

Mục lục

Lời nói đầu	i
Những kí hiệu	ii
Mục lục	1
Chương 1. TÍCH PHÂN BỘI BA	2
1.1. Định nghĩa tích phân bội ba	2
1.1.1. Bài toán tính khối lượng của vật thể	2
1.1.2. Định nghĩa	3
1.2. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề-các	3
1.2.1. Định lý Fubini	3
1.2.2. Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω	4
1.3. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ	8
1.3.1. Hệ tọa độ trụ	8
1.3.2. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ	8
1.4. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu	12
1.4.1. Hệ tọa độ cầu	12
1.4.2. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu	13
1.5. Công thức đổi biến tổng quát	17
1.5.1. Định thức Jacobian	17
1.5.2. Tích phân bội ba khi thực hiện đổi biến	17
1.5.3. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ	17
1.5.4. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu	18
1.5.5. Tích phân bội ba trên miền hình cầu $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$	19
1.5.6. Tích phân bội ba trên miền hình ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	20
1.6. Ứng dụng hình học của tích phân bội ba tính thể tích vật thể	22
1.7. Thực hành MatLab	23
1.7.1. Vẽ vật thể trong hệ trục tọa độ Đề-các	23
1.7.2. Vẽ vật thể trong hệ trục tọa độ trụ	26
1.7.3. Vẽ vật thể trong hệ trục tọa độ cầu	27

1.8. Bài tập	28
1.8.1. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề-các	28
1.8.2. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ	29
1.8.3. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu	29
1.8.4. Ứng dụng hình học của tích phân bội ba	30

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com

TÍCH PHÂN BỘI BA

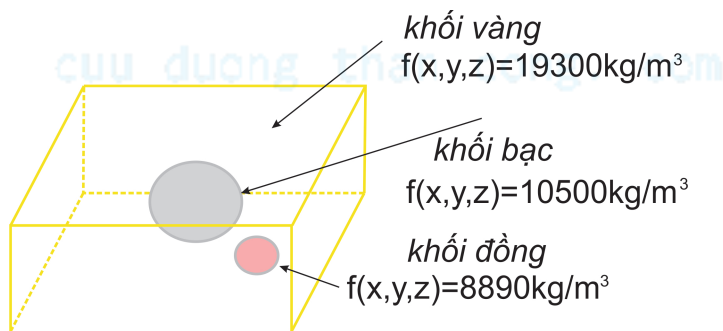
1.1. Định nghĩa tích phân bội ba.....	2
1.2. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề-các.....	3
1.3. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ.....	8
1.4. Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu.....	12
1.5. Công thức đổi biến tổng quát.....	17
1.6. Ứng dụng hình học của tích phân bội ba tính thể tích vật thể.....	22
1.7. Thực hành MatLab.....	23
1.8. Bài tập.....	28

cuu duong than cong. com

1.1 Định nghĩa tích phân bội ba

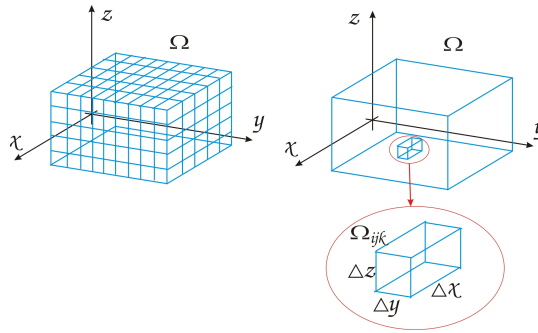
1.1.1 Bài toán tính khối lượng của vật thể

Cho vật thể Ω trong không gian có **phân bố khối lượng không đồng đều** theo thể tích của nó. Sự phân bố này trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ được mô tả bởi hàm mật độ $f(x, y, z)$ (hay còn gọi là khối lượng riêng (kg/m^3)). Hãy tính khối lượng M của vật thể, biết vật thể Ω là hình hộp chữ nhật:



Hình 1.1: Khối kim loại không đồng chất

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}.$$

Hình 1.2: Miền hình hộp chữ nhật Ω

Đầu tiên, chúng ta chia miền Ω thành những hộp hình chữ nhật nhỏ. Chúng ta chia đoạn $[a, b]$ thành m đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ với độ dài $\Delta x = \frac{b-a}{m}$, chia đoạn $[c, d]$ thành n đoạn nhỏ $[y_{j-1}, y_j]$ với độ dài $\Delta y = \frac{d-c}{n}$, và chia đoạn $[r, s]$ thành p đoạn nhỏ $[z_{k-1}, z_k]$ với độ dài $\Delta z = \frac{s-r}{p}$. Bằng cách vẽ những đường thẳng song song với các trục tọa độ và đi qua các điểm chia, chúng ta thu được hình hộp chữ nhật nhỏ với thể tích $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

$$\Omega_{ijk} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\}$$

Nếu chúng ta chọn một điểm tùy ý $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in \Omega_{ijk}$ thì ta sẽ được tổng Riemann của tích phân bội ba. Như vậy, khối lượng của vật thể được tính gần đúng là

$$M \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

1.1.2 Định nghĩa

Tương tự, như tích phân kép chúng ta sẽ định nghĩa tích phân bội ba:

Định nghĩa 1.1. Tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trên miền Ω là

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{m, n, p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

nếu giới hạn này tồn tại. Lúc này $f(x, y, z)$ được gọi là **hàm khả tích** trên Ω .

1.2 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề-các

1.2.1 Định lý Fubini

Tương tự như tích phân kép, ta có định lý Fubini để tính tích phân bội ba như sau:

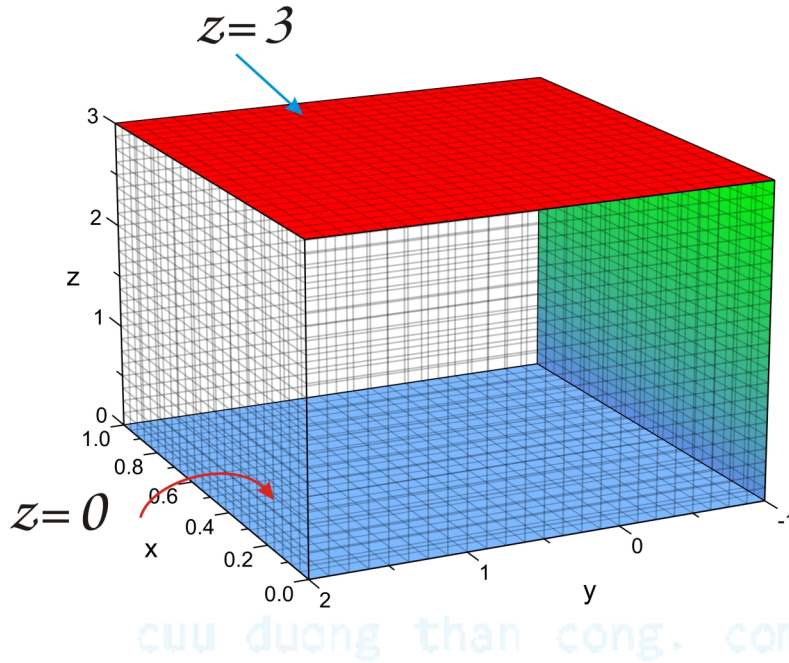
Định lý 1.1. (Định lý Fubini). Cho $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trên miền $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$. Khi đó

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_r^s f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx.$$

Chú ý. Theo định lý Fubini, khi lấy tích phân theo z theo ta xem z là biến số, còn x, y là hằng số. Sau đó lấy tích phân theo y thì ta xem y là biến số, còn x là hằng số. Cuối cùng, ta sẽ lấy tích phân theo x . Vì vai trò của x, y, z như nhau nên ta có $3! = 6$ cách lấy tích phân khác nhau theo thứ tự của các biến x, y, z .

Ví dụ 1.2.1. Tính $I = \iiint_{\Omega} xyz^2 dx dy dz$, với Ω là miền hình hộp chữ nhật

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$



Hình 1.3: Hình hộp chữ nhật $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

Giải. Chúng ta có thể chọn một trong sáu cách lấy tích phân theo thứ tự các biến. Nếu chúng ta chọn lấy tích phân đầu tiên theo x , sau đó theo y và cuối cùng theo z thì ta được

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dy dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\int_0^1 xyz^2 dx \right] dy dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[yz^2 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dy dz = \\ &= \int_0^3 \left[\int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dy \right] dz = \int_0^3 \left[\frac{z^2 \cdot y^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz = \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \left[\frac{z^3}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{27}{4}$.

1.2.2 Tích phân bội ba trên miền bị chặn tổng quát Ω

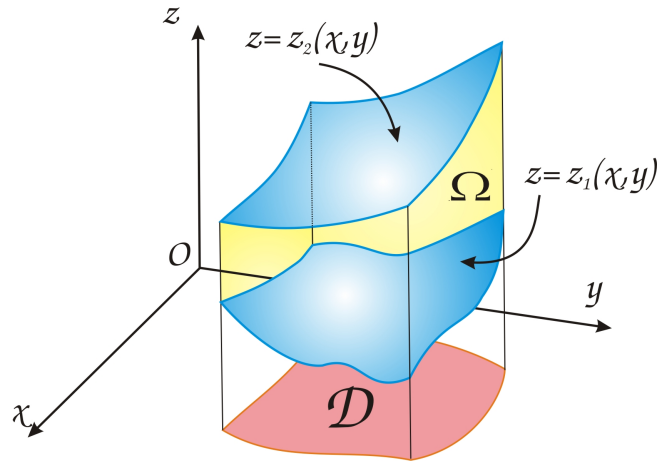
Cho Ω là miền bị chặn bất kỳ, tương tự như trong bài tích phân kép, ta có thể lấy hình hộp chữ nhật E chứa miền Ω , sau đó, chúng ta xây dựng một hàm mới

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega \\ 0, & (x, y, z) \in E \setminus \Omega \end{cases}$$

Khi đó

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E F(x, y, z) dx dy dz.$$

Như vậy, tương tự như tích phân kép, chúng ta cũng sẽ có định lý sau:



Hình 1.4: Miền $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$.

