

Mục lục

Mục lục	1
Chương 1. TÍCH PHÂN KÉP	2
1.1. Định nghĩa tích phân kép.....	2
1.1.1. Đặt vấn đề.....	2
1.1.2. Định nghĩa.....	4
1.1.3. Tính chất của tích phân kép.....	4
1.2. Tích phân kép trong hệ tọa độ Đề-các	5
1.2.1. Định lý Fubini	5
1.2.2. Tích phân kép trên miền bất kỳ tổng quát.....	7
1.2.3. Đổi thứ tự lấy tích phân kép	13
1.3. Tích phân kép trong hệ tọa độ cực	13
1.3.1. Đặt vấn đề.....	13
1.3.2. Tích phân kép trong hệ tọa độ cực	14
1.3.3. Tích phân kép trên miền D tổng quát trong hệ tọa độ cực.....	17
1.3.4. Công thức đổi biến tổng quát khi tính tích phân kép	19
1.4. Ứng dụng hình học của tích phân kép	23
1.4.1. Tính diện tích miền D	23
1.4.2. Tính thể tích vật thể.....	25
1.5. Bài tập	30
1.5.1. Tính tích phân kép sử dụng định lý Fubini	30
1.5.2. Tính tích phân kép sử dụng hệ tọa độ cực.....	31
1.5.3. Ứng dụng của tích phân kép	31

TÍCH PHÂN KÉP

1.1. Định nghĩa tích phân kép.....	2
1.2. Tích phân kép trong hệ tọa độ Đề-các.....	5
1.3. Tích phân kép trong hệ tọa độ cực.....	13
1.4. Ứng dụng hình học của tích phân kép.....	23
1.5. Bài tập.....	30

cuu duong than cong. com

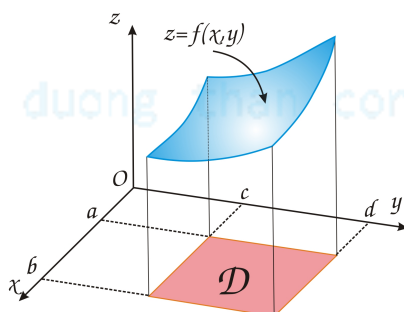
1.1 Định nghĩa tích phân kép

1.1.1 Đặt vấn đề

Cho $z = f(x, y)$ là hàm số xác định trên **miền đóng** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Ω là vật thể giới hạn bởi

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}$$

Tính thể tích V của vật thể Ω .

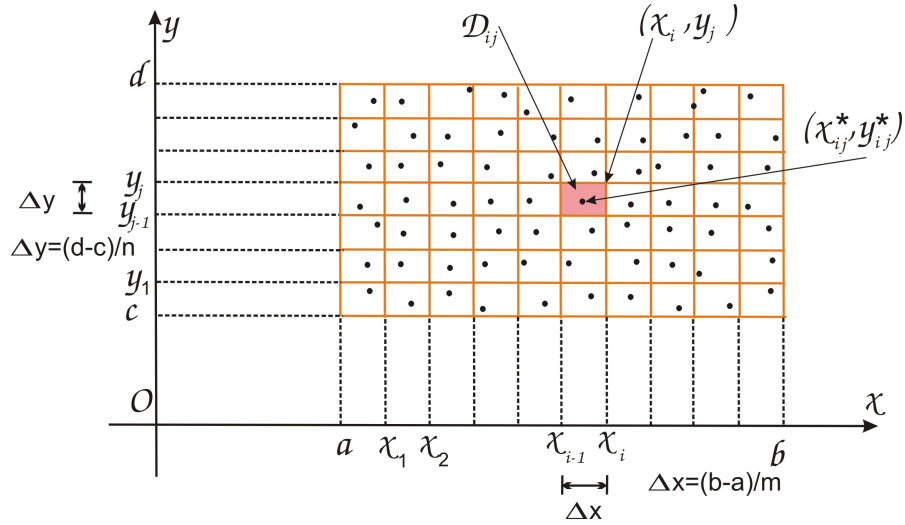


Hình 1.1: Thể tích vật thể Ω

Đầu tiên, chúng ta chia miền D thành những hình chữ nhật nhỏ. Chúng ta chia đoạn $[a, b]$ thành m đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ với độ dài $\Delta x = \frac{b-a}{m}$, và chia đoạn $[c, d]$ thành n đoạn nhỏ $[y_{j-1}, y_j]$ với độ dài $\Delta y = \frac{d-c}{n}$. Bằng cách vẽ những đường thẳng song song với các trục tọa độ và đi qua các điểm

chia, chúng ta thu được hình chữ nhật nhỏ với diện tích $\Delta x \cdot \Delta y$.

$$D_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$



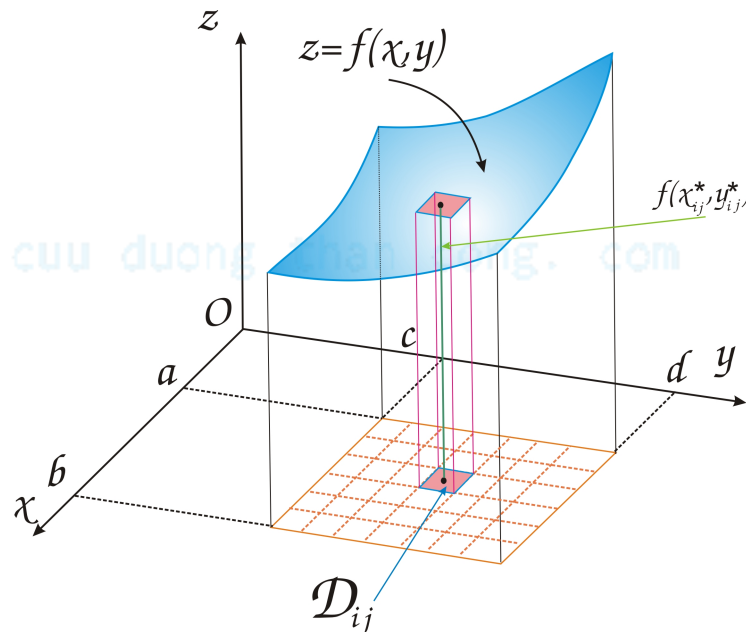
Hình 1.2: Chia miền D thành những hình chữ nhật nhỏ D_{ij}

Nếu chúng ta chọn một điểm tùy ý $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in D_{ij}$ thì chúng ta có thể xấp xỉ được thể tích V cần tìm, bằng cách tính tổng các thể tích hình hộp chữ nhật nhỏ với đáy là D_{ij} có diện tích $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$ và chiều cao là $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$. Thể tích hình hộp chữ nhật nhỏ này bằng

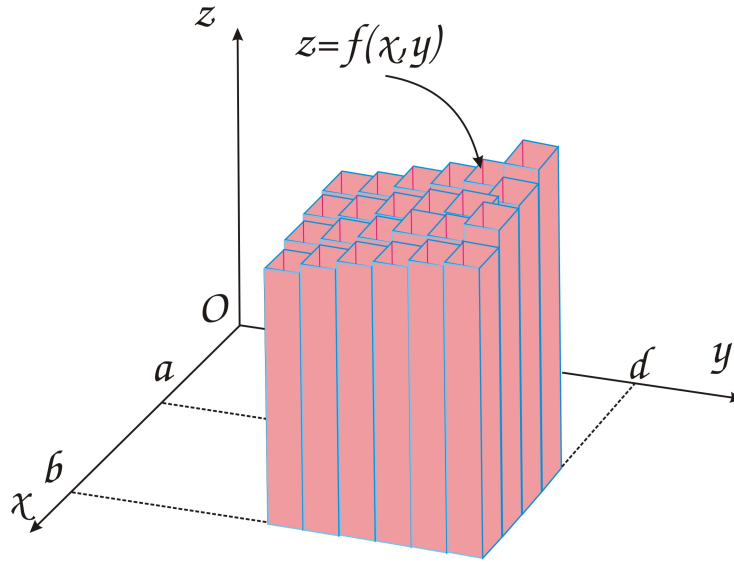
$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Như vậy, khi cộng tất cả những thể tích của những hình hộp chữ nhật nhỏ, chúng ta sẽ xấp xỉ được thể tích V cần tìm

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$



Hình 1.3: Thể tích của hình hộp chữ nhật nhỏ



Hình 1.4: Thể tích gần đúng của vật thể Ω

Khi cho $m, n \rightarrow \infty$ chúng ta sẽ thu được

$$V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y.$$

1.1.2 Định nghĩa

Cho hàm số $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$.

Định nghĩa 1.1. Tích phân kép của hàm số $f(x, y)$ trên miền D là

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$$

nếu giới hạn này tồn tại. Lúc này $f(x, y)$ được gọi là hàm khả tích trên D .

1.1.3 Tính chất của tích phân kép

1⁰. Nếu $D = D_1 + D_2$ và $f(x, y)$ khả tích trên D thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

2⁰. Nếu $f(x, y)$ và $|f(x, y)|$ là những hàm khả tích trên D thì

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| = \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

3⁰. Nếu $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là những hàm khả tích trên D thì

$$\begin{aligned} \iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy &= \\ &= \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy \end{aligned}$$

4⁰. Nếu $f(x, y)$ là hàm khả tích trên D thì

$$\iint_D (\alpha f(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

5⁰. Nếu $f(x, y)$ và $g(x, y)$ là những hàm khả tích trên D và $f(x, y) \leq g(x, y), \forall (x, y) \in D$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

6⁰. Nếu D là miền đóng, bị chặn thì

$$S_D = \iint_D dx dy$$

1.2 Tích phân kép trong hệ tọa độ Đề-các

1.2.1 Định lý Fubini

Giả sử $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D = [a, b] \times [c, d]$ là hàm liên tục trên hình chữ nhật D . Chúng ta cần tính tích phân $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Chúng ta sử dụng kí hiệu $\int_c^d f(x, y) dy$ có nghĩa là cho x cố định và lấy tích phân của hàm $f(x, y)$ theo biến y từ c đến d . Như vậy,

$$h(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Nếu chúng ta tiếp tục lấy tích phân của hàm $h(x)$ theo biến x từ a đến b , ta được

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Tương tự, chúng ta cũng có khái niệm tích phân $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$

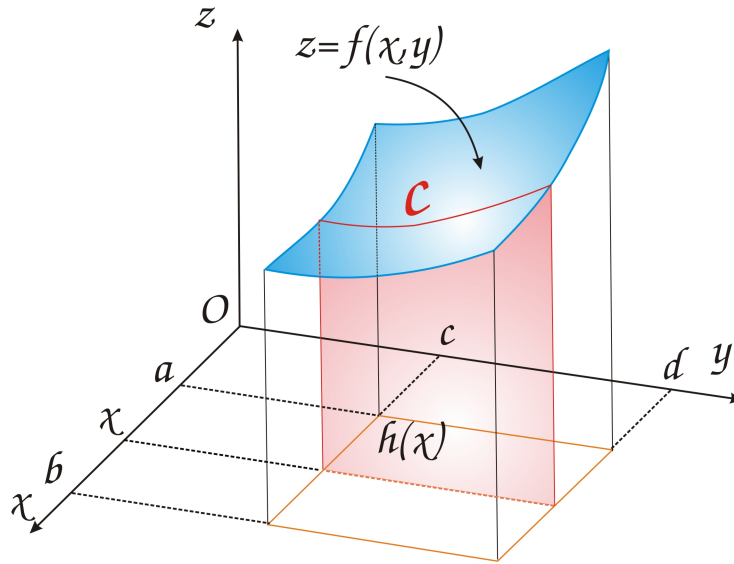
Định lý 1.1: (Định lý Fubini).

