài tập 1.10.2. Tìm đạo hàm riêng cấp một tại điểm cho trước

1. $z = (x + 2y)^y$ tại $x = 1, y = 2$

Bài tập 1.10.3. Tìm các đạo hàm riêng cấp hai

1. $z = xe^{xy}$

2. $z = \cos(e^{2y} - 2x)$

Bài tập 1.10.4. Tìm đạo hàm riêng cấp hai tại điểm cho trước

1. $z = \frac{2x + 3y}{x + y}$ tại $x = 1, y = 1$

2. $z = (x + 2y)e^{x+y}$ tại $x = 2, y = 0$

3. $z = \arctan \frac{2x}{y}$ tại $x = 1, y = 1$

4. $z = \frac{e^{xy}}{x}$ tại $x = 2, y = 1$

5. $z = \arctan\left(\frac{x}{y} + y\right)$ tại $x = 0, y = -1$.

Bài tập 1.10.5. Tính giá trị biểu thức

1. Cho $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$. Tìm $A = f''_{xx}(1, -1) + 2f''_{yy}(-1, 1)$

1.10.2 Tìm vi phân của hàm $z = f(x, y)$

Bài tập 1.10.6. Tìm vi phân cấp một dz

1. $z = \arctan \frac{x}{y}$ tại $(1, 1)$

2. $z = y^2(2 - e^x)$ tại $(0, 1)$

3. $z = x^y$ tại $(1, 2)$

4. $z = y \ln(2x)$ tại $(1, 1)$
5. $z = xye^{2x+y}$ tại $(2, 1)$
6. $z = e^x + \ln(x - y^2)$ tại $(0, 1)$.

Bài tập 1.10.7. Tìm vi phân cấp hai d^2z

1. $z = xe^{xy^2}$ tại $(1, 0)$
2. $z = \frac{x+y}{2x+y}$ tại $(2, 1)$
3. $z = \arctan \frac{2x}{y}$ tại $(1, 1)$
4. $z = \frac{e^{xy}}{x}$ tại $(2, 1)$
5. $z = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ tại $(1, 1)$
6. $z = (x+2y)e^{x+y}$ tại $(2, 0)$

1.10.3 Đạo hàm, vi phân của hàm hợp

Bài tập 1.10.8. 1. Cho $f(x, y) = x^y$ và $x = \ln t, y = \sin t$. Tính $\frac{df}{dt}$.

2. Cho hàm $f(x, y) = e^{3x+2y}$ trong đó $x = \sin t, y = t^2$. Tính $\frac{df}{dt}$ khi $t = 0$.

3. Cho $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ và $x = e^{2t} + 1, y = e^{2t} - 1$. Tính $\frac{df}{dt}$.

4. Cho $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$ và $x = e^t, y = \ln t, z = t^2 - 1$. Tính $\frac{df}{dt}$ khi $t = 1$.

Bài tập 1.10.9. 1. Cho $f(u, v) = u^2 \ln v$ và $u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

2. Cho $f(u, v) = e^u \ln v$ và $u = xy^2, v = x^2y$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

3. Giả thiết f là hàm khả vi và $z = x.f\left(\frac{y}{x}\right)$. Tính $A = z'_x + \frac{y}{x}z'_y$.

1.10.4 Đạo hàm theo hướng

Bài tập 1.10.10. 1. Xét hàm $f(x, y) = 2x^3 + y^2$. Tìm véc tơ đơn vị $\vec{u}$ để $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

1.10.5 Đạo hàm, vi phân của hàm ẩn

Bài tập 1.10.11. Tìm các đạo hàm

1. Cho hàm số $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình $x^3 + y^3 = 6xy$. Tính $\frac{dy}{dx}$.

2. Cho hàm số $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. Tính $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

3. Cho hàm số $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình $x + y = e^{x-y}$. Tính $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.
4. Cho hàm số $y = y(x)$ được xác định bởi phương trình $x - y + \arctan y = 0$. Tính $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.
5. Cho $x^2 + 2xy = y^2 - 4x + 2y - 2$. Tính $y'(1)$ và $y''(1)$ biết rằng $y(1) = 1$.

Bài tập 1.10.12. Tìm các đạo hàm

1. Cho hàm số $z = z(x, y)$ được xác định bởi phương trình $z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Cho hàm số $z = z(x, y)$ được xác định bởi phương trình $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2); \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2)$ biết rằng $z(1, 2) = 2$
3. Cho hàm $z = z(x, y)$ được xác định từ phương trình $z^3 - 9xz + y^2 - 4 = 0$. Tính $z'_y(1, -2)$ nếu $z(1, -2) > 0$.