Định lý 1.2. Cho miền $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, trong đó D là hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oxy . Khi đó

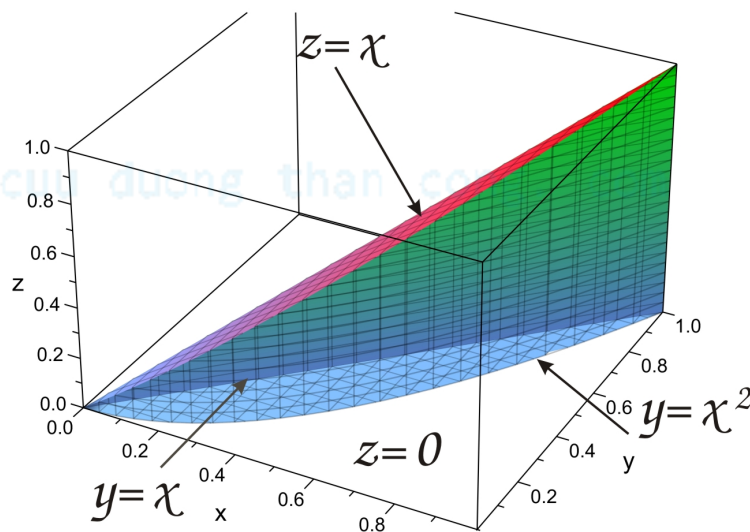
$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

Chú ý. Khi tính tích phân bội ba, chúng ta phải xác định được hình chiếu D của vật thể V và chuyển về tính tích phân kép. Khi tính tích phân của $f(x, y, z)$ theo biến z thì ta xem z là biến số, còn x, y là hằng số.

Ví dụ 1.2.2. Tính tích phân bội ba

$$I = \iiint_{\Omega} (x + 2y) dx dy dz,$$

trong đó Ω được giới hạn bởi $x^2 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x$.



Hình 1.5: Vật thể $\Omega : x^2 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x$.

Giải. Theo công thức tính tích phân bội ba, ta có

$$I = \iint_D \left[\int_0^x (x+2y) dz \right] dx dy = \iint_D [xz + 2yz]_{z=0}^{z=x} dx dy = \iint_D (x^2 + 2yx) dx dy$$

với $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$. Áp dụng công thức tính tích phân kép, ta được

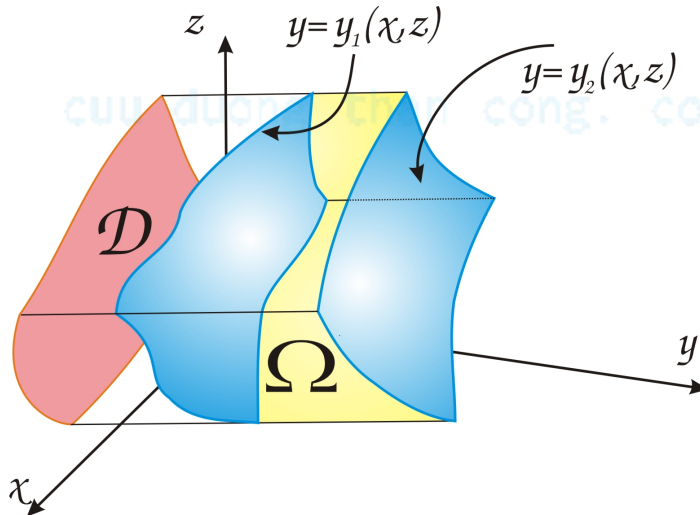
$$I = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (x^2 + 2yx) dy \right] dx = \int_0^1 [x^2 y + xy^2]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x^3 - x^4 + x^3 - x^5) dx = \frac{2}{15}.$$

Vậy $I = \frac{2}{15}$.

Vì vai trò của x, y, z như sau nên tương tự định lý trên ta có hai định lý sau:

Định lý 1.3. Cho miền $\Omega = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$, trong đó D là hình chiếu của miền V xuống mặt phẳng $0xz$. Khi đó

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$



Hình 1.6: Miền $\Omega = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)\}$.

Ví dụ 1.2.3. Tính tích phân bội ba

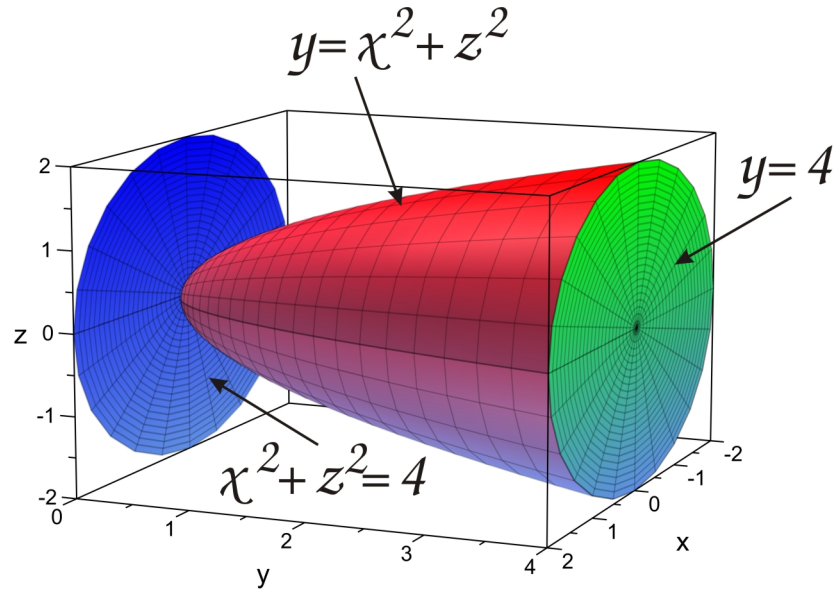
$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz,$$

trong đó Ω được giới hạn bởi $x^2 + z^2 \leq y \leq 4$.

Giải.

Vật thể Ω được giới hạn bởi mặt trên $y = 4$, mặt dưới $y = x^2 + z^2$. Để xác định hình chiếu của vật thể Ω ta tìm giao tuyến của $y = x^2 + z^2, y = 4$.

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Hình 1.7: Vật thể $\Omega : x^2 + z^2 \leq y \leq 4$.

Vậy giao tuyến của $y = x^2 + z^2$, $y = 4$ cũng là giao tuyến của mặt trụ $x^2 + z^2 = 4$ và $y = 4$. Từ đó ta có hình chiếu D của vật thể Ω xuống mặt phẳng Oxz là hình tròn $x^2 + z^2 \leq 4$.

Theo công thức tính tích phân bội ba, ta có

$$I = \iint_D \left[\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2+z^2} dy \right] dz dx = \iint_D \left[\sqrt{x^2+z^2} \cdot y \right]_{y=x^2+z^2}^{y=4} dz dx = \iint_D (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2+z^2} dz dx$$

với $D = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 4\}$.

Đổi sang hệ tọa độ cực bằng cách đặt $x = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ ta được

$$D = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

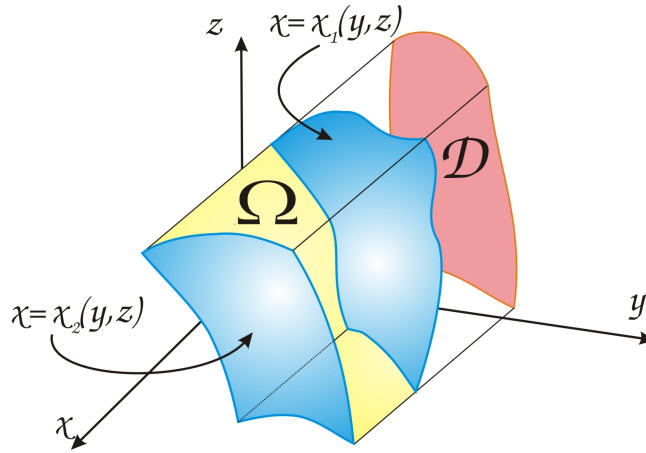
Áp dụng công thức tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực, ta có

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (4 - r^2) r \cdot r dr \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (4r^2 - r^4) dr \right] d\varphi = 2\pi \cdot \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{128\pi}{15}.$$

Định lý 1.4. Cho miền $\Omega = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\}$, trong đó D là hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oyz . Khi đó

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

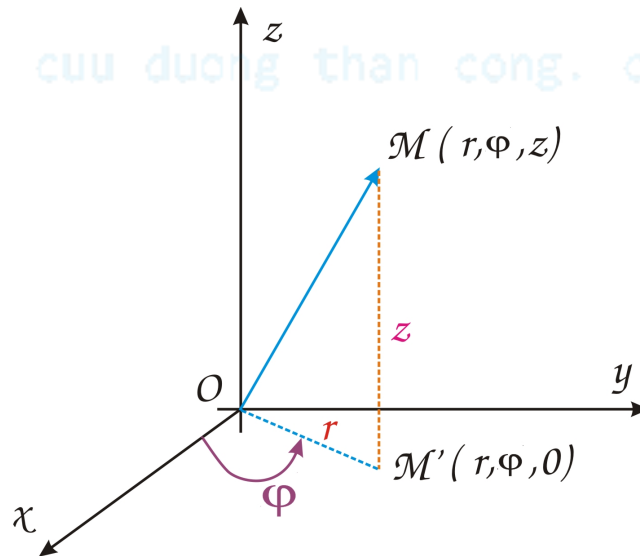


Hình 1.8: Miền $\Omega = \{(x, y, z) : (y, z) \in D, x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)\}$.

1.3 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

1.3.1 Hệ tọa độ trụ

Định nghĩa 1.2. Điểm $M(x, y, z)$ trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ được xác định duy nhất bởi bộ (r, φ, z) . Bộ (r, φ, z) được gọi là **tọa độ trụ** của điểm M .