Cho $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ là hàm liên tục trên miền D . Khi đó

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (1.1)$$

Chứng minh. Theo định nghĩa tích phân kép thì $\iint_D f(x, y) dx dy$ là thể tích V của vật thể Ω giới hạn bởi

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}.$$



Hình 1.5: Diện tích mặt cắt $h(x)$

Ngoài ra, ta cũng có công thức khác để tính thể tích của vật thể Ω

$$V = \int_a^b h(x) dx,$$

trong đó $h(x)$ là diện tích của mặt cắt của mặt phẳng vuông góc với trục Ox với mặt cong $z = f(x, y)$. Khi **cho x cố định**, thì $h(x)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $C : z = f(x, y), z = 0$ và $c \leq y \leq d$. Do đó

$$h(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Như vậy,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = V = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Chứng minh tương tự, ta có

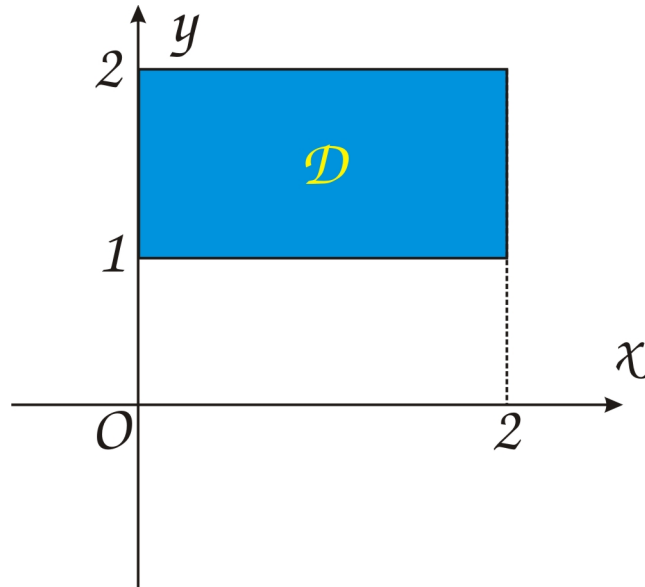
$$\iint_D f(x, y) dx dy = V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Ví dụ 1.2.1. Tính tích phân $I = \iint_D (3y^2 - x) dx dy$, với $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Giải.

Cách 1. Theo định lý Fubini, đầu tiên lấy tích phân theo biến y , ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (3y^2 - x) dx dy = \int_0^2 \left[\int_1^2 (3y^2 - x) dy \right] dx = \int_0^2 [y^3 - xy]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^2 [(8 - 2x) - (1 - x)] dx = \\ &= \int_0^2 (7 - x) dx = \left[7x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 12. \end{aligned}$$

Hình 1.6: Miền $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

Cách 2. Theo định lý Fubini, đầu tiên lấy tích phân theo biến x , ta có

$$I = \iint_D (3y^2 - x) dx dy = \int_1^2 \left[\int_0^2 (3y^2 - x) dx \right] dy = \int_1^2 \left[3xy^2 - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_1^2 (6y^2 - 2) dy =$$

$$= [2y^3 - 2y]_1^2 = 12.$$

Chú ý. Trong trường hợp đặc biệt nếu $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx = \int_a^b f_1(x) \left[\int_c^d f_2(y) dy \right] dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

Ví dụ 1.2.2. Tính tích phân $I = \iint_D (\sin x \cos y) dx dy$, với $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Giải.

$$I = \iint_D (\sin x \cos y) dx dy = \int_0^{\pi/2} \sin x dx \cdot \int_0^{\pi/2} \cos y dy = [-\cos x]_0^{\pi/2} \cdot [\sin y]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1.$$

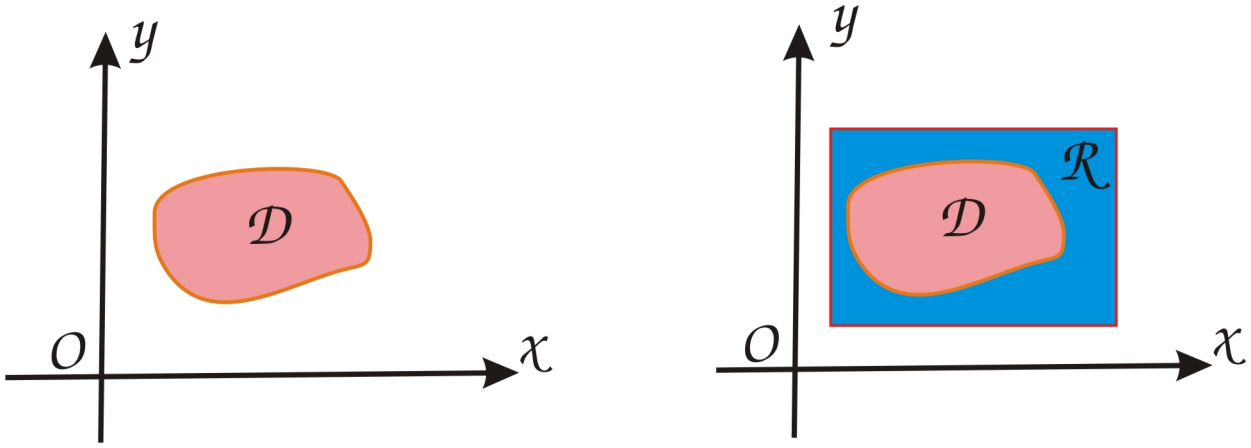
1.2.2 Tích phân kép trên miền bất kỳ tổng quát

Đối với tích phân kép, miền D không chỉ là hình chữ nhật mà có thể là một miền D bất kỳ tổng quát. Giả sử D là miền bị chặn, có nghĩa là D bị đóng bởi hình chữ nhật R . Khi đó, ta định nghĩa hàm mới F trên miền R như sau:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Nếu $F(x, y)$ là hàm khả tích trên R thì

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_D F(x, y) dx dy + \iint_{R \setminus D} F(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_{R \setminus D} 0 dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$



Hình 1.7: Miền D bất kỳ tổng quát và miền hình chữ nhật R

Định lý 1.2

Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D . Nếu $D : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $y_1(x), y_2(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (1.2)$$

Chứng minh. Theo định lý Fubini ta có

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d F(x, y) dy \right] dx.$$

Mặt khác, do $F(x, y) = 0$ khi $y < y_1(x)$ hoặc $y > y_2(x)$ và $F(x, y) = f(x, y)$ khi $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, nên

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Vậy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

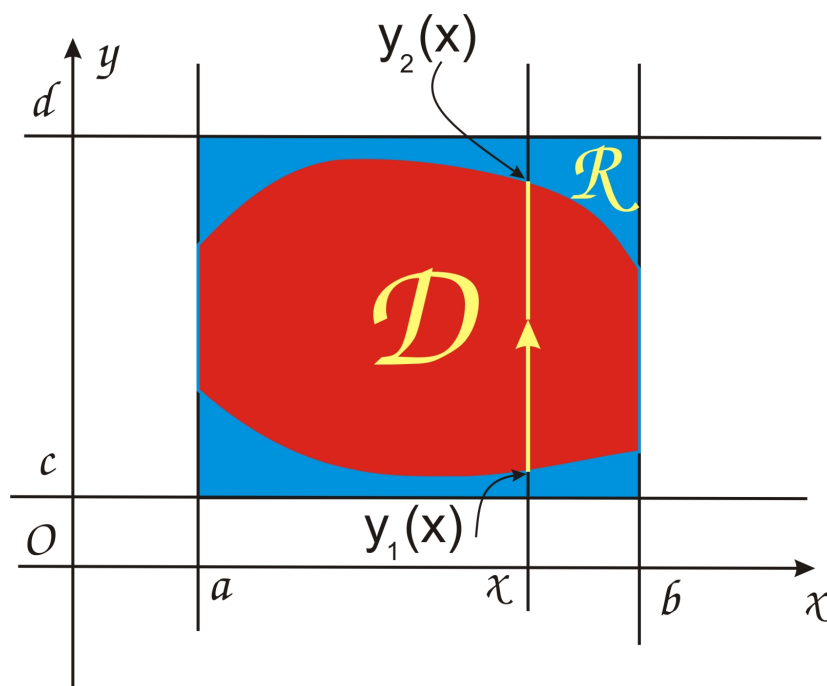
Lập luận tương tự, ta có định lý sau:

Định lý 1.3

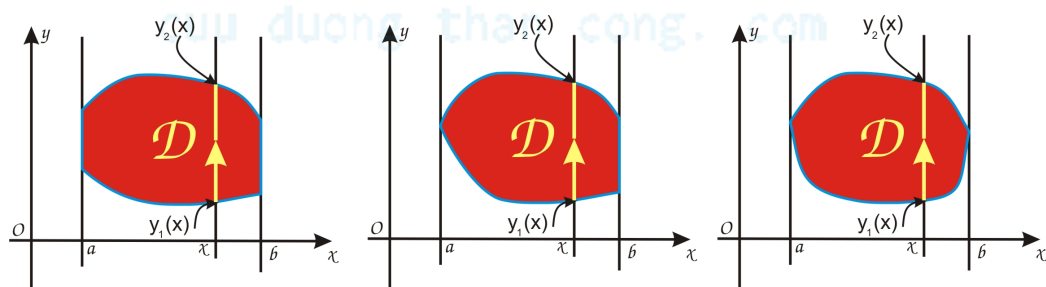
Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục trên miền D . Nếu $D : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, $x_1(y), x_2(y)$ liên tục trên $[c, d]$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (1.3)$$

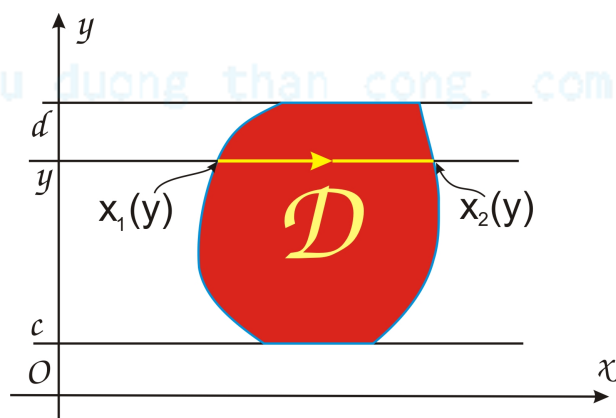
Ví dụ 1.2.3. Tính $I = \iint_D x dx dy$, với D là tam giác OAB , $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 1)$.



