Mục lục

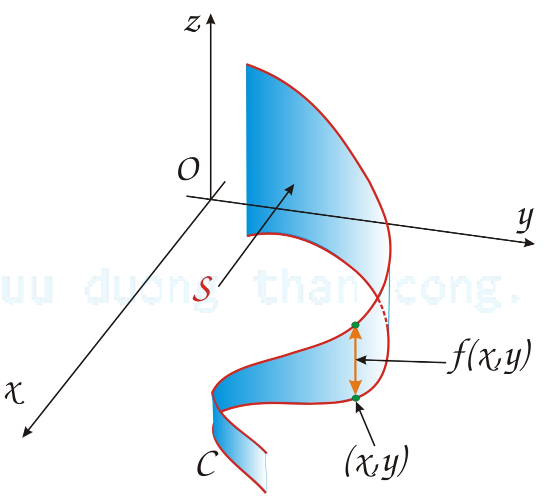
Chương1

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

1.1 Tích phân đường loại một

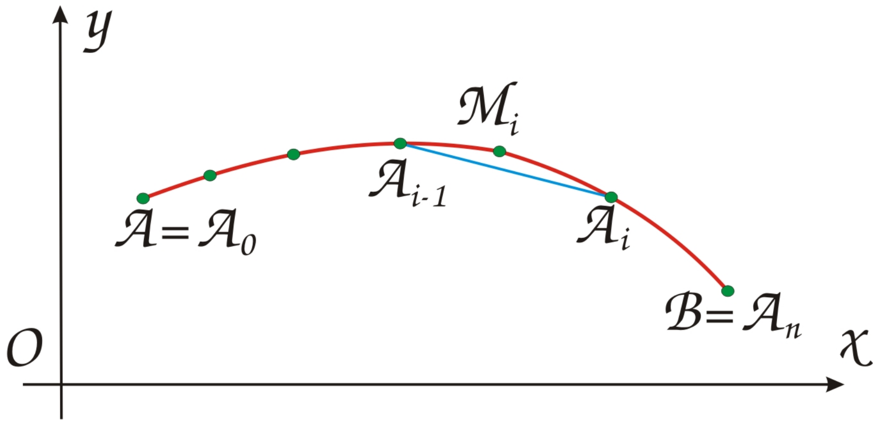
1.1.1 Đặt vấn đề

Cho hàm số $z = f(x, y) \geqslant 0$ và đường cong C trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Hãy tính diện tích của **"hàng rào"** dọc theo đường C và có chiều cao tại mỗi điểm (x, y) là $f(x, y)$.



Hình 1.1: Diện tích của **"hàng rào"** dọc theo đường C và có chiều cao tại mỗi điểm (x, y) là $f(x, y)$.

Cho đường cong trơn $C = \overset{\frown}{AB}$ xác định trong mặt phẳng Oxy. Ta sẽ chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành những cung nhỏ $A_{i-1}A_i$ bởi những điểm $A_0 = A, A_1, \ldots, A_n = B$. Độ dài của những cung nhỏ $A_{i-1}A_i$ được ký hiệu là $\Delta\ell_i$ và $\lambda = \max_i \Delta\ell_i$. Ta chọn điểm bất kỳ tương ứng $M_i(x_i, y_i)$ trên cung $A_{i-1}A_i$.



Hình 1.2: Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành những cung nhỏ $A_{i-1}A_i$

Diện tích của "hàng rào" cần tìm là

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta\ell_i$$

Đây là tổng Riemann và khi lấy giới hạn tổng này với $\lambda \to 0$ ta được **tích phân đường loại I**.

1.1.2 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. Nếu $f(x, y)$ là hàm số xác định trên đường cong trơn $C = \overset{\frown}{AB}$ thì **tích phân đường loại I** của f dọc theo C là

$$\int\limits_{AB} f(x, y)d\ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta\ell_i$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Chú ý. Theo định nghĩa, tích phân đường loại I **không phụ thuộc** hướng của đường cong C vì việc chọn hướng của C không ảnh hưởng đến tổng Riemann.

$$\int\limits_{AB} f(x, y)d\ell = \int\limits_{BA} f(x, y)d\ell$$

1.1.3 Tính chất của tích phân đường loại một

1^0. $\int\limits_{AB} 1d\ell = L$.

2^0. $\int\limits_{AB} \alpha.f(x, y)d\ell = \alpha. \int\limits_{AB} f(x, y)d\ell$.

3^0. $\int\limits_{AB} [f(x, y) + g(x, y)]d\ell = \int\limits_{AB} f(x, y)d\ell + \int\limits_{AB} g(x, y)d\ell$.

4^0. Nếu $C = C_1 \oplus C_2$ thì $\int\limits_{C} f(x, y)d\ell = \int\limits_{C_1} f(x, y)d\ell + \int\limits_{C_2} f(x, y)d\ell$.