Hình 1.9: Hệ tọa độ trụ

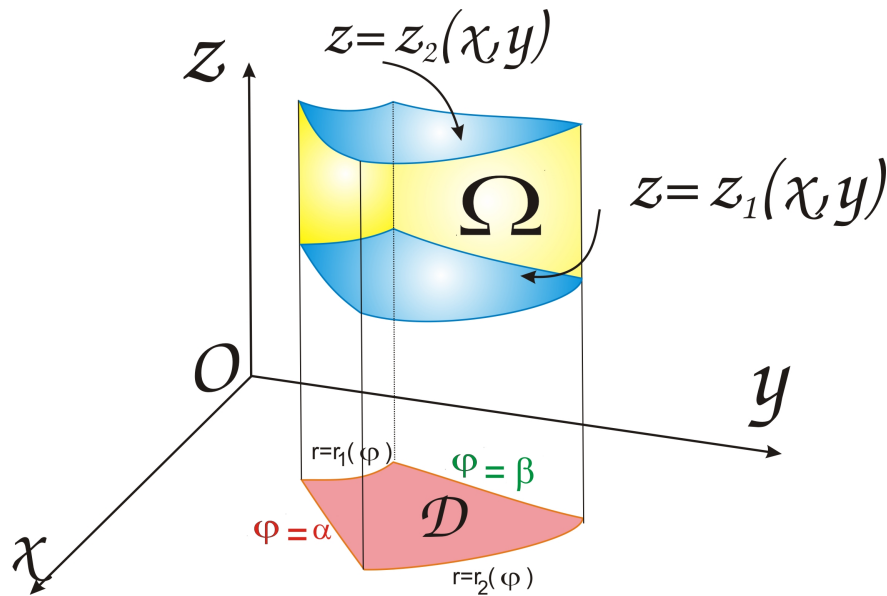
Công thức đổi biến từ tọa độ Decasters sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \varphi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

1.3.2 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

Trong hệ tọa độ trụ, cho miền Ω được xác định như sau:

$$\Omega = \{(r, \varphi, z) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

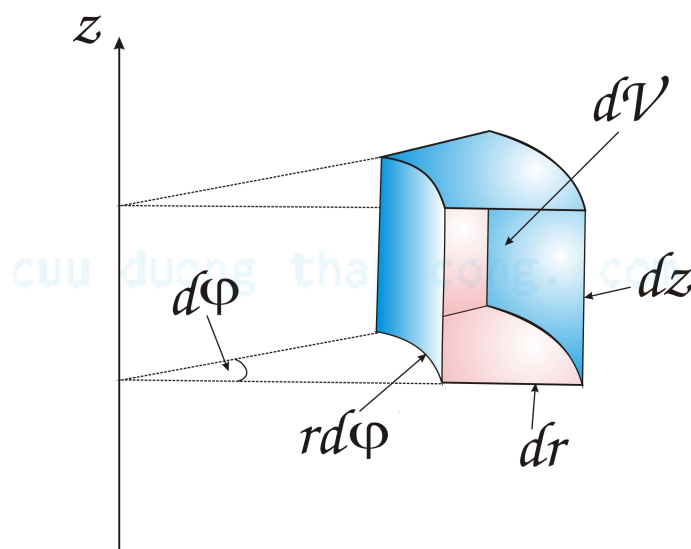
Hình 1.10: Vật thể Ω trong hệ tọa độ trụ

Khi tính tích phân bội ba ta chia miền Ω thành những miền nhỏ (mảnh trụ nhỏ trong hệ tọa độ trụ). Vì khi chia nhỏ thì ta sẽ xem mảnh trụ nhỏ này gần bằng với hình hộp với các chiều dài, rộng, cao lần lượt là Δr , $r\Delta\varphi$ (cung của đường tròn bán kính r , có góc ở tâm là $\Delta\varphi$) và Δz . Do đó thể tích của mảnh trụ nhỏ này là

$$\Delta V = \Delta r \cdot r \Delta\varphi \cdot \Delta z.$$

Sử dụng tính gần đúng của giới hạn khi tính tích phân đối với r và φ , ta có thể viết lại

$$dV = r dr d\varphi \cdot dz.$$

Hình 1.11: Thể tích của mảnh trụ nhỏ $dV = r dr d\varphi \cdot dz$.

Định lý 1.5. Cho miền $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, trong đó D là hình chiếu

của miền Ω xuống mặt phẳng Oxy và D xác định trong hệ tọa độ cực

$$D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \left[\int_{z_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{z_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz \right] r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Như vậy, khi tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ, ta phải xác định:

1. Mặt dưới $z = z_1(r, \varphi)$
2. Mặt trên $z = z_2(r, \varphi)$
3. Hình chiếu $D : \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \end{cases}$
4. Công thức

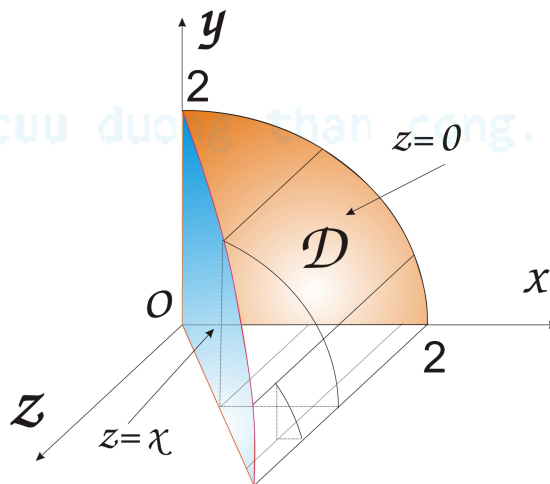
$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} dr \int_{z_1(r, \varphi)}^{z_2(r, \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dz$$

Chú ý. Khi tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ, đầu tiên, ta sẽ được về tích phân kép, sau đó tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực.

Ví dụ 1.3.1. Tính tích phân bội ba bằng cách đổi sang tọa độ trụ

$$I = \iiint_{\Omega} 2x dx dy dz,$$

trong đó $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2; 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}; 0 \leq z \leq x\}$



Hình 1.12: Miền $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2; 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}; 0 \leq z \leq x\}$

Giải. Miền Ω được giới hạn bởi mặt trên $z = x$, mặt dưới $z = 0$ và mặt xung quanh là một phần tư hình tròn $0 \leq y \leq 2; 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}$. Theo công thức tính tích phân bội ba, ta có

$$I = \iint_D \left[\int_0^x 2xdz \right] dxdy = \iint_D [2xz]_{z=0}^{z=x} dxdy = \iint_D 2x^2 dxdy$$

Với $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2; 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}$. Bằng phép đổi biến $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, chúng ta chuyển miền D sang hệ tọa độ cực. Khi đó

$$D = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Như vậy,

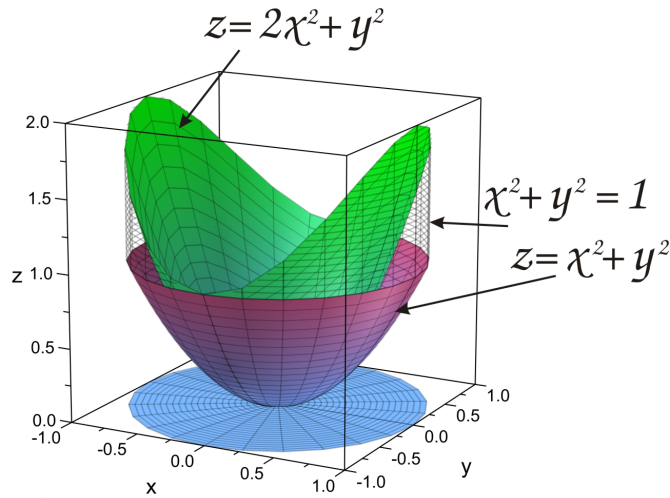
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^2 2r^2 \cos^2 \varphi r dr \right] d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left[\cos^2 \varphi \cdot \frac{2r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} d\varphi = \int_0^{\pi/2} 8 \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} 4(1 + \cos(2\varphi)) d\varphi = 4 \cdot \left[\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi. \end{aligned}$$

Vậy $I = 2\pi$.

Ví dụ 1.3.2. Tính tích phân bội ba bằng cách đổi sang tọa độ trụ

$$I = \iiint_{\Omega} z dxdydz,$$

trong đó Ω là phần trong của hình trụ $x^2 + y^2 = 1$ nằm giữa 2 mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 2x^2 + y^2$



Hình 1.13: Miền Ω là phần trong của hình trụ $x^2 + y^2 = 1$ nằm giữa 2 mặt $z = x^2 + y^2$ và $z = 2x^2 + y^2$

Giải. Miền Ω được giới hạn bởi mặt trên $z = 2x^2 + y^2$, mặt dưới $z = x^2 + y^2$ và mặt xung quanh là mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$. Theo công thức tính tích phân bội ba, ta có

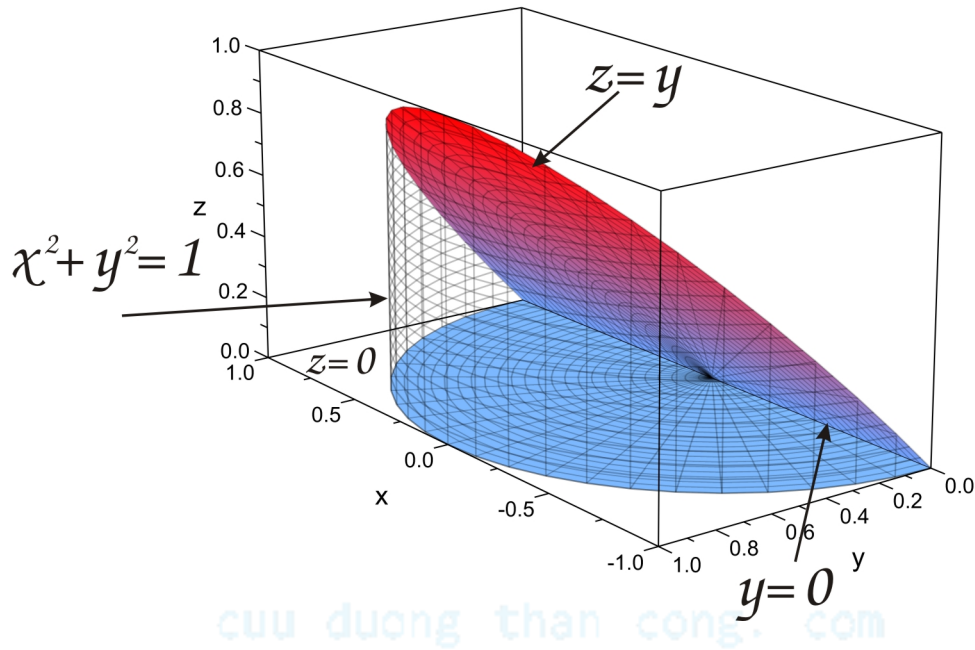
$$\begin{aligned} I &= \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+y^2} z dz = \iint_D \left(\frac{(2x^2 + y^2)^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^2 \cos^2 \varphi (r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2)}{2} r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi + 2) \right) d\varphi = \frac{11\pi}{48} \end{aligned}$$

Vậy $I = \frac{11\pi}{48}$.