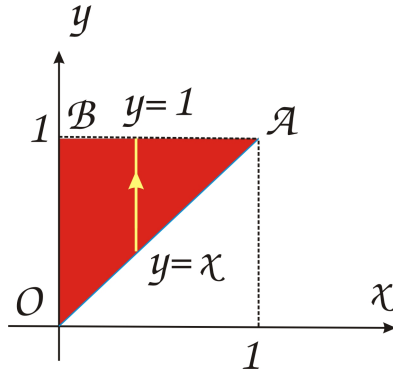
Hình 1.8: Miền $D : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$



Hình 1.9: Một số hình dạng của miền $D : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$



Hình 1.10: Miền $D : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$

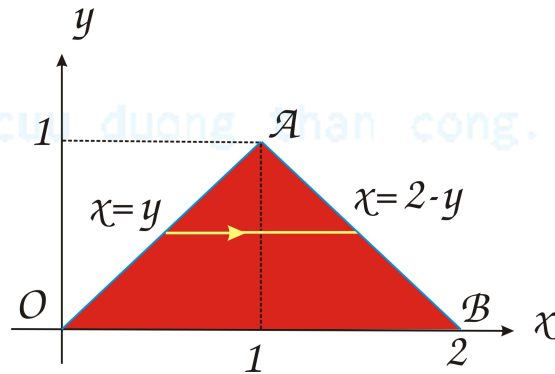


Hình 1.11: Miền tam giác OAB , $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$.

Giải. Miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1. \end{cases}$ Khi đó,

$$I = \int_0^1 \left[\int_x^1 x dy \right] dx = \int_0^1 [xy]_{y=x}^{y=1} dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 1.2.4. Tính $I = \iint_D (xy + 2y) dx dy$, với D là tam giác OAB , $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,0)$.



Hình 1.12: Miền tam giác OAB , $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,0)$.

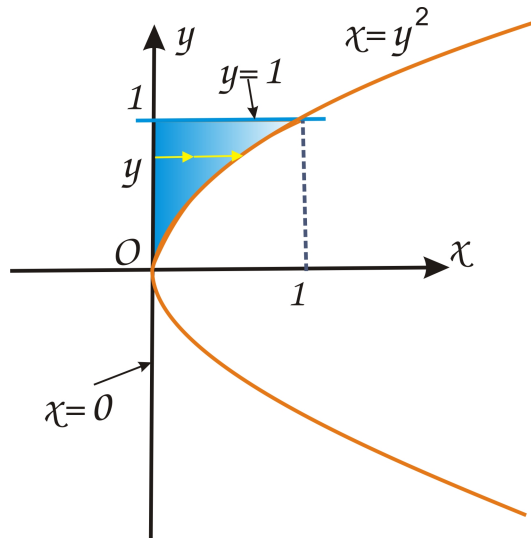
Giải. Miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 2 - y. \end{cases}$ Khi đó, $I =$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\int_y^{2-y} (xy + 2y) dx \right] dy &= \int_0^1 \left[\left(y \cdot \frac{x^2}{2} + 2yx \right) \right]_{x=y}^{x=2-y} dy = \\ &= \int_0^1 \left(y \cdot \frac{(2-y)^2}{2} + 2y(2-y) - y \cdot \frac{y^2}{2} - 2y \cdot y \right) dy = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.5. Tính $I = \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, với D được giới hạn bởi $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.

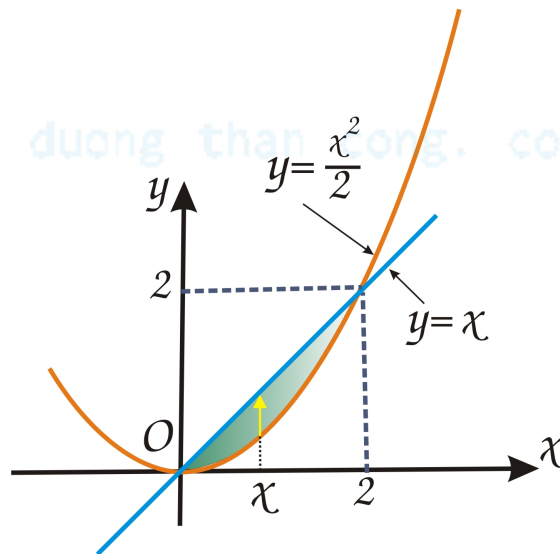
Giải. Miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y^2. \end{cases}$ Khi đó,

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right] dy = \int_0^1 \left[\left(y \cdot e^{\frac{x}{y}} \right) \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 (y \cdot e^y - y) dy = \left[\left(y e^y - e^y - \frac{y^2}{2} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$



Hình 1.13: Miền D được giới hạn bởi $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.

Ví dụ 1.2.6. Tính $I = \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$, với D được giới hạn bởi $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$.

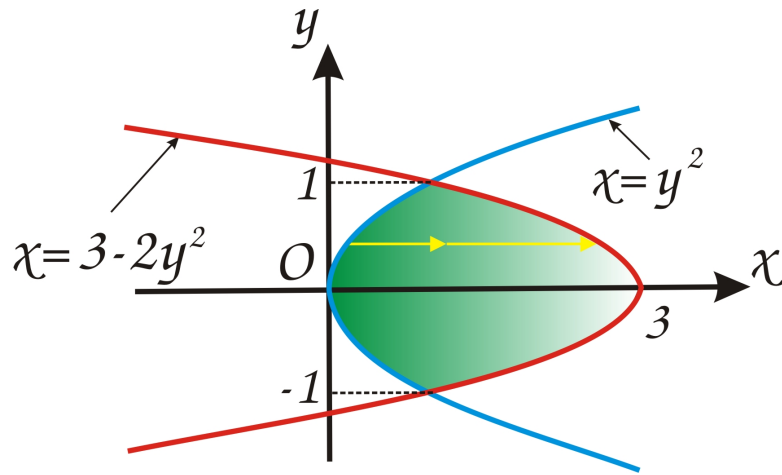


Hình 1.14: Miền D được giới hạn bởi $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$.

Giải. Miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x. \end{cases}$ Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left[\int_{x^2/2}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right] dx = \int_0^2 \left[\left(x \cdot \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} \right) \right]_{y=x^2/2}^{y=x} dx = \int_0^2 \left(\arctan \frac{x}{x} - \arctan \frac{x^2/2}{x} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \ln 2 \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.7. Tính $I = \iint_D (y^2 - x) dx dy$, với D được giới hạn bởi $y^2 = x$, $x = 3 - 2y^2$.

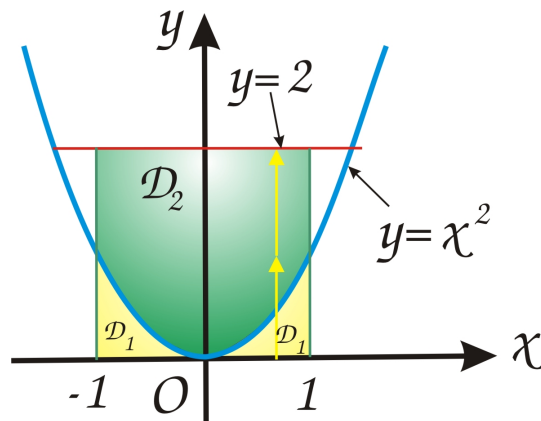


Hình 1.15: Miền D được giới hạn bởi $y^2 = x$, $x = 3 - 2y^2$.

Giải. Miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ y^2 \leq x \leq 3 - 2y^2 \end{cases}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left[\int_{y^2}^{3-2y^2} (y^2 - x) dx \right] dy = \int_{-1}^1 \left[\left(y^2 x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_{x=y^2}^{x=3-2y^2} dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left(y^2(3-2y^2) - \frac{(3-2y^2)^2}{2} - y^2 \cdot y^2 + \frac{(y^2)^2}{2} \right) dy = -\frac{23}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{24}{5}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.8. Tính $I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$, với $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$



Hình 1.16: Miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

Giải. Do $D = D_1 + D_2$ nên

$$I = \iint_{D_1} \sqrt{|y - x^2|} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{|y - x^2|} dx dy = I_1 + I_2.$$

Miền D_1 được giới hạn bởi $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$. Khi đó,

$$I_1 = \int_{-1}^1 \left[\int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[\left(-\frac{(x^2 - y)^{3/2}}{3/2} \right) \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = -\int_{-1}^1 \left(\frac{(x^2 - x^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{(x^2 - 0)^{3/2}}{3/2} \right) dx = 0$$

Miền D_2 được giới hạn bởi $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 2 \end{cases}$. Khi đó,

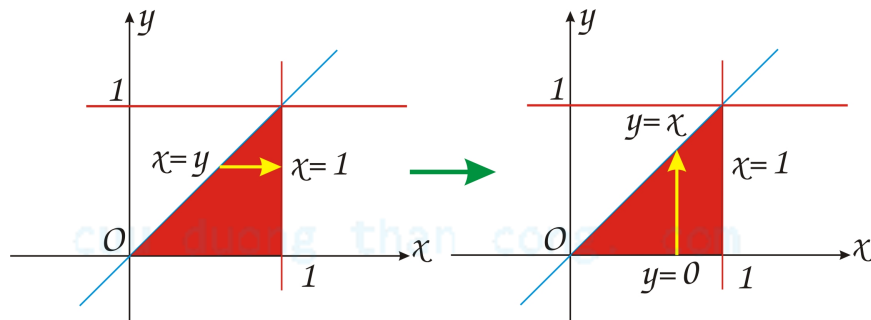
$$I_2 = \int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{(y-x^2)^{3/2}}{3/2} \right) \right]_{y=x^2}^{y=2} dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{(2-x^2)^{3/2}}{3/2} - \frac{(x^2-x^2)^{3/2}}{3/2} \right) dx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$$

1.2.3 Đổi thứ tự lấy tích phân kép

Trong một số trường hợp, việc lấy tích phân theo một thứ tự nào đó khó khăn hơn (thậm chí không tính được tích phân). Khi đó, áp dụng tính chất của tích phân kép trên miền bất kỳ, chúng ta có thể lấy tích phân theo trật tự khác dễ dàng hơn.

Ví dụ 1.2.9. Tính $I = \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$



Hình 1.17: Đổi thứ tự từ $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$ thành $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

Giải. Tích phân $\int_y^1 e^{x^2} dx$ **không tính được**. Do đó, chúng ta cần thay đổi lại thứ tự lấy tích phân.