Bài tập 1.10.13. Tìm vi phân của các hàm ẩn sau:

1. Tính dz nếu $xz - e^{\frac{z}{y}} + x^3 + y^3 = 0$.
2. Tính $d^2z(x, y)$ nếu $x + y + z = e^z$.
3. Giả sử $z = z(x, y)$ là hàm khả vi được xác định bởi phương trình $z^3 - xz + y = 0$. Tính $dz(3, -2), d^2z(3, -2)$ biết rằng $z(3, -2) = 2$.
4. Cho hàm số $z = z(x, y)$ được xác định bởi phương trình $\frac{x}{z} = \ln\left(\frac{z}{y}\right) + 1$. Tính $dz(1, 1); d^2z(1, 1)$ biết rằng $z(1, 1) = 1$.

1.10.6 Mặt phẳng tiếp diện, pháp tuyến với mặt cong

Bài tập 1.10.14. Viết phương trình mặt phẳng tiếp diện của mặt bậc hai

1. $z = 4x^2 + 2y^2$ tại $(1, 1, 6)$

1.10.7 Tìm khai triển Taylor, Maclaurin

Bài tập 1.10.15. Tìm khai triển Taylor của

1. hàm $f(x, y) = y^x$ ở lân cận điểm $(1, 1)$ đến số hạng bậc 2.
2. hàm $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ở lân cận điểm $(1, 1)$ đến số hạng bậc 3.
3. hàm $f(x, y) = (x + 2y - 1)^3$ đến cấp 2 ở lân cận điểm $(1, 1)$.

Bài tập 1.10.16. Tìm khai triển Taylor của hàm ẩn, với

1. hàm $z(x, y)$ xác định bởi phương trình $z^3 + 3yz - 4x = 0$ ở lân cận điểm $(1, 1)$ đến số hạng bậc 2, biết rằng $z(1, 1) = 1$.
2. hàm $z(x, y)$ xác định bởi phương trình $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$ ở lân cận điểm $(1, 1)$ đến số hạng bậc 2, biết rằng $z(1, 1) = 1$.

Bài tập 1.10.17. Tìm khai triển Maclaurin của

1. hàm $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ đến số hạng bậc 6.
2. hàm $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ đến số hạng bậc 2.
3. hàm $f(x, y) = e^x \cdot \cos y$ đến số hạng bậc 5.
4. hàm $f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}$ đến số hạng bậc 2.
5. hàm $f(x, y) = \ln(1 + x) \cdot \ln(1 + y)$ đến số hạng bậc 3.
6. hàm $f(x, y) = \sin(x - x^2y)$ đến cấp 4

Lời giải bài tập chương 3

1.10.1 1. $z'_x = 3x^2 + 6xy + ye^{xy}; z'_y = 3x^2 + xe^{xy}$

2. $z'_x = -6x \cdot \cos^2(x^2 + 2y) \cdot \sin(x^2 + 2y); z'_y = -6 \cos^2(x^2 + 2y) \cdot \sin(x^2 + 2y)$

3. $z'_x = -\frac{y}{xy + 3x^2}; z'_y = \frac{1}{y + 3x}$

4. $z'_x = -e^y(\sin x - y \cos x); z'_y = e^y(\sin x + \cos x + y \sin x)$

5. $z'_x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}; z'_y = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$

6. $z'_x = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y}; z'_y = -\cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{x}{(1+y)^2}$

1.10.2 1. $z'_x(1, 2) = 10; z'_y(1, 2) = 20 + 25 \ln 5$

1.10.3 1. $z''_{xx} = e^{xy}(2y + xy^2); z''_{xy} = z''_{yx} = e^{xy}(2x + x^2y); z''_{yy} = x^3e^{xy}$

2. $z''_{xx} = -4 \cos(e^{2y} - 2x); z''_{xy} = z''_{yx} = 4e^{2y} \cos(e^{2y} - 2x); z''_{yy} = -4e^{4y} \cos(e^{2y} - 2x) - 4e^{2y} \sin(e^{2y} - 2x)$

1.10.4 1. $z''_{xx}(1, 1) = \frac{1}{4}; z''_{xy}(1, 1) = z''_{yx}(1, 1) = 0; z''_{yy}(1, 1) = -\frac{1}{4}$

2. $z''_{xx}(2, 0) = 4e^2; z''_{xy}(2, 0) = z''_{yx}(2, 0) = 5e^2; z''_{yy}(2, 0) = 6e^2$

3. $z''_{xx}(1, 1) = -\frac{16}{25}; z''_{xy}(1, 1) = z''_{yx}(1, 1) = \frac{6}{25}; z''_{yy}(1, 1) = \frac{4}{25}$

4. $z''_{xx}(2, 1) = \frac{e^2}{4}; z''_{xy}(2, 1) = z''_{yx}(2, 1) = e^2; z''_{yy}(2, 1) = 2e^2$