Ví dụ 1.3.3. Tính tích phân bội ba bằng cách đổi sang tọa độ trụ

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

trong đó Ω được giới hạn bởi $z = 0, z = y, x^2 + y^2 = 1$ và $y \geq 0$.



Hình 1.14: Miền Ω được giới hạn bởi $z = 0, z = y, x^2 + y^2 = 1$ và $y \geq 0$.

Giải. Miền Ω được giới hạn bởi mặt trên $z = y$, mặt dưới $z = 0$ và mặt xung quanh là mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$, lấy phần $y \geq 0$. Theo công thức tính tích phân bội ba, ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint_D dx dy \int_0^y \frac{1}{x^2 + y^2} dz = \iint_D \frac{z}{x^2 + y^2} \Big|_0^y dx dy = \iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \frac{r \sin \varphi}{r^2} r dr = \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2. \end{aligned}$$

1.4 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

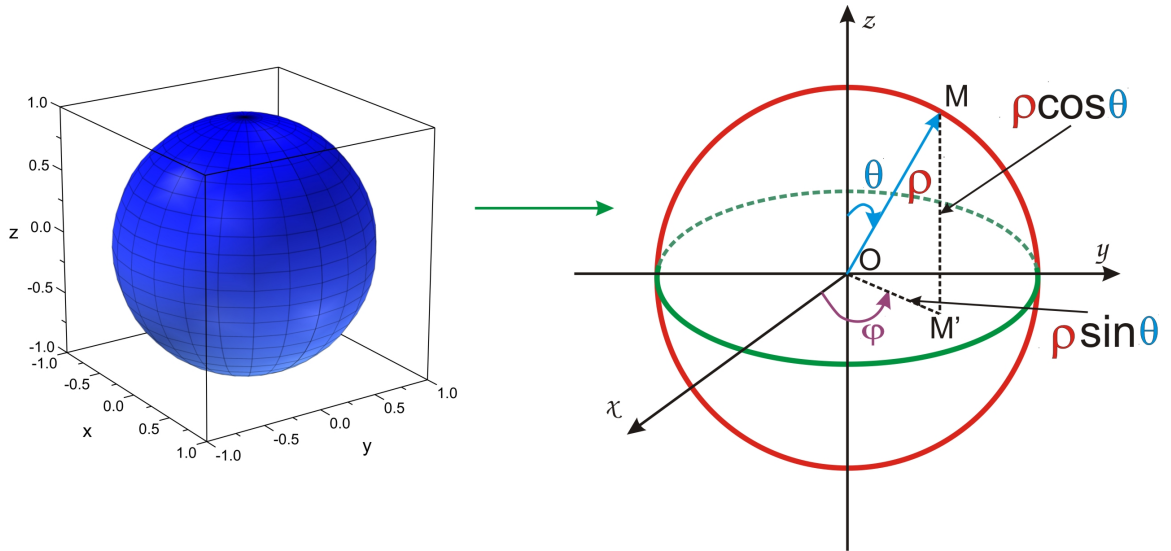
1.4.1 Hệ tọa độ cầu

Định nghĩa 1.3. Điểm $M(x, y, z)$ trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ được xác định duy nhất bởi bộ (θ, φ, ρ) . Bộ (θ, φ, ρ) được gọi là **tọa độ cầu** của điểm M .

Công thức đổi biến từ tọa độ Decasters sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$

với $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \rho > 0$.



Hình 1.15: Hệ tọa độ cầu

1.4.2 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Trong hệ tọa độ cầu, cho miền Ω được xác định như sau:

$$\Omega = \{(\rho, \varphi, \theta) : \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \alpha \leq \varphi \leq \beta, c \leq \theta \leq d\},$$

ở đây $\rho_1 \geq 0, \beta - \alpha \leq 2\pi, d - c \leq \pi$.

Khi tính tích phân bội ba ta chia miền Ω thành những miền nhỏ (mảnh cầu nhỏ trong hệ tọa độ cầu). Vì khi chia nhỏ thì ta sẽ xem mảnh cầu nhỏ này gần bằng với hình hộp với các chiều dài, rộng, cao lần lượt là $\Delta\rho, \rho\Delta\theta$ (cung của đường tròn bán kính ρ , có góc ở tâm là $\Delta\theta$) và $\rho\sin\theta\Delta\varphi$ (cung của đường tròn bán kính $\rho\sin\theta$, có góc ở tâm là $\Delta\varphi$). Do đó thể tích của mảnh cầu nhỏ này là

$$\Delta V = \rho^2 \sin\theta \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\theta$$

Sử dụng tính gần đúng của giới hạn khi tính tích phân đối với r và φ , ta có thể viết lại

$$dV = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Định lý 1.6. Khi đổi biến từ hệ tọa độ Đề-các sang hệ tọa độ cầu theo công thức

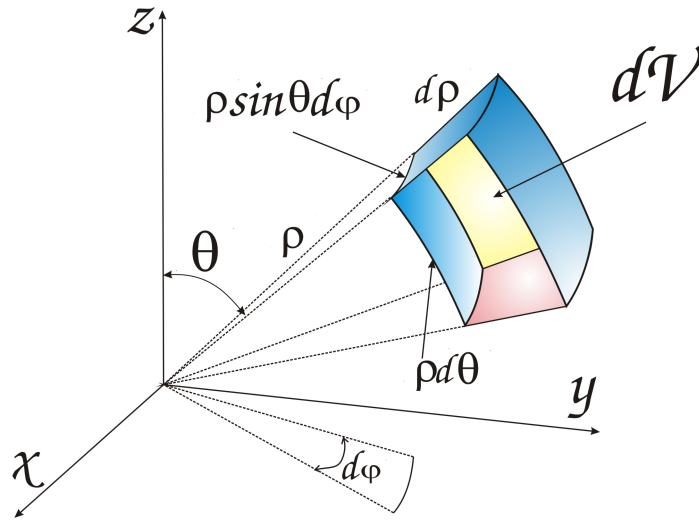
$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$$

thì tích phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V trong không gian xyz được xác định như sau:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cdot \cos\varphi \sin\theta, \rho \cdot \sin\varphi \sin\theta, \rho \cdot \cos\theta) \cdot \rho^2 \cdot \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

Như vậy, để tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu, ta làm như sau:

1. Vật thể Ω trong hệ tọa độ cầu được giới hạn bởi $\begin{cases} \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, & (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \\ \rho_1(\varphi, \theta) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi, \theta), & (\rho \geq 0) \end{cases}$



Hình 1.16: Thể tích của mảnh cầu nhỏ $dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$.

2. Công thức tính tích phân bội ba

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho$$

Chú ý.

1. Từ công thức

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cdot \sin \theta. \end{cases}$$

2. Hệ trục tọa độ cầu thường dùng đối với miền thể tích là **hình cầu** hoặc giao của **hình nón** và **hình cầu**.

Ví dụ 1.4.1. Tính tích phân bội ba bằng cách đổi sang tọa độ cầu

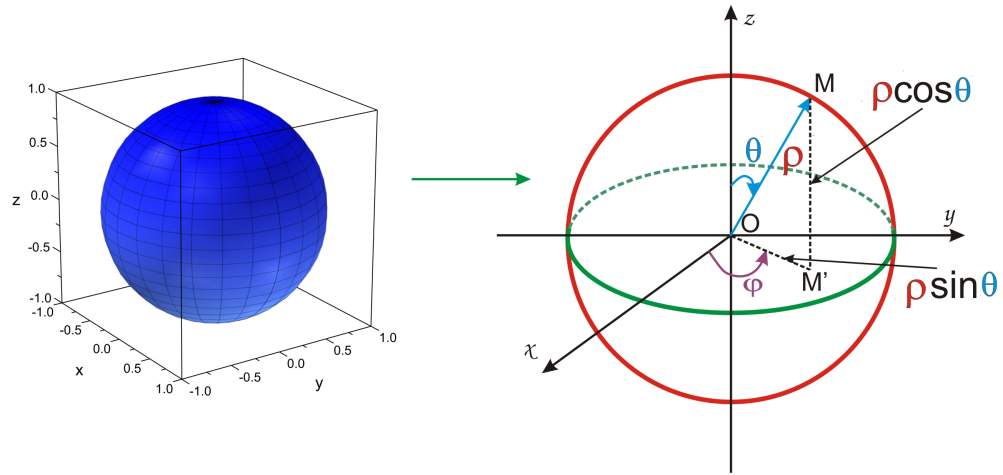
$$I = \iiint_{\Omega} (x + z) dx dy dz,$$

trong đó Ω là hình cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Giải. Vật thể Ω trong hệ tọa độ cầu được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho \cos \varphi \sin \theta + \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{1}{4} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \theta + \cos \theta) \sin \theta d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (\sin^2 \theta \cdot \sin \varphi + \sin \theta \cos \theta \cdot \varphi) \Big|_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (-\cos 2\theta) \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