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[e^{x^2} y \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

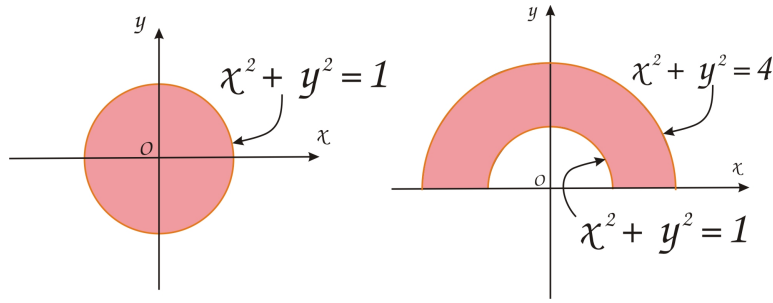
1.3 Tích phân kép trong hệ tọa độ cực

1.3.1 Đặt vấn đề

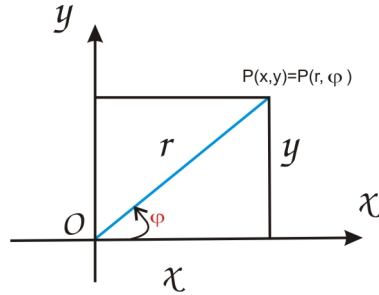
Giả sử chúng ta cần tính tích phân $\iint_D f(x, y) dx dy$, khi D có hình dạng như trong hình (1.3.1). Việc mô tả miền D trong hệ trục tọa độ Đề-các khá phức tạp nhưng mô tả trong hệ tọa độ cực thì dễ dàng hơn.

Hệ tọa độ cực (r, φ) xác định một điểm có tọa độ (x, y) như sau:

$$r^2 = x^2 + y^2; x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi; \tan \varphi = \frac{y}{x}$$



Hình 1.18: Miền $D = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ và $D = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$



Hình 1.19: Mối quan hệ giữa tọa độ cực và tọa độ Đề-các

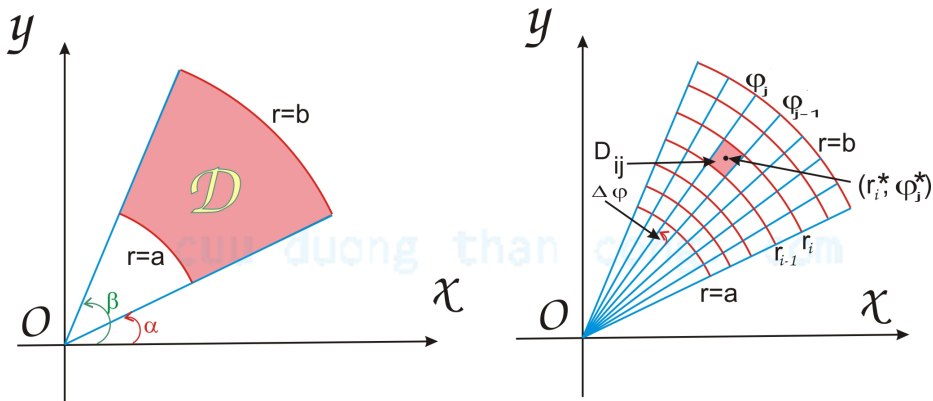
Chú ý. Khi miền D có dạng hình tròn thì ta sẽ sử dụng hệ tọa độ cực.

1.3.2 Tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Như vậy, miền D trong hình (1.3.1) xác định trong hệ tọa độ cực như sau:

$$D = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

Miền nhỏ bất kỳ trong hệ tọa độ cực xác định như sau:



Hình 1.20: Miền D trong hệ tọa độ cực và cách chia D thành những miền nhỏ

$$D_{ij} = \{(r, \varphi) : r_{i-1} \leq r \leq r_i, \varphi_{j-1} \leq \varphi \leq \varphi_j\}$$

Lấy một điểm trong D_{ij} có tọa độ

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}), \varphi_j^* = \frac{1}{2}(\varphi_j + \varphi_{j-1}).$$

Chúng ta sẽ tính diện tích của miền D_{ij} như sau:

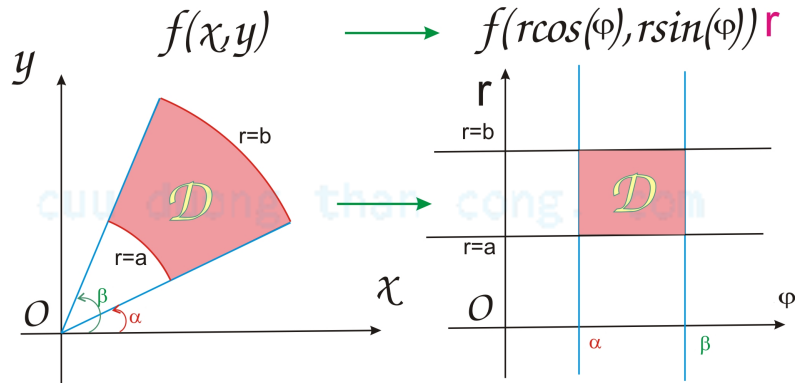
$$S_{D_{ij}} = \frac{1}{2}r_i^2 \cdot \Delta\varphi - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\varphi = r_i^* \cdot \Delta r \cdot \Delta\varphi$$

Khi đó, tổng Riemann tương ứng là

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \varphi_j^*, r_i^* \sin \varphi_j^*) S_{D_{ij}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \varphi_j^*, r_i^* \sin \varphi_j^*) r_i^* \cdot \Delta r \cdot \Delta\varphi$$

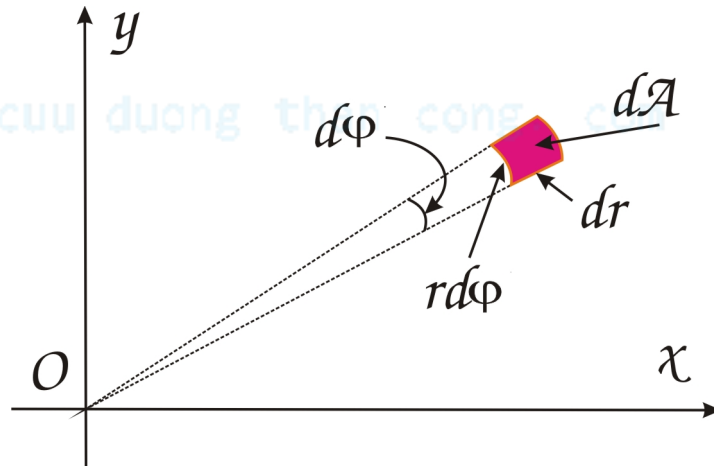
Nếu ta đặt $g(r, \varphi) = rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ thì tổng Riemann ở trên có thể viết lại như sau: $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \varphi_j^*) \cdot \Delta r \cdot \Delta\varphi$. Đây chính là tổng Riemann của tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \varphi) dr d\varphi$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \varphi_j^*, r_i^* \sin \varphi_j^*) S_{D_{ij}} = \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \varphi_j^*) \cdot \Delta r \cdot \Delta\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \varphi) dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \end{aligned}$$



Hình 1.21: Miền D được chuyển từ hệ tọa độ Đề-các sang hệ tọa độ cực

Khi chuyển từ hệ tọa độ Đề-các sang hệ tọa độ cực bằng cách đổi $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ sử dụng tính gần đúng của giới hạn khi tính tích phân đối với r và φ , ta có thể viết lại $dA = r dr d\varphi$.



Hình 1.22: Diện tích của miền nhỏ D_{ij}

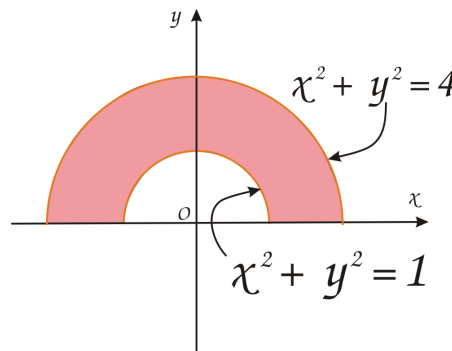
Định lý 1.4: (Tích phân kép trong hệ tọa độ cực).

Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên miền $D = \{(r, \varphi) : 0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$, ở đây $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (1.4)$$

Chú ý. Trong công thức tích phân kép trong hệ tọa độ cực, đừng quên nhân thêm cho r .

Ví dụ 1.3.1. Tính tích phân $\iint_D (3x + 4y^2) dx dy$ với $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.



Hình 1.23: Miền $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

Giải. Chuyển miền D sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, ta được

$$D = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Theo công thức tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực, ta có

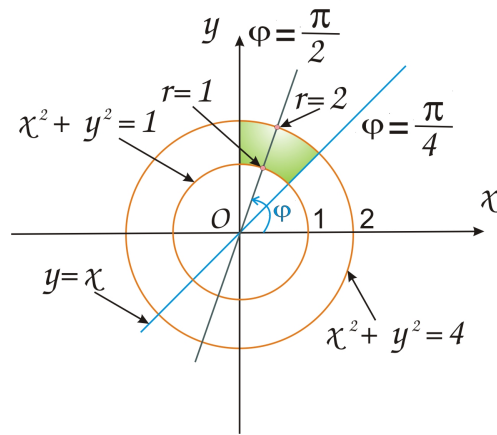
$$\begin{aligned} \iint_D (3x + 4y^2) dx dy &= \int_0^{\pi} \int_1^2 [(3r \cos \varphi + 4r^2 \sin^2 \varphi) r dr] d\varphi = \int_0^{\pi} \left[\int_1^2 (3r^2 \cos \varphi + 4r^3 \sin^2 \varphi) dr \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \left[r^3 \cos \varphi + r^4 \sin^2 \varphi \right]_{r=1}^{r=2} d\varphi = \int_0^{\pi} (7 \cos \varphi + 15 \sin^2 \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} \left[7 \cos \varphi + \frac{15}{2} (1 - \cos 2\varphi) \right] d\varphi = \\ &= \left[7 \sin \varphi + \frac{15}{2} \varphi - \frac{15}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.2. Tính $I = \iint_D (x + y) dx dy$, với $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, x \geq 0, y \geq x$.

Giải. Chuyển miền D sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, ta được miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$.

Khi đó,

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\int_1^2 (r \cos \varphi + r \sin \varphi) r dr \right] d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[(\cos \varphi + \sin \varphi) \frac{r^3}{3} \right]_{r=1}^{r=2} d\varphi = \frac{7}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = \frac{7}{3}.$$



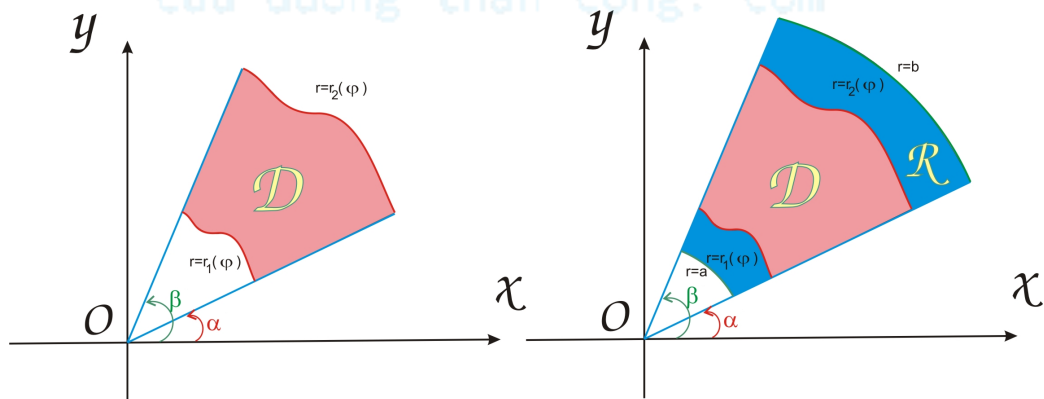
Hình 1.24: Miền $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, x \geq 0, y \geq x$.