5. $z''_{xx}(0, -1) = \frac{1}{2}$

1.10.5 1. $A = -\frac{1}{2}$

1.10.6 1. $dz = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$

2. $dz = -dx + 2dy$

3. $dz = 2dx$

4. $dz = -\frac{1}{\ln^2 2}dx + \frac{1}{\ln 2}dy$

5. $dz = 5e^5dx + 4e^5dy$

6. $dz = 2dy$

1.10.7 1. $d^2z = 2dy^2$

$$2. d^2z = \frac{4}{125}dx^2 - \frac{6}{125}dxdy - \frac{4}{125}dy^2$$

$$3. d^2z = -\frac{16}{25}dx^2 + \frac{12}{25}dxdy + \frac{4}{25}dy^2$$

$$4. d^2z = e^2 \left(\frac{1}{4}dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 \right)$$

$$5. d^2z = dx^2 - dy^2$$

$$6. d^2z = e^2(4dx^2 + 10dxdy + 6dy^2)$$

$$1.10.8 \quad 1. \frac{df}{dt} = \sin t \cdot (\ln t)^{\sin t - 1} \cdot \frac{1}{t} + (\ln t)^{\sin t} \cdot \ln(\ln t) \cdot \cos t$$

$$2. \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = 3.$$

$$3. \frac{df}{dt} = \frac{2e^{2t}}{e^{4t} + 1}.$$

$$4. \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=1} = 0.$$

$$1.10.9 \quad 1. \frac{\partial f}{\partial x} = -2\frac{y^2}{x^3} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x(x^2 + y^2)}; \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{y}{x^2} \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^3}{x^2(x^2 + y^2)}$$

$$2. \frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy^2} \cdot \ln(x^2y) \cdot y^2 + \frac{e^{xy^2}}{x^2}; \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{xy^2} \cdot \ln(x^2y) \cdot xy + \frac{e^{xy^2}}{y}.$$

$$3. A = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$1.10.10 \quad 1. \vec{u} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right).$$

$$1.10.11 \quad 1. \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}.$$

$$2. \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^y}{e^x + e^y}; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4e^{x+2y}}{(e^x + e^y)^3}.$$

$$4. \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{y^2}; \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{y^3} \left(1 + \frac{1}{y^2} \right).$$

$$5. y'(1) = 4; y''(1) = -7$$

$$1.10.12 \quad 1. \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{z}{x+z} - \frac{y}{z}}{\ln(x+z) + \frac{z}{x+z} + \frac{xy}{z^2}}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{x}{z}}{\ln(x+z) + \frac{z}{x+z} + \frac{xy}{z^2}}.$$

$$2. \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = 1; \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = -\frac{1}{2}$$

$$3. z'_y(1, -2) = \frac{2}{9}.$$

$$1.10.13 \quad 1. dz = -\frac{3x^2y + zy}{xy - e^{z/y}}dx - \frac{3y^4 + ze^{z/y}}{xy^2 - ye^{z/y}}dy.$$

$$2. d^2z(x, y) = -\frac{e^z}{(e^z - 1)^3}dx^2 - 2\frac{e^z}{(e^z - 1)^3}dxdy - \frac{e^z}{(e^z - 1)^3}dy^2.$$

$$3. dz(3, -2) = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy; d^2z(3, -2) = -\frac{4}{243}dx^2 + \frac{10}{243}dxdy - \frac{4}{243}dy^2.$$

$$4. dz(1, 1) = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy; d^2z(1, 1) = -\frac{1}{8}dx^2 - \frac{1}{4}dxdy - \frac{1}{8}dy^2.$$

1.10.14 1. $8x + 4y - z - 6 = 0$

1.10.15 1. $f(x, y) = 1 + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) + o(\rho^2)$

2. $f(x, y) = 1 - (x - 1) + (y - 1) - (x - 1)(y - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3 + (x - 1)^2(y - 1) + o(\rho^3)$

3. $f(x, y) = 8 + 12(x - 1) + 24(y - 1) + 6(x - 1)^2 + 24(x - 1)(y - 1) + 24(y - 1)^2 + o(\rho^2)$.

1.10.16 1. $z = f(x, y) = 1 + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) - \frac{2}{9}(x - 1)^2 + \frac{1}{8}(y - 1)^2 + o(\rho^2)$.

2. $z = f(x, y) = 1 + (x - 1) + \frac{1}{4}(y - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)(y - 1) + \frac{9}{64}(y - 1)^2 + o(\rho^2)$.

1.10.17 1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{x^2y^4}{2} - \frac{x^4y^2}{2} - \frac{x^6}{6} - \frac{y^6}{6} + o(\rho^6)$.

2. $f(x, y) = x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + o(\rho^2)$

3. $f(x, y) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2y^2}{4} + \frac{y^4}{24} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3y^2}{12} + \frac{xy^4}{24} + o(\rho^5)$.

4. $f(x, y) = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + o(\rho^2)$

5. $f(x, y) = xy - \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{2} + o(\rho^3)$

6. $f(x, y) = x - x^2y - \frac{1}{6}x^3 + o(\rho^4)$

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com