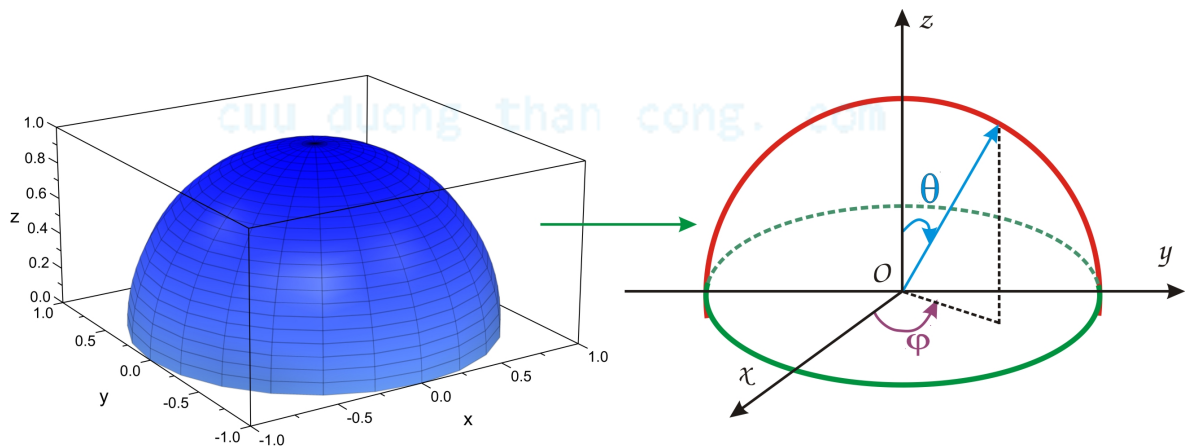
Vậy $I = 0$.

Hình 1.17: Hình cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Ví dụ 1.4.2. Tính tích phân bội ba bằng cách đổi sang tọa độ cầu

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

trong đó Ω là nửa trên hình cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Hình 1.18: Nửa trên hình cầu đơn vị $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Giải. Vật thể Ω trong hệ tọa độ cầu được giới hạn bởi

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

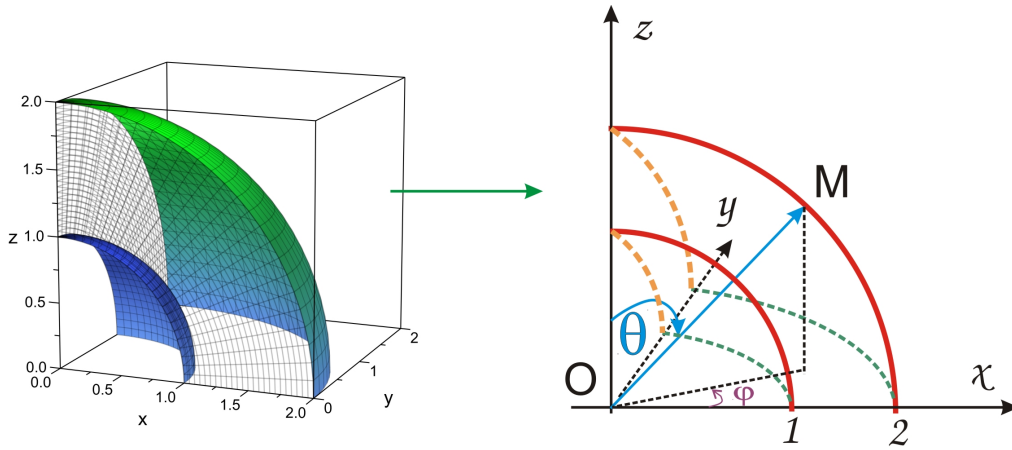
$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [(\rho \cos \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \sin \varphi \sin \theta)^2] \rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\pi}{15}.$$

Vậy $I = \frac{4\pi}{15}$.

Ví dụ 1.4.3. Tính tích phân bội ba bằng cách đổi sang tọa độ cầu

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

trong đó Ω nằm giữa hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở góc phần tám thứ nhất.



Hình 1.19: Vật thể Ω nằm giữa hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở góc phần tám thứ nhất.

Giải. Vật thể Ω trong hệ tọa độ cầu được giới hạn bởi

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq \rho \leq 2. \end{cases}$$

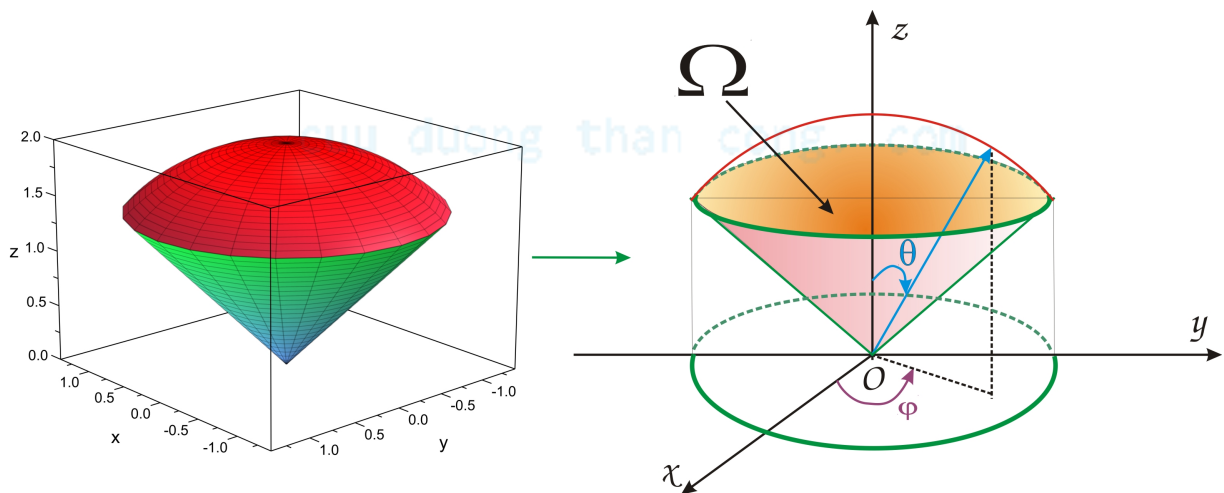
$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 [(\rho \cos \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \sin \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \cos \theta)^2] \rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{31}{5} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{31\pi}{10}.$$

Vậy $I = \frac{31\pi}{10}.$

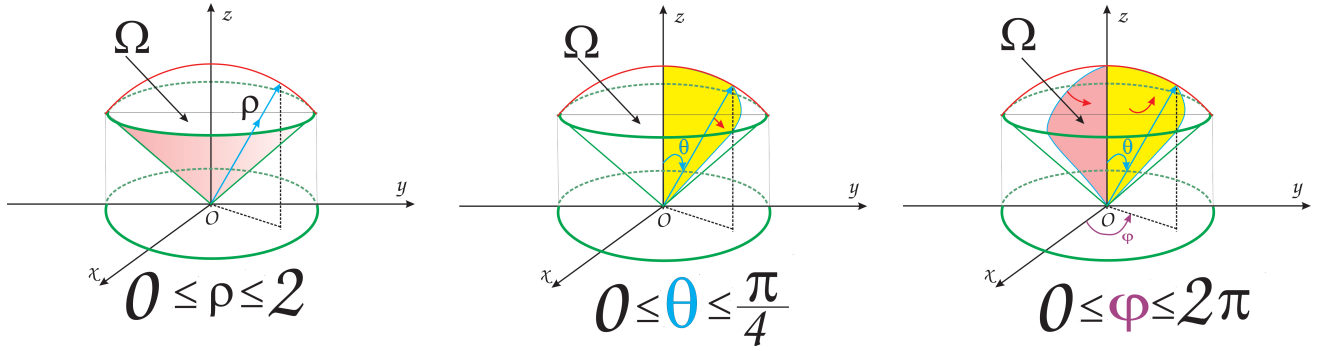
Ví dụ 1.4.4. Tính tích phân bội ba bằng cách đổi sang tọa độ cầu

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

trong đó $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$



Hình 1.20: $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$



Hình 1.21: $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

Giải. Vật thể Ω trong hệ tọa độ cầu được giới hạn bởi

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2. \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin \theta d\rho = 2.2\pi \cdot \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta = (4 - 2\sqrt{2})\pi.$$

Vậy $I = (4 - 2\sqrt{2})\pi$.

1.5 Công thức đổi biến tổng quát

1.5.1 Định thức Jacobian

Định nghĩa 1.4. Cho T là phép biến đổi đổi biến miền Ω được xác định trong không gian uvw thành miền V trong không gian xyz theo những công thức sau:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Khi đó định thức Jacobian được tính theo công thức

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

1.5.2 Tính phân bội ba khi thực hiện đổi biến

Định lý 1.7. Tính phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V trong không gian xyz được xác định như sau:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw$$

1.5.3 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

Định lý 1.8. Định thức Jacobian được xác định như sau:

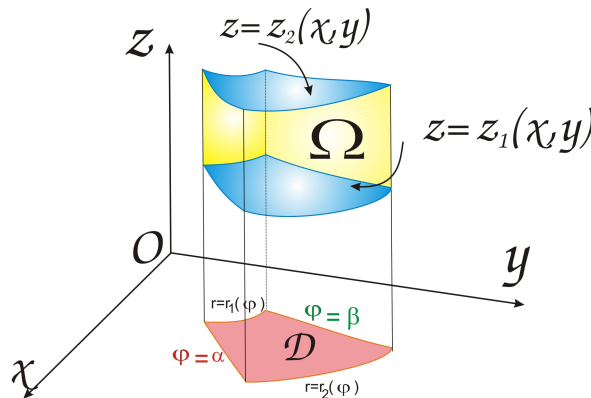
$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = r$$

Định lý 1.9. Cho miền $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, trong đó D là hình chiếu của miền V xuống mặt phẳng Oxy và D xác định trong hệ tọa độ cực

$$D = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \left[\int_{z_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{z_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz \right] r dr d\varphi. \end{aligned}$$