1.3.3 Tích phân kép trên miền D tổng quát trong hệ tọa độ cực

Nếu miền D trong hệ tọa độ cực có hình dạng phức tạp hơn như hình (1.3.3). Áp dụng phương pháp giống như đối với miền tổng quát trong hệ tọa độ Đề-các, bằng cách đặt hàm mới

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \setminus D. \end{cases}$$

ta cũng thu được định lý sau:



Hình 1.25: Miền $D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}$

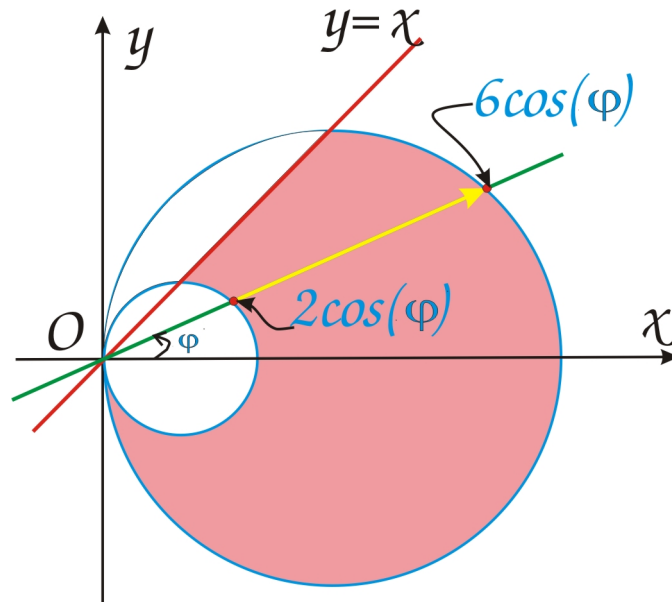
Định lý 1.5

Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên miền $D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \right] d\varphi. \quad (1.5)$$

Chú ý. Khi tâm của hệ tọa độ cực không trùng với tâm hình tròn thì lúc này r sẽ là hàm phụ thuộc vào góc φ .

Ví dụ 1.3.3. Tính tích phân $\iint_D 2x dx dy$ với $D = \{(x, y) : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x, y \leq x\}$.



Hình 1.26: Miền $D = \{(x, y) : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x, y \leq x\}$.

Giải. Từ bất đẳng thức $2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x$ ta thấy

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \\ (x-3)^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Do đó miền D là miền nằm giữa hai đường tròn tâm $(1, 0)$ bán kính bằng 1 và đường tròn tâm $(3, 0)$ bán kính bằng 3 sao cho $y \leq x$.

Đổi biến $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Thay vào bất đẳng thức $2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x$ ta được

$$2r \cos \varphi \leq r^2 \leq 6r \cos \varphi \Leftrightarrow 2 \cos \varphi \leq r \leq 6 \cos \varphi.$$

Thay vào bất đẳng thức $y \leq x$ ta được $r \sin \varphi \leq r \cos \varphi$ với $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Từ đó suy ra

$$\tan \varphi \leq 1 \Rightarrow \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Vậy, miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ 2 \cos \varphi \leq r \leq 6 \cos \varphi \end{cases}$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left[\int_{2 \cos \varphi}^{6 \cos \varphi} 2r \cos \varphi \cdot r dr \right] d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left[\cos \varphi \cdot \frac{2r^3}{3} \right]_{r=2 \cos \varphi}^{r=6 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left(\cos \varphi \cdot \frac{2 \cdot 216 \cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi \cdot \frac{2 \cdot 8 \cos^3 \varphi}{3} \right) d\varphi = \frac{416}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{416}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{416}{3} \left[\frac{3}{8} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/4} = 39\pi + \frac{104}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $I = 39\pi + \frac{104}{3}.$

1.3.4 Công thức đổi biến tổng quát khi tính tích phân kép

Trường hợp 1: Công thức đổi biến sang hệ tọa độ cực

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, (r \geq 0).$$

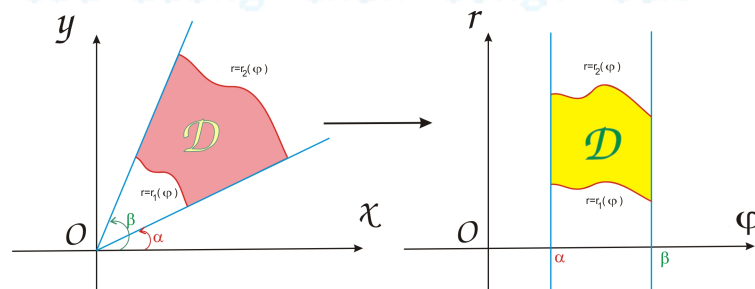
Định thức Jacobian khi chuyển sang hệ tọa độ cực là

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Định lý 1.6

Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên miền $D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}$ thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \right] d\varphi. \quad (1.6)$$



Hình 1.27: Miền D được chuyển từ hệ tọa độ Đề-các sang hệ tọa độ cực bằng công thức $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

Trường hợp 2: Miền D là hình tròn $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, R > 0$. Ta dùng phép đổi biến

$$x = x_0 + r \cos \varphi, y = y_0 + r \sin \varphi, \tan \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Định thức Jacobian là

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Khi lấy cận của r, φ ta coi gốc tọa độ cực dời về tâm đường tròn (x_0, y_0) .

Định lý 1.7

Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên miền D được xác định trong **hệ tọa độ cực mở rộng**:

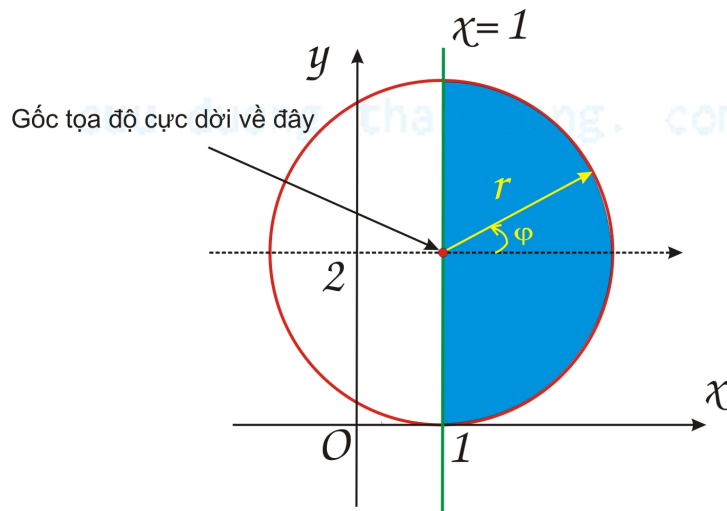
$$D = \{(r, \varphi) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

thì

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) \cdot |J| dr d\varphi \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi \end{aligned} \quad (1.7)$$

Chú ý. Khi đổi gốc của hệ tọa độ cực, chúng ta cần cân nhắc và **ưu tiên cho hàm lấy tích phân** vì hàm lấy tích phân dễ ta sẽ lấy được tích phân, sau đó chúng ta mới xem xét đến lợi ích của đổi căn lấy tích phân

Ví dụ 1.3.4. Tính $I = \iint_D (2x + y) dx dy$, với $D : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4, x \geq 1$.



Hình 1.28: Miền $D : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4, x \geq 1$.

Giải. Đổi biến $x - 1 = r \cos \varphi, y - 2 = r \sin \varphi$. Thay vào bất đẳng thức $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \Rightarrow r \leq 2$ và $x \geq 1 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Lúc này, tâm của hệ tọa độ cực sẽ dời về điểm $(1, 2)$.

Miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^2 [2(1 + r \cos \varphi) + (2 + r \sin \varphi)] r dr \right] d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^2 (4r + 2r^2 \cos \varphi + 2r^2 \sin \varphi) dr \right] d\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[2r^2 + 2 \cos \varphi \cdot \frac{r^3}{3} + 2 \sin \varphi \cdot \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(8 + \frac{16}{3} \cos \varphi + \frac{16}{3} \sin \varphi \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \left[8\varphi + \frac{16}{3} \sin \varphi - \frac{16}{3} \cos \varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8\pi + \frac{32}{3}.$$

Vậy $I = 8\pi + \frac{32}{3}$.

Trường hợp 3: Miền D là ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$. Ta dùng phép đổi biến

$$\frac{x}{a} = r \cos \varphi, \frac{y}{b} = r \sin \varphi, \tan \varphi = \frac{y}{x} \cdot \frac{a}{b}$$

Định thức Jacobian là

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{vmatrix} = abr.$$

Định lý 1.8

Nếu $f(x, y)$ là hàm liên tục trên miền D được xác định trong hệ tọa độ cực mở rộng:

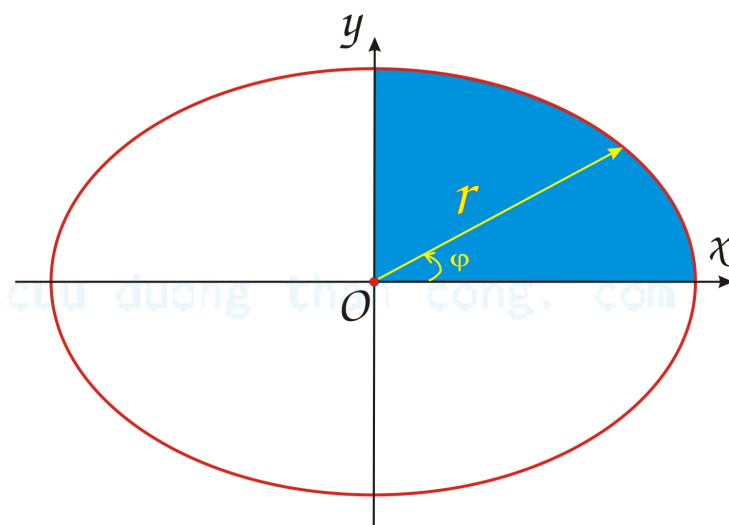
$$D = \{(r, \varphi) : r_1 \leq r \leq r_2, \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1}^{r_2} f(ar \cos \varphi, br \sin \varphi) \cdot |J| dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1}^{r_2} f(ar \cos \varphi, br \sin \varphi) \cdot abr dr d\varphi.$$

(1.8)

Ví dụ 1.3.5. Tính $I = \iint_D (x+1) dx dy$, với $D : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.