Hình 1.22: Vật thể Ω trong hệ tọa độ trụ

1.5.4 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Định lý 1.10. Định thức Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} x'_{\rho} & x'_{\varphi} & x'_{\theta} \\ y'_{\rho} & y'_{\varphi} & y'_{\theta} \\ z'_{\rho} & z'_{\varphi} & z'_{\theta} \end{vmatrix} = -\rho^2 \cdot \sin \theta$$

Chứng minh. Theo công thức tính định thức Jacobian, ta có

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \cdot \sin \varphi \sin \theta & \rho \cdot \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cdot \cos \varphi \sin \theta & \rho \cdot \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \cdot \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= \cos \theta \begin{vmatrix} -\rho \cdot \sin \varphi \sin \theta & \rho \cdot \cos \varphi \cos \theta \\ \rho \cdot \cos \varphi \sin \theta & \rho \cdot \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \cdot \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cdot \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} = \\ &= \cos \theta (-\rho^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta - \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) - \rho \sin \theta (\rho \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta + \rho \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta) = \\ &= -\rho^2 \sin \theta \cdot \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^3 \theta = -\rho^2 \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Định lý 1.11. Cho T là phép biến đổi biến miền Ω được xác định trong hệ tọa độ cầu thành miền V trong không gian xyz theo những công thức sau:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Tích phân bội ba của hàm $f(x, y, z)$ trên miền V trong không gian xyz được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} f(\rho \cdot \cos \varphi \sin \theta, \rho \cdot \sin \varphi \sin \theta, \rho \cdot \cos \theta) \cdot |J| d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \iiint_{\Omega} f(\rho \cdot \cos \varphi \sin \theta, \rho \cdot \sin \varphi \sin \theta, \rho \cdot \cos \theta) \cdot \rho^2 \cdot \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \end{aligned}$$

1.5.5 Tích phân bội ba trên miền hình cầu $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Công thức đổi biến trong hệ tọa độ cầu mở rộng là

$$\begin{cases} x - x_0 &= \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ y - y_0 &= \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ z - z_0 &= \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Định thức Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \cdot \sin \theta$$

Khi đó

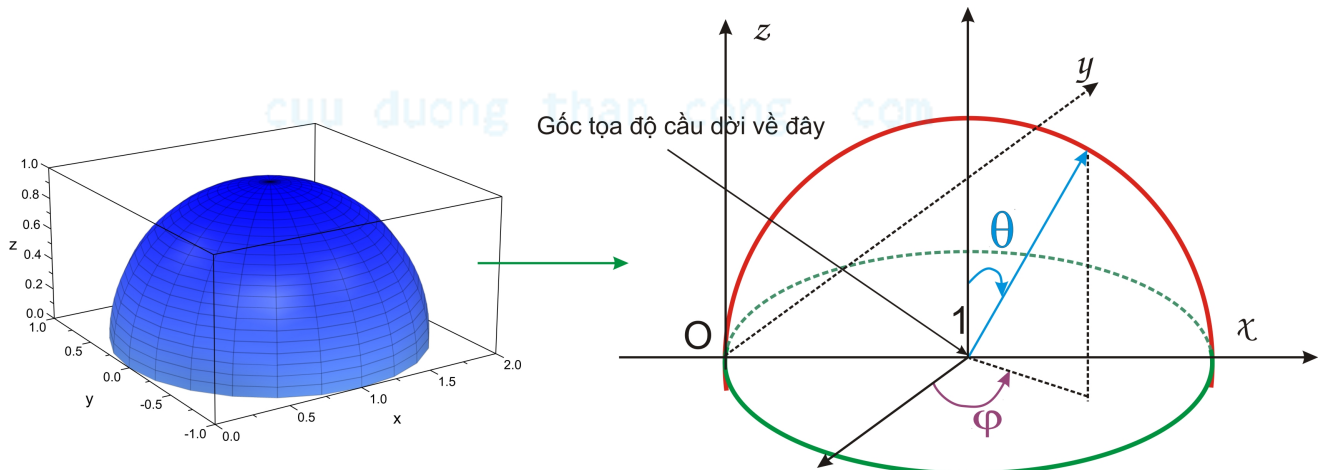
$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(x_0 + \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi, y_0 + \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi, z_0 + \rho \cdot \cos \theta) \cdot |J| d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \iiint_{\Omega} f(x_0 + \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi, y_0 + \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi, z_0 + \rho \cdot \cos \theta) \cdot \rho^2 \cdot \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \end{aligned}$$

Chú ý. Khi lấy cận của θ, φ, ρ ta coi gốc tọa độ cầu dời về tâm hình cầu (x_0, y_0, z_0) .

Ví dụ 1.5.1. Tính tích phân bội 3 bằng cách đổi sang tọa độ cầu

$$I = \iiint_{\Omega} 2z dx dy dz,$$

trong đó Ω là nửa trên của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ phần $z \geq 0$.



Hình 1.23: Ω là nửa trên của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ phần $z \geq 0$.

Giải. Công thức đổi biến trong hệ tọa độ cầu mở rộng là

$$\begin{cases} x - 1 &= \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Định thức Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \cdot \sin \theta$$

Vật thể Ω trong hệ tọa độ cầu mở rộng được giới hạn bởi $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1. \end{cases}$ Do đó,

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2\rho \cos \theta \rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $I = \frac{\pi}{2}$.

1.5.6 Tích phân bội ba trên miền hình ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Công thức đổi biến trong hệ tọa độ cầu mở rộng là

$$\begin{cases} \frac{x}{a} &= \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{y}{b} &= \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{z}{c} &= \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Định thức Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = -abc\rho^2 \cdot \sin \theta$$

Khi đó

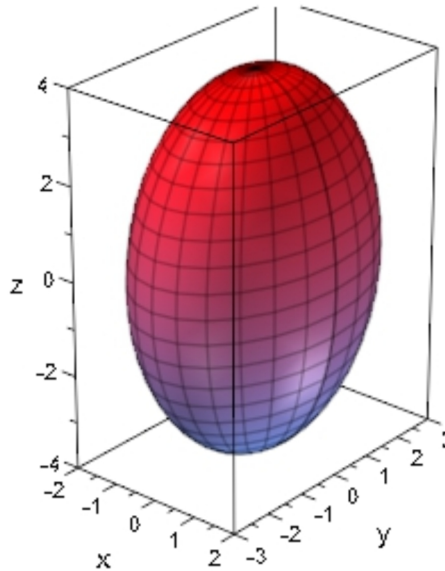
$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\Omega f(a\rho \cdot \sin \theta \cos \varphi, b\rho \cdot \sin \theta \sin \varphi, c\rho \cdot \cos \theta) \cdot |J| d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \iiint_\Omega f(a\rho \cdot \sin \theta \cos \varphi, b\rho \cdot \sin \theta \sin \varphi, c\rho \cdot \cos \theta) \cdot abc\rho^2 \cdot \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \end{aligned}$$

Ví dụ 1.5.2. Tính thể tích vật thể Ω được giới hạn bởi mặt cong

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Giải. Công thức đổi biến trong hệ tọa độ cầu mở rộng là

$$\begin{cases} \frac{x}{2} &= \rho \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{y}{3} &= \rho \cdot \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{z}{4} &= \rho \cdot \cos \theta \end{cases}$$



Hình 1.24: Vật thể Ω được giới hạn bởi mặt cong $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$

Khi đó

$$\Omega = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}$$

Định thức Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = -2.3.4.\rho^2.\sin\theta$$

Khi đó

$$V = 2.3.4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta d\rho = \frac{2\pi}{3} \cdot 2.3.4 \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{3} \cdot 2.3.4.2 = 32\pi.$$

Ví dụ 1.5.3. Tính thể tích vật thể Ω được giới hạn bởi mặt cong

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

Giải. Công thức đổi biến trong **hệ tọa độ cầu mở rộng** là

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \rho \cdot \sin\theta \cos\varphi \\ \frac{y}{3} = \rho \cdot \sin\theta \sin\varphi \\ \frac{z}{4} = \rho \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Vật thể Ω có thể được mô tả bởi bất đẳng thức

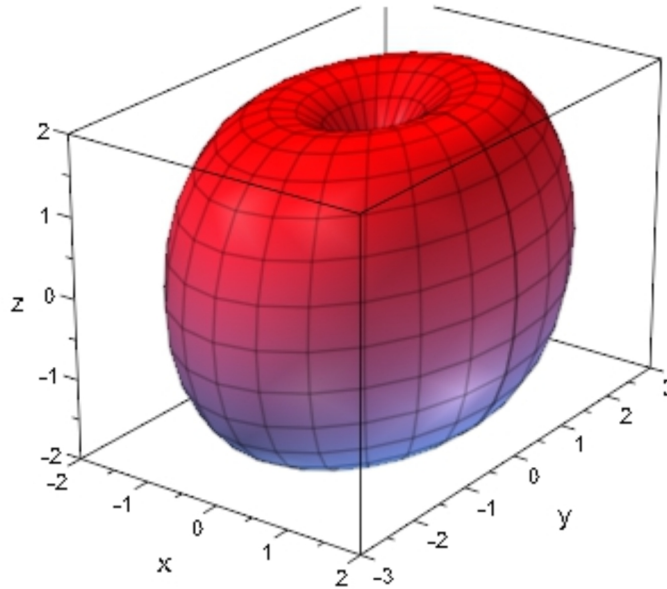
$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}\right)^2 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

Khi thay x, y, z vào bất đẳng thức này ta được

$$\rho^4 \leq \rho^2 \sin^2\theta \Rightarrow \rho \leq \sin\theta.$$

Vì $\sin\theta \geq \rho \geq 0$ nên $0 \leq \theta \leq \pi$. Biến φ không tham gia vào bất đẳng thức nên $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Vậy

$$\Omega = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sin\theta\}$$



Hình 1.25: Vật thể Ω được giới hạn bởi mặt cong $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

Định thức Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = -2.3.4.\rho^2.\sin\theta$$

Khi đó

$$V = 2.3.4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \rho^2 \sin\theta d\rho = \frac{2\pi}{3} . 2.3.4 \int_0^\pi \sin^4\theta d\theta = 6\pi^2.$$

1.6 Ứng dụng hình học của tích phân bội ba tính thể tích vật thể

Định lý 1.12. Thể tích vật thể Ω được tính theo công thức

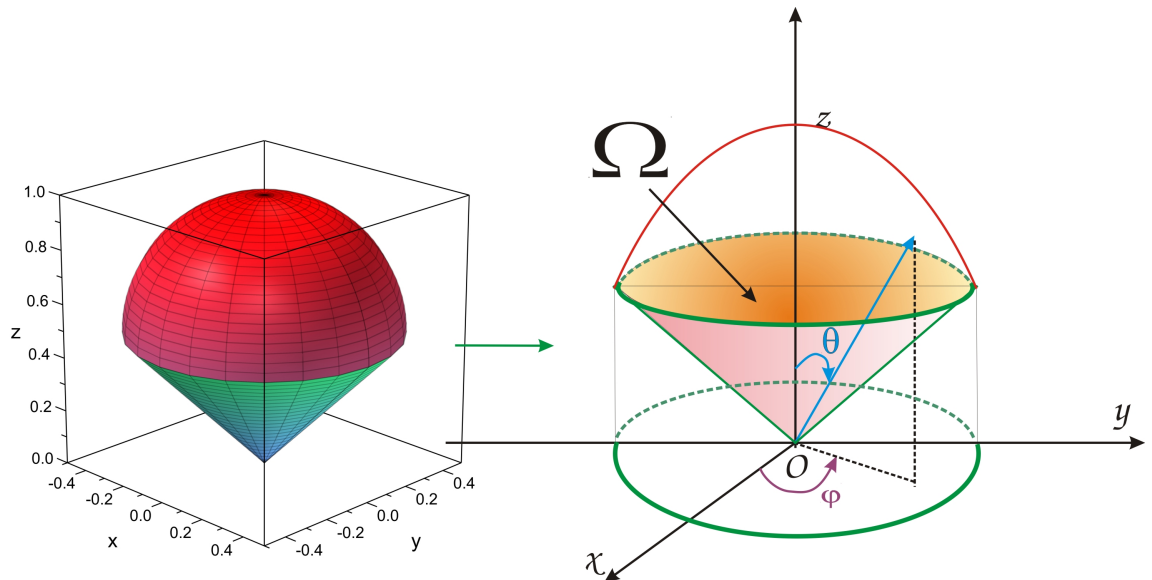
$$V = \iiint_{\Omega} 1.dxdydz$$

Ví dụ 1.6.1. Tính thể tích của vật thể giới hạn dưới bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và giới hạn trên bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Giải. Thay $x = \rho.\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho.\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho.\cos\theta$ vào $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ ta được $\rho \leq \cos\theta$, vào $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ ta được $\rho\cos\theta \geq \rho.\sin\theta$, với $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ta có $\tan\theta \leq 1$, hay $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

Vật thể Ω trong hệ tọa độ cầu được giới hạn bởi
$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \cos\theta. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos\theta} \rho^2 \sin\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{3} \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\theta \cos^3\theta d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$



Hình 1.26: $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq z, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

Vậy $V = \frac{\pi}{8}$.

1.7 Thực hành MatLab

1.7.1 Vẽ vật thể trong hệ trục tọa độ Đề-các

Lệnh $[X, Y] = \text{meshgrid}(x, y)$

$x = [-1 \ 0 \ 1]; y = [-2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2];$

$[X, Y] = \text{meshgrid}(x, y);$

$-1 \ 0 \ 1 \quad -2 \ -2 \ -2$

$-1 \ 0 \ 1 \quad -1 \ -1 \ -1$

Khi đó $X = -1 \ 0 \ 1, Y = 0 \ 0 \ 0$

$-1 \ 0 \ 1 \quad 1 \ 1 \ 1$

$-1 \ 0 \ 1 \quad 2 \ 2 \ 2$

$x = [-1 \ 0 \ 1];$

$[X] = \text{meshgrid}(x);$

$-1 \ 0 \ 1$

Khi đó $X = -1 \ 0 \ 1$

$-1 \ 0 \ 1$

Trường hợp vật thể là hình hộp chữ nhật

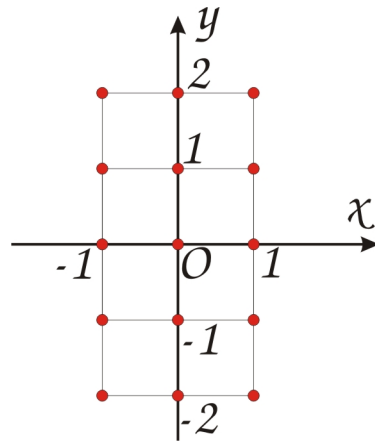
1. Dùng lệnh $[X, Y] = \text{meshgrid}(x, y)$ để tạo lưới hình chiếu là hình chữ nhật

2. Vẽ mặt trên và mặt dưới của vật thể

Ví dụ 1.7.1. Vẽ vật thể giới hạn bởi $z = 0, z = 3, -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2$

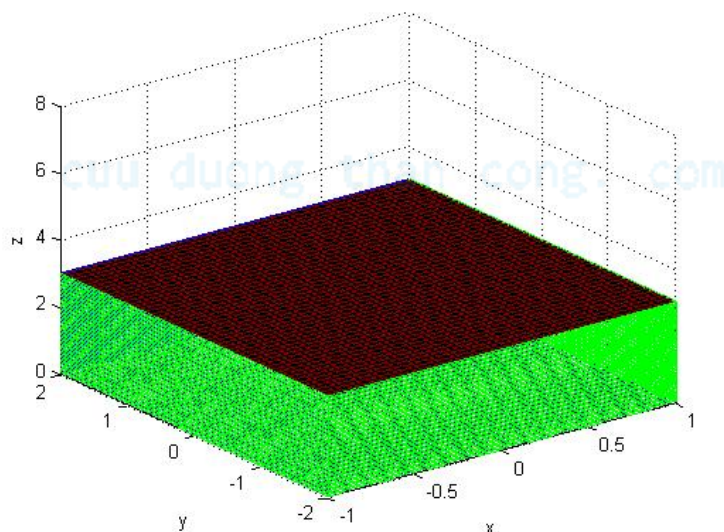
Code

$x = \text{linspace}(-1, 1, 50); y = \text{linspace}(-2, 2, 50); z = \text{linspace}(0, 3, 50); [X, Y] = \text{meshgrid}(x, y);$
 $\text{surf}(X, Y, 3 + 0 * X)$ (hoặc $\text{surf}(X, Y, Z)$ hoặc $\text{surf}(X, Y, Z)$)



Hình 1.27: Lưới điểm được tạo bởi lệnh $[X, Y] = \text{meshgrid}(x, y)$

```
hold on
mesh(X,Y,0*X)
[X,Z]=meshgrid(x,z);
surf(X,2+0*X,Z,'FaceColor','g','EdgeColor','b','FaceAlpha',0.1);
surf(X,-2+0*X,Z,'FaceColor','g','EdgeColor','g','FaceAlpha',0.1);
[Y,Z]=meshgrid(y,z);
surf(-1+0*Y,Y,Z,'FaceColor','b','EdgeColor','g','FaceAlpha',0.1);
surf(1+0*Y,Y,Z,'FaceColor','b','EdgeColor','g','FaceAlpha',0.1);
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
axis([-1 1 -2 2 0 8])
view(120,12)
grid on
rotate3d on
```



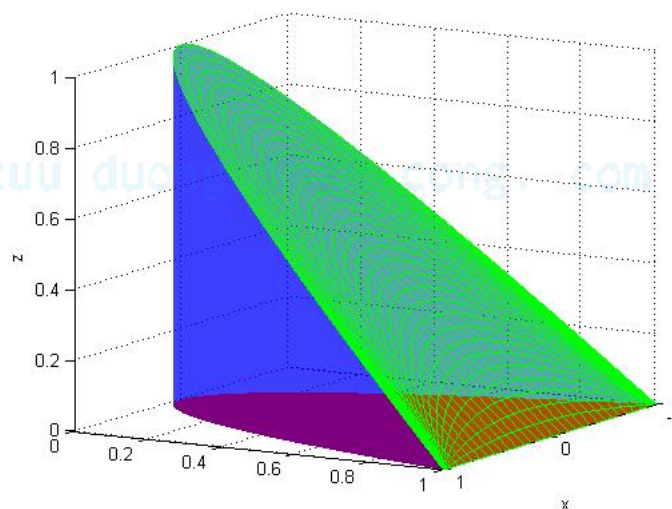
Hình 1.28: Vật thể giới hạn bởi $z = 0, z = 3, -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2$

Trường hợp vật thể là hình có đáy là miền D , mặt trên là $z = z_2$, mặt dưới là $z = z_1$.