Hình 1.29: Miền $D : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Giải. Đổi biến $\frac{x}{3} = r \cos \varphi, \frac{y}{2} = r \sin \varphi$. Thay vào bất đẳng thức $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \Rightarrow r \leq 1$, và $x \geq 0 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow \sin \varphi \geq 0$ từ đó suy ra $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

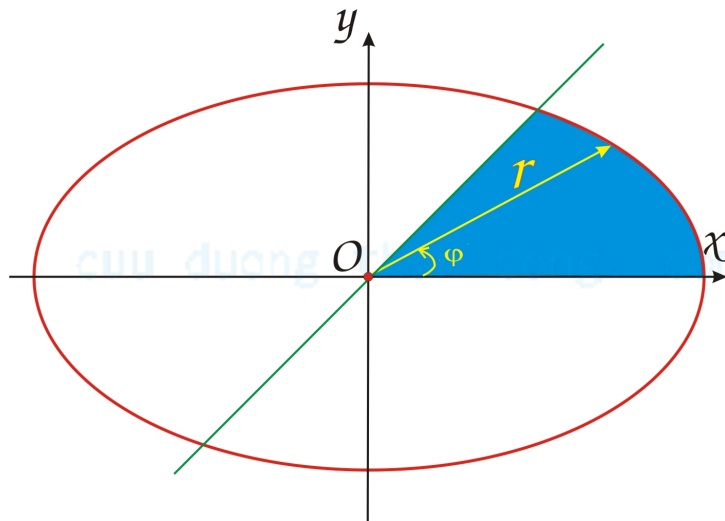
Lúc này, miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$.

Định thức Jacobian là $abr = 3.2.r$ Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 [(3r \cos \varphi) + 1] \cdot 3.2.r dr \right] d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^1 (6r + 18r^2 \cos \varphi) dr \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[3r^2 + 18 \cos \varphi \cdot \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_0^{\pi/2} (3 + 6 \cos \varphi) d\varphi = [3\varphi + 6 \sin \varphi]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2} + 6. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{3\pi}{2} + 6$.

Ví dụ 1.3.6. Tính $I = \iint_D x dx dy$, với $D : \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, y \leq x$.



Hình 1.30: Miền $D : \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, y \leq x$.

Giải. Đổi biến $\frac{x}{\sqrt{3}} = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Thay vào bất đẳng thức $\frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1 \Rightarrow r \leq 1$, và $x \geq 0 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow \sin \varphi \geq 0; y \leq x \Rightarrow \sin \varphi \leq \sqrt{3} \cos \varphi$, từ đó suy ra $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ và $\tan \varphi \leq \sqrt{3} \Rightarrow \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

Lúc này, miền D được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$.

Định thức Jacobian là $abr = \sqrt{3}.1.r$ Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/3} \left[\int_0^1 [\sqrt{3}r \cos \varphi] \cdot \sqrt{3}.1.r dr \right] d\varphi = \int_0^{\pi/3} \left[\int_0^1 (3r^2 \cos \varphi) dr \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/3} \left[3 \cos \varphi \cdot \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_0^{\pi/3} (\cos \varphi) d\varphi = [\sin \varphi]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

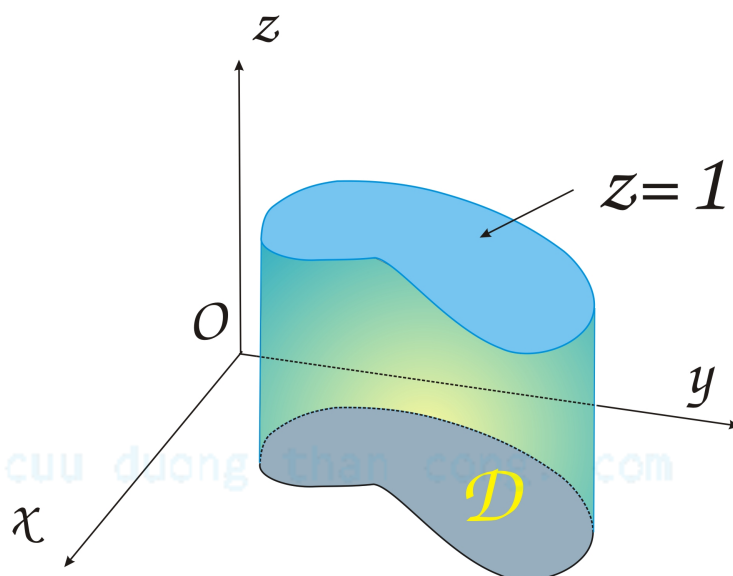
1.4 Ứng dụng hình học của tích phân kép

1.4.1 Tính diện tích miền D

Định lý 1.9

Diện tích miền D được tính theo công thức

$$S_D = \iint_D 1 \cdot dx dy \quad (1.9)$$



Hình 1.31: Ứng dụng tích phân kép tính diện tích miền D

Ví dụ 1.4.1. Tính diện tích miền D giới hạn bởi $y = (x+1)^2$, $x = y - y^3$, $x = -1$, $y = -1$.

Giải. Ta cần chia miền D thành hai miền D_1 và D_2 để thực hiện tính toán

$$S_D = S_{D_1} + S_{D_2}$$

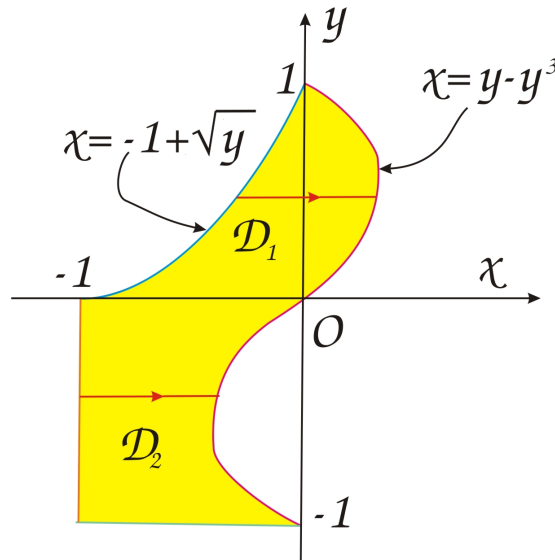
Miền D_1 được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -1 + \sqrt{y} \leq x \leq y - y^3 \end{cases}$. Khi đó,

$$S_{D_1} = \int_0^1 \left[\int_{-1+\sqrt{y}}^{y-y^3} dx \right] dy = \int_0^1 [x]_{x=-1+\sqrt{y}}^{x=y-y^3} dy = \int_0^1 (y - y^3 + 1 - \sqrt{y}) dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + y - \frac{2y^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{7}{12}.$$

Miền D_2 được giới hạn bởi $\begin{cases} -1 \leq y \leq 0 \\ -1 \leq x \leq y - y^3 \end{cases}$. Khi đó,

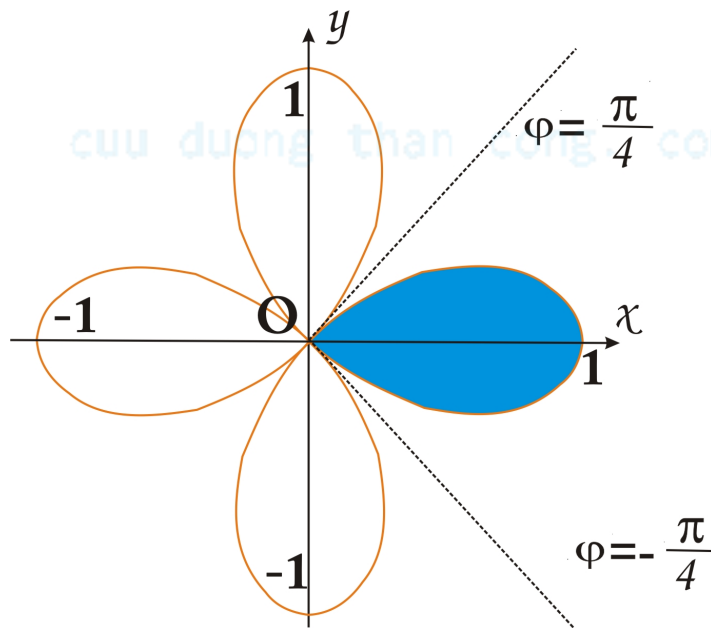
$$S_{D_2} = \int_{-1}^0 \left[\int_{-1}^{y-y^3} dx \right] dy = \int_{-1}^0 [x]_{x=-1}^{x=y-y^3} dy = \int_{-1}^0 (y - y^3 + 1) dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + y \right]_{-1}^0 = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_D = S_{D_1} + S_{D_2} = \frac{7}{12} + \frac{3}{4} = \frac{4}{3}.$$



Hình 1.32: Miền D giới hạn bởi $y = (x + 1)^2$, $x = y - y^3$, $x = -1$, $y = -1$.

Ví dụ 1.4.2. Tính diện tích miền $D = \{(r, \varphi) : -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \cos 2\varphi\}$



Hình 1.33: Miền $D = \{(r, \varphi) : -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \cos 2\varphi\}$.

Giải. Diện tích miền D là

$$\begin{aligned} S_D &= \iint_D dx dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\int_0^{\cos 2\varphi} r dr \right] d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\cos 2\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} \cdot \left[\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

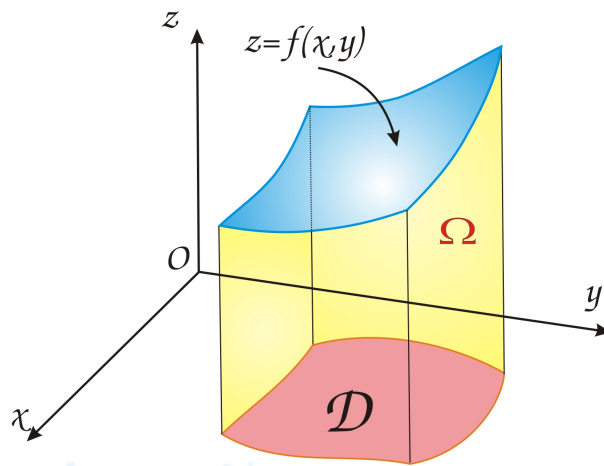
Vậy $S_D = \frac{\pi}{8}$.

1.4.2 Tính thể tích vật thể

Định lý 1.10

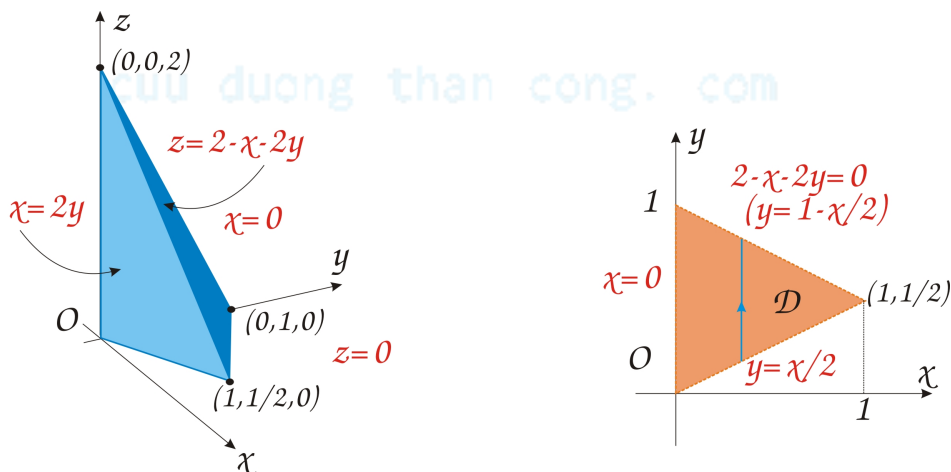
Thể tích của vật thể Ω được giới hạn trên bởi mặt cong $z = f(x, y)$, giới hạn dưới bởi miền D , giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song trục Oz , tựa trên biên của miền D được tính theo công thức

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1.10)$$

Hình 1.34: Vật thể Ω

Ví dụ 1.4.3. Tính thể tích của vật thể Ω giới hạn bởi $z = 0, x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0$.