Ví dụ 1.7.2. Vẽ vật thể giới hạn bởi $z = 0, z = 1 - y, -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1$

Code

```
clf
s = linspace(-1, 1, 30);
s1 = meshgrid(s); t1 = [];
for i=1:length(s)
    tam = linspace(s(i)^2, 1, 30);
    t1 = [t1 tam'];
end
x = s1; y = t1; z = 1 - y; z1 = 0 * x;
hold on
surf(x, y, z, 'FaceColor', 'g', 'EdgeColor', 'g', 'FaceAlpha', 0.3);
surf(x, y, z1, 'FaceColor', 'r', 'EdgeColor', 'none');
s = linspace(-1, 1, 30); t1 = [];
for i=1:length(s)
    tam = linspace(0, 1 - s(i)^2, 30);
    t1 = [t1 tam'];
end
x = s1; z = t1; y = s1.^2;
surf(x, y, z, 'FaceColor', 'b', 'EdgeColor', 'none', 'FaceAlpha', 0.5);
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
view(120, 12)
grid on
rotate3d on
```



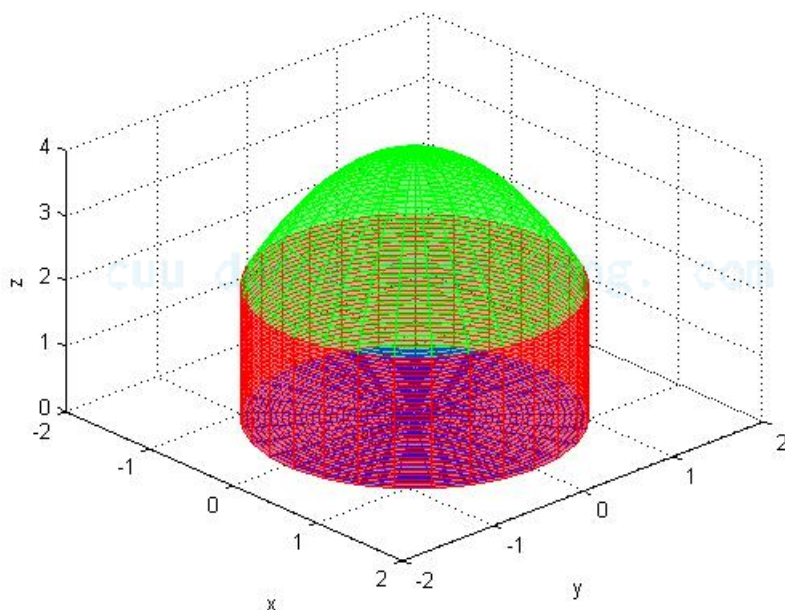
Hình 1.29: Vật thể giới hạn bởi $z = 0, z = 1 - y, -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1$

1.7.2 Vẽ vật thể trong hệ trục tọa độ trụ

Ví dụ 1.7.3. Vẽ vật thể giới hạn bởi $z = 0, z = 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 2$

Code

```
clf
hold on
phi=linspace(0,2*pi,30);
r=linspace(0,sqrt(2),30);
[r phi] = meshgrid(r, phi);
x=r.*cos(phi);
y=r.*sin(phi);
z = 4 - x.^2 - y.^2; z1 = 0 * x;
surf(x,y,z,'FaceColor','g','EdgeColor','g','FaceAlpha',0.3);
surf(x,y,z1,'FaceColor','b','EdgeColor','b','FaceAlpha',0.3);
phi=linspace(0,2*pi,30);
z2=linspace(0,2,30);
[z2 phi] = meshgrid(z2, phi);
x1=sqrt(2).*cos(phi);
y1=sqrt(2).*sin(phi);
surf(x1,y1,z2,'FaceColor','r','EdgeColor','r','FaceAlpha',0.3);
grid on
view (13,28)
rotate3d on
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
```



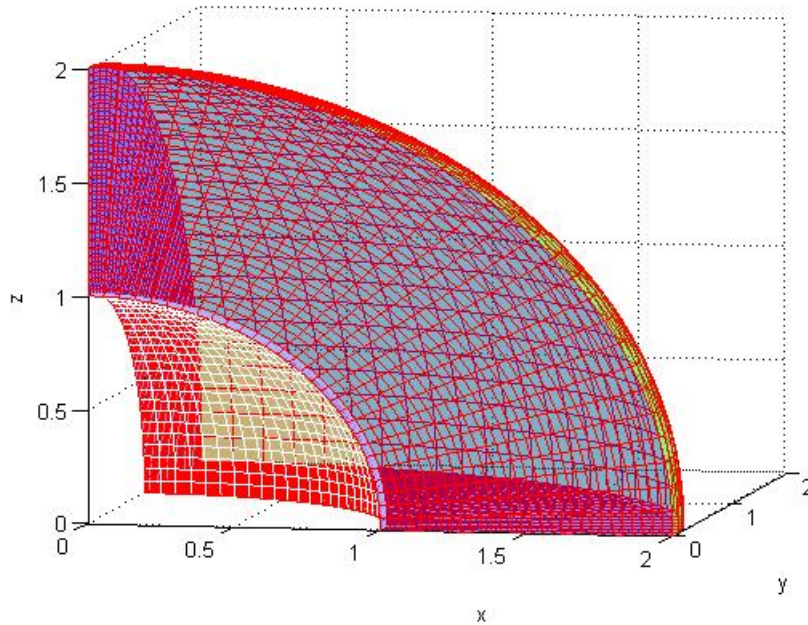
Hình 1.30: Vật thể giới hạn bởi $z = 0, z = 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 2$

1.7.3 Vẽ vật thể trong hệ trục tọa độ cầu

Ví dụ 1.7.4. Vẽ vật thể nằm giữa hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở góc phần tám thứ nhất.

Code

```
clf
phi=linspace(0,pi/2,30);
theta=linspace(0,pi/2,30);
[p t]=meshgrid(phi,theta);
x=sin(t).*cos(p);
y=sin(t).*sin(p);
z=cos(t);
mesh(x,y,z,'FaceColor','r','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','w');
hold on
x2=2*sin(t).*cos(p);
y2=2*sin(t).*sin(p);
z2=2*cos(t);
mesh(x2,y2,z2,'FaceColor','g','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','r');
r=linspace(1,2,30)
[r th]=meshgrid(r,theta);
x3=sin(th).*r.*cos(0);
y3=sin(th).*r.*sin(0);
z3=r.*cos(th);
mesh(x3,y3,z3,'FaceColor','b','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','r');
x4=sin(th).*r.*cos(pi/2);
y4=sin(th).*r.*sin(pi/2);
z4=r.*cos(th);
mesh(x4,y4,z4,'FaceColor','b','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','r');
[r phi]=meshgrid(r,phi);
x5=sin(pi/2).*r.*cos(phi);
y5=sin(pi/2).*r.*sin(phi);
z5=r.*cos(pi/2);
mesh(x5,y5,z5,'FaceColor','r','FaceAlpha',0.3,'EdgeColor','r');
grid on
view(6,34)
rotate3d on
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
```



Hình 1.31: Vật thể nằm giữa hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ở góc phần tám thứ nhất.

1.8 Bài tập

1.8.1 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề-các

Bài tập 1.8.1. Tính các tích phân bội ba sau:

1. $I = \iiint_{\Omega} x^2 y \sqrt{z} dx dy dz$, trong đó Ω là hình hộp chữ nhật giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và các mặt phẳng $x = 2, y = 3, z = 4$.
2. $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$.
3. $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1 + x + 2y + z)^3}$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $x + 2y + z = 2$.
4. $I = \iiint_{\Omega} y dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi $y = x^2, y + z = 1, z = 0$.
5. $I = \iiint_{\Omega} (x + y) dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi $x + y = z = 3, 3x + y = 3, 3x + 2y = 6, y = 0, z = 0$.
6. $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi $x = 0, x = 2, y = 0, y = \frac{x}{2}, z = 0, z = 4$.

Bài tập 1.8.2. Đổi thứ tự lấy tích phân của tích phân bội ba sau:

1. $I = \int_0^2 dx \int_0^{x/2} dy \int_0^4 f(x, y, z) dz$.

1.8.2 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

Bài tập 1.8.3. Tính các tích phân bội ba sau:

1. $I = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt $z = 0, z = x^2 + y^2$ và $x^2 + y^2 = 1$.
2. $I = \iiint_{\Omega} \frac{z}{x^2 + y^2} dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt $z = 2\pi, z = 3\pi, x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.
3. $I = \iiint_{\Omega} y dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = 2y, z = 0$ và $z = 3$.
4. $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt $\sqrt{x^2 + y^2} = z, z = 2$ và $x^2 + y^2 = 4$.
5. $I = \iiint_{\Omega} yx^2 dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + z^2 = 2y$ và $y = 2$.
6. $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dx dy dz$, trong đó Ω là vật thể giới hạn bởi các mặt $x^2 + z^2 = y$ và $y = 4$.
7. $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, trong đó $\Omega : x^2 + y^2 \leq 2z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.
8. $I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, trong đó $\Omega : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$.

Bài tập 1.8.4. Đổi tích phân bội ba sau sang hệ tọa độ trụ

$$1. \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^2 f(x, y, z) dz$$

1.8.3 Tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Bài tập 1.8.5. Tính các tích phân bội ba sau:

1. $I = \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, trong đó Ω nằm trong mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ở góc phần tám thứ nhất.
2. $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, trong đó $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.
3. $I = \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dx dy dz$, trong đó $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
4. $I = \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz$, trong đó $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.
5. $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + 4y^2 + 9z^2} dx dy dz$, trong đó $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$.

Bài tập 1.8.6. Đổi tích phân bội ba sau sang hệ tọa độ cầu

$$1. \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^0 f(x, y, z) dz$$

1.8.4 Ứng dụng hình học của tích phân bội ba

Bài tập 1.8.7. Tính thể tích của vật thể Ω sau:

1. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 3z \geq x^2 + y^2$.
2. Ω được giới hạn bởi mặt cong $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$.

Lời giải bài tập chương 5

1.8.1 1. $I = 64$

2. $I = \frac{1}{24}$

3. $I = \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{2}{9}$

4. $I = \frac{8}{35}$

5. $I = \frac{11}{4}$

1.8.2

$$I = \int_0^1 dy \int_0^4 dz \int_{2y}^2 f(x, y, z) dx.$$

1.8.3 1. $I = \frac{\pi}{6}$

2. $I = 5\pi^3 \ln 2$

3. $I = 3\pi$

4. $I = \frac{16\pi}{5}$

5. $I = 4\pi$

6. $I = \frac{128\pi}{15}$

7. $I = \frac{5\pi}{3}$

8. $I = \frac{8}{9}$

1.8.4 1. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} dr \int_0^2 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dz$

1.8.5 1. $I = \frac{1}{48}$

2. $I = \frac{\pi}{10}$

3. $I = \frac{4}{3} \pi (e - 1)$

4. $I = 2\pi (e - 2)$

5. $I = \frac{\pi}{48}$

1.8.6 1. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho$

1.8.7 1. $V = \frac{19\pi}{6}$

2. $V = \frac{\pi}{3}$