Giải. Vật thể Ω được giới hạn bởi mặt trên $z = 2 - x - 2y$ và mặt dưới $z = 0$, hình chiếu D xuống mặt phẳng Oxy được giới hạn bởi những đường thẳng $x = 2y, x = 0$ và giao tuyến giữa mặt phẳng $z = 2 - x - 2y$ và mặt phẳng $Oxy : z = 0$. Phương trình giao tuyến này trong mặt phẳng Oxy là $2 - x - 2y = 0$.

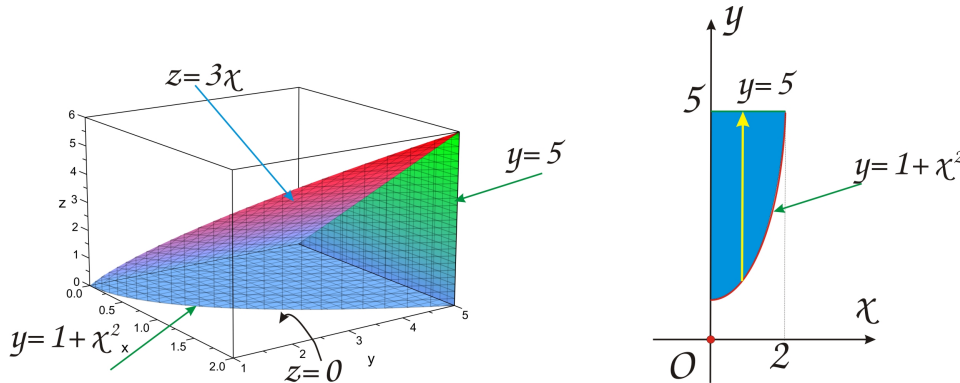
Hình 1.35: Vật thể Ω giới hạn bởi $z = 0, x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0$ và hình chiếu D

Như vậy, thể tích của vật thể Ω là

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(2-x-2y)-0]dxdy = \int_0^1 \left[\int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y)dy \right] dx = \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx = \\ &= \int_0^1 \left[2\left(1-\frac{x}{2}\right) - x\left(1-\frac{x}{2}\right) - \left(1-\frac{x}{2}\right)^2 - \left(2\cdot\frac{x}{2} - x\cdot\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) \right] dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vậy $V = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 1.4.4. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$ (phần $x > 0$)



Hình 1.36: Vật thể Ω giới hạn bởi $y = 1 + x^2, z = 3x, y = 5, z = 0$ (phần $x > 0$) và hình chiếu D

Giải. Vật thể Ω được giới hạn bởi mặt trên $z = 3x$ và mặt dưới $z = 0$, hình chiếu D xuống mặt phẳng Oxy được giới hạn bởi những đường thẳng $y = 1 + x^2, y = 5, x = 0$.

Như vậy, thể tích của vật thể Ω là

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (3x - 0)dxdy = \int_0^2 \left[\int_{1+x^2}^5 3xdy \right] dx = \int_0^2 [3xy]_{y=1+x^2}^{y=5} dx = \\ &= \int_0^2 [3x \cdot 5 - 3x(1+x^2)] dx = 12. \end{aligned}$$

Vậy $V = 12$.

Ví dụ 1.4.5. Tính thể tích của vật thể Ω giới hạn bởi $z = 1 - x^2 - y^2$, và $z = 0$.

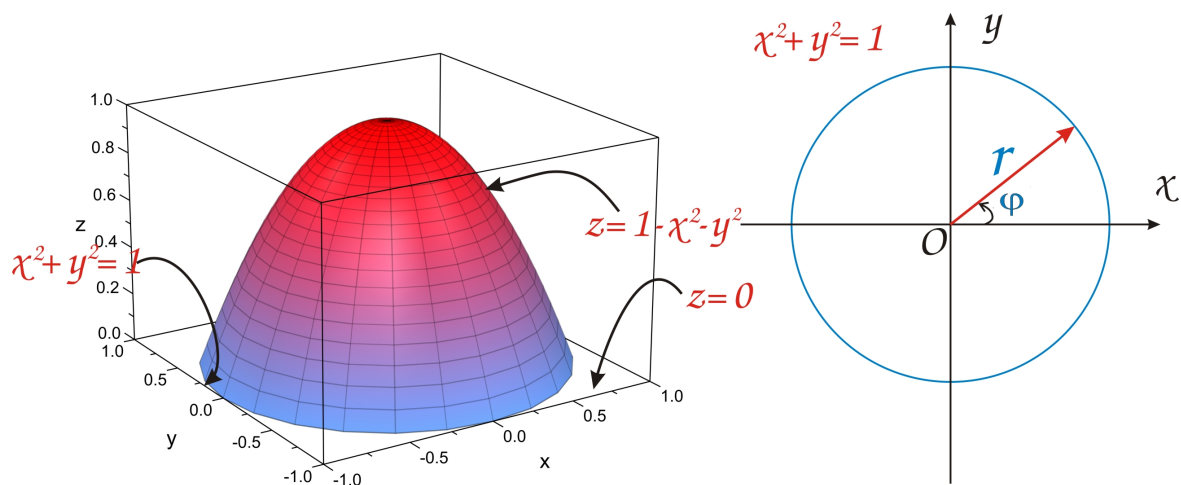
Giải. Nếu thay $z = 0$ vào phương trình của paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$, ta được $x^2 + y^2 = 1$. Điều này có nghĩa là phần giao của paraboloid và $z = 0$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Do đó vật thể Ω được giới hạn trên bởi paraboloid và giới hạn dưới bởi hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$.

Khi đổi sang hệ tọa độ cực, bằng cách đặt $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, ta thu được miền D trong hệ tọa độ cực được xác định như sau:

$$D = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$$

Thể tích của vật thể Ω cần tìm là

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - r^2) \cdot r dr \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi =$$

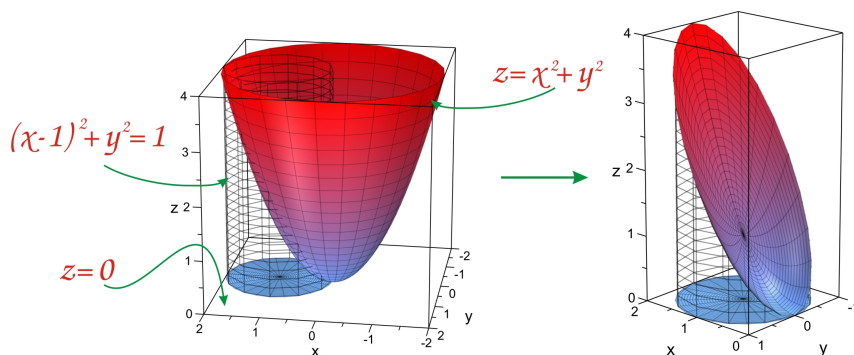


Hình 1.37: Vật thể Ω và hình chiếu $D = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \left[\frac{1}{4} \cdot \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $V = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 1.4.6. Tính thể tích của vật thể Ω giới hạn trên bởi $z = x^2 + y^2$, giới hạn dưới bởi $z = 0$, và nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 2x$.



Hình 1.38: Xác định vật thể Ω

Giải. Khi đổi sang hệ tọa độ cực, bằng cách đặt $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ và thay vào phương trình mặt trụ $x^2 + y^2 = 2x$, ta được

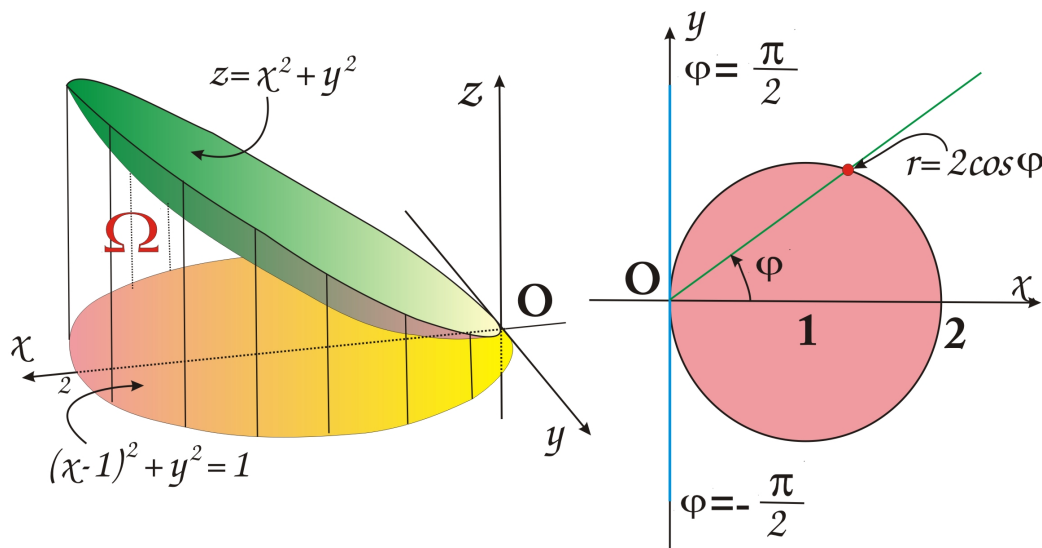
$$r^2 = 2r \cos \varphi \Rightarrow r = 2 \cos \varphi.$$

Như vậy miền D trong hệ tọa độ cực được xác định như sau:

$$D = \{(r, \varphi) : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi\}$$

Thể tích của vật thể Ω cần tìm là

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \cdot r dr \right] d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2 \cos \varphi} d\varphi = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi =$$



Hình 1.39: Vật thể Ω và hình chiếu $D = \{(r, \varphi) : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi\}$

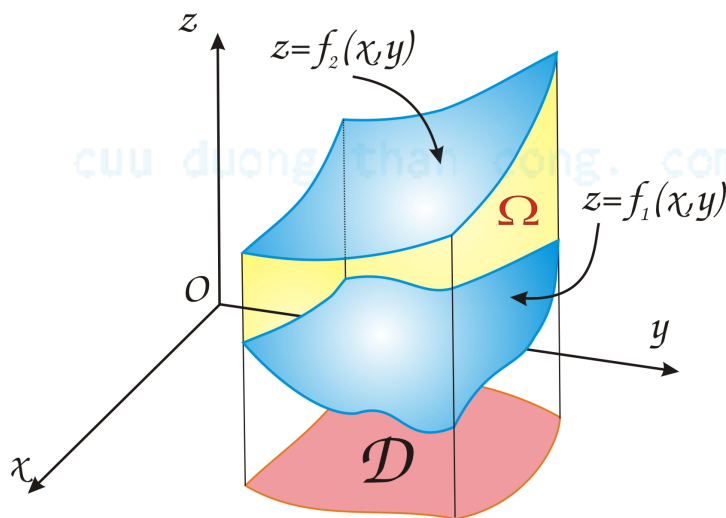
$$= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Vậy $V = \frac{3\pi}{2}$

Định lý 1.11

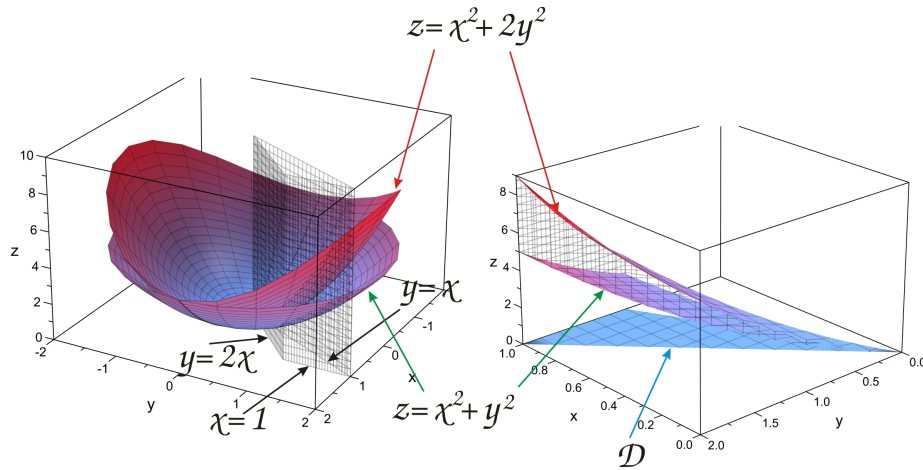
Thể tích của vật thể được **giới hạn trên** bởi mặt cong $z = f_2(x, y)$, **giới hạn dưới** bởi miền $z = f_1(x, y)$, giới hạn xung quanh bởi những đường thẳng song song trục Oz , tựa trên biên của miền D được tính theo công thức

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy. \quad (1.11)$$

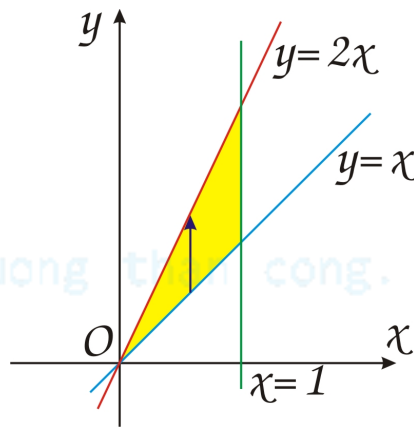


Hình 1.40: Vật thể Ω

Ví dụ 1.4.7. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $y = x, y = 2x, x = 1, z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2$.



Hình 1.41: Vật thể giới hạn bởi $y = x, y = 2x, x = 1, z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2$.



Hình 1.42: Hình chiếu D giới hạn bởi $y = x, y = 2x, x = 1$.

Giải. Vật thể Ω bị **giới hạn trên** bởi mặt $z = x^2 + 2y^2$, **giới hạn dưới** bởi mặt $z = x^2 + y^2$, và giới hạn xung quanh bởi các mặt trụ $y = x, y = 2x, x = 1$.

Do đó, hình chiếu D của vật thể Ω được giới hạn bởi $y = x, y = 2x, x = 1$

$$\Rightarrow D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}.$$

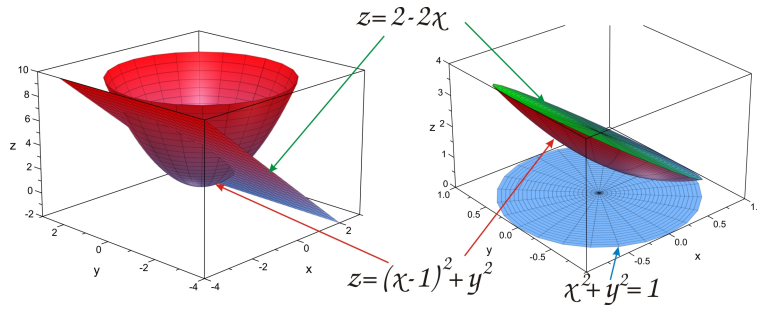
Thể tích vật thể Ω cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(x^2 + 2y^2) - (x^2 + y^2)] dx dy = \int_0^1 \left[\int_x^{2x} y^2 dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 \left[\frac{8x^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right] dx = \\ &= \int_0^1 \frac{7x^3}{3} dx = \left[\frac{7x^4}{12} \right]_0^1 = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.4.8. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi $2x + z = 2$ và $(x - 1)^2 + y^2 = z$

Giải. Ta cần xác định giữa hai mặt cong $z = 2 - 2x$ và $z = (x - 1)^2 + y^2$ mặt nào nằm trên và mặt nào nằm dưới. Xét bất đẳng thức

$$2 - 2x \geq (x - 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$



Hình 1.43: Vật thể giới hạn bởi $2x + z = 2$ và $(x - 1)^2 + y^2 = z$

Ta thu được $x^2 + y^2 \leq 1$ là một **miền đóng bị chặn** nên dấu bất đẳng thức trên là đúng.

Vật thể Ω sẽ bị **giới hạn trên** bởi mặt $z = 2 - 2x$, **giới hạn dưới** bởi mặt $z = (x - 1)^2 + y^2$.

Ta cần xác định hình chiếu của vật thể Ω . Để làm được điều này, ta tìm giao tuyến của hai mặt $z = 2 - 2x$ và $z = (x - 1)^2 + y^2$ và chiếu giao tuyến này xuống mặt phẳng Oxy .

$$\begin{cases} z = 2 - 2x \\ z = (x - 1)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - 2x \\ 2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - 2x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Như vậy giao tuyến của hai mặt $z = 2 - 2x$ và $z = (x - 1)^2 + y^2$ cũng là giao tuyến của mặt phẳng $z = 2 - 2x$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Do đó, hình chiếu D của vật thể Ω là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\Rightarrow D = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Thể tích vật thể Ω cần tìm là

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [(2 - 2x) - ((x - 1)^2 + y^2)] dx dy = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - r^2) r dr \right] d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \right) d\varphi = \frac{1}{4} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

1.5 Bài tập

1.5.1 Tính tích phân kép sử dụng định lý Fubini

Bài tập 1.5.1. Tính tích phân

1. $I = \iint_D x \cos y dx dy$, với D được giới hạn bởi $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.
2. $I = \iint_D (x + y) dx dy$, với D được giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.
3. $I = \iint_D y^3 dx dy$, với D là tam giác ABC , với $A(0, 2)$, $B(1, 1)$, $C(3, 2)$.
4. $I = \iint_D (2x - y) dx dy$, với D là tam giác OAB , với $O(0, 0)$, $A(2, 4)$, $B(6, 0)$.
5. $I = \iint_D (x + y) dx dy$, với D là tam giác OAB với $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(2, 0)$.

6. $I = \iint_D (x + 2y) dx dy$, với D được giới hạn bởi $y = 2x^2$, $y = 1 + x^2$.
7. $I = \iint_D (xy) dx dy$, với D được giới hạn bởi $y = x - 1$, $y^2 = 2x + 6$.
8. $I = \iint_D \sin(y^2) dx dy$, với D được giới hạn bởi $y = x$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$.
9. $I = \iint_D (xy) dx dy$, với D được giới hạn bởi $y = 2 - x^2$, $y = x$.
10. $I = \iint_D |y - x^2| dx dy$, với D được giới hạn bởi $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Bài tập 1.5.2. Tính tích phân

1. $I = \int_0^2 dy \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx$

Bài tập 1.5.3. Đổi thứ tự lấy tích phân của tích phân kép sau:

1. $\int_0^1 dy \int_0^{y^2+y} f(x, y) dx$

1.5.2 Tính tích phân kép sử dụng hệ tọa độ cực

Bài tập 1.5.4. Tính tích phân

1. $I = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq y \leq x\sqrt{3}$.
2. $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 2x$, $y \leq -x$.
3. $I = \iint_D (x + 1) dx dy$, với $D : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x$, $-x \leq y \leq x\sqrt{3}$.
4. $I = \iint_D x dx dy$ với D là nửa hình tròn $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 1$.
5. $I = \iint_D x dx dy$, với $D : x^2 + y^2 \leq 2x$, $x^2 + y^2 \leq 2y$.

1.5.3 Ứng dụng của tích phân kép

Bài tập 1.5.5. Tính diện tích miền phẳng:

1. D giới hạn bởi $x + y^2 = 1$, $y - x = 1$, $x = 0$
2. D giới hạn bởi $y = x^2$, $y = 2 - x^2$
3. D giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y \leq x$
4. D giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 6y$, $y \geq x\sqrt{3}$, $x \geq 0$
5. $D : \{|x| + |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Bài tập 1.5.6. Tính thể tích vật thể:

1. Ω giới hạn bởi $z = 16 - x^2 - 2y^2$, $y = 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 0$, $z = 0$.
2. Ω giới hạn bởi $z = x^2 + y^2$, $y = 2x$, $y = x^2$, $z = 0$.

3. Ω giới hạn bởi $z = 0, z = 1 - x^2 - y^2$.

4. Ω giới hạn bởi $z = 4 - x^2 - y^2, z = 2$.

Bài tập 1.5.7. Tính diện tích của phần mặt

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nằm trong hình nón $z^2 = x^2 + y^2$.

2. $z = xy$ nằm trong hình trụ $x^2 + y^2 = 1$.

3. $x^2 + z^2 = 1$ nằm trong hình trụ $y^2 + z^2 = 1$.

Lời giải bài tập chương 4

1.5.1 1. $I = \sin^2 \left(\frac{1}{2} \right)$

2. $I = \frac{3}{10}$.

3. $I = \frac{147}{20}$.

4. $I = 48$.

5. $I = \frac{4}{3}$.

6. $I = \frac{32}{15}$.

7. $I = 36$.

8. $I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 1$.

9. $I = \frac{9}{8}$

10. $I = \frac{11}{15}$

1.5.2 1. $I = e - 1$

1.5.3 1. $\int_0^2 dx \int_{\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}}^1 f(x, y) dy$

1.5.4 1. $I = \frac{2\pi}{9}$.

2. $I = \frac{16 - 10\sqrt{2}}{9}$.

3. $I = \frac{35\pi}{6} + \frac{67\sqrt{3}}{24} + \frac{37}{6}$.

4. $I = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$.

5. $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

1.5.5 1. $S_D = \frac{19}{6}$

2. $S_D = \frac{8}{3}$

3. $S_D = \frac{9\pi}{4} + \frac{3}{2}$

$$4. S_D = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

$$5. S_D = 2\pi - 4.$$

$$1.5.6 \quad 1. V = 48.$$

$$2. V = \frac{216}{35}.$$

$$3. V = \frac{\pi}{2}.$$

$$4. V = 2\pi.$$

$$1.5.7 \quad 1. S = 2\pi(2 - \sqrt{2})$$

$$2. S = \frac{2}{3}\pi(\sqrt{2} - 1)$$

$$3. S = 16.$$

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com