1.1.4 Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), a \leqslant t \leqslant b$

Đường cong trơn $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số trong mặt phẳng là

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ a \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

***Ví dụ* 1.1.1.** Viết phương trình tham số của đoạn thẳng nối hai điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$

Giải. Phương trình tham số của đoạn thẳng nối hai điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ là

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A).t, \\ y = y_A + (y_B - y_A).t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

***Ví dụ* 1.1.2.** Viết phương trình tham số của đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Giải. Phương trình tham số của đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ là

$$\begin{cases} x = a + R\cos t, \\ y = b + R\sin t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

***Ví dụ* 1.1.3.** Viết phương trình tham số của Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Giải. Phương trình tham số của Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Theo công thức lấy vi phân cung của đường cong C ta có

$$d\ell = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

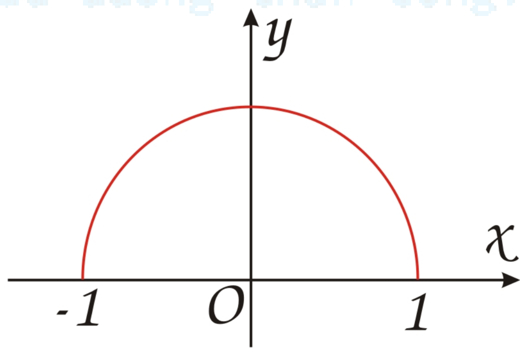
Từ đó, ta có định lý sau:

Định lý 1.1. *Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó*

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_a^b f(x(t), y(t)).\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Chú ý. Khi lấy tích phân theo cung $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ chúng ta không quan tâm đến việc điểm A hay B là điểm đầu hay điểm cuối của cung, mà chỉ quan tâm đến giá trị $t \in [a,b]$. Khi đó tích phân sẽ luôn được tính bằng cách lấy cận từ cận nhỏ a đến cận lớn b.

***Ví dụ* 1.1.4.** Tính $I = \int\limits_C (2 + x^2 y)d\ell$, với C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$.



Hình 1.3: Nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$.

Giải. Ta phải tham số hóa nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0$ bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$$

Khi đó

$$I = \int_C (2 + x^2 y) d\ell = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t.\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t.\sin t) dt =$$

$$= \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

1.1.5 Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$.

Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$.

Định lý 1.2. *Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó*

$$\int_{AB} f(x,y) d\ell = \int_a^b f(x, y(x)).\sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Thật vậy, cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$ sẽ được tham số hóa như sau:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ a \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(x) = 1 \\ y'(x) = y'(x) \end{cases}$$

Chú ý. Trong trường hợp đặc biệt khi $y = y(x) = 0$ thì

$$\int_{AB} f(x,y) d\ell = \int_a^b f(x,0) dx.$$

Khi đó tích phân đường loại I sẽ trở thành tích phân xác định.

***Ví dụ* 1.1.5.** Tính $I = \int_C \frac{y}{x} d\ell$, với C là cung của parabol $y = \frac{x^2}{2}$ nối hai điểm $A(1, 1/2)$ và $B(2,2)$.

Giải. Ta có

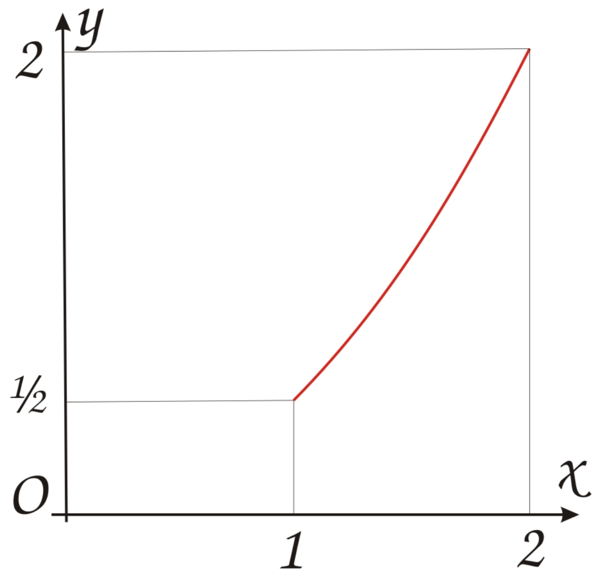
$$d\ell = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + x^2} dx, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Khi đó

$$I = \int_{AB} \frac{y}{x} d\ell = \frac{1}{2}\int_1^2 x\sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \sqrt{1 + x^2} d(1 + x^2) = \left[\frac{1}{6}.(1 + x^2)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}.$$

1.1.6 Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x(y), c \leqslant y \leqslant d$.

Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x(y), c \leqslant y \leqslant d$.



Hình 1.4: $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ là cung của parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$ nối hai điểm $A(1, 1/2)$ và $B(2, 2)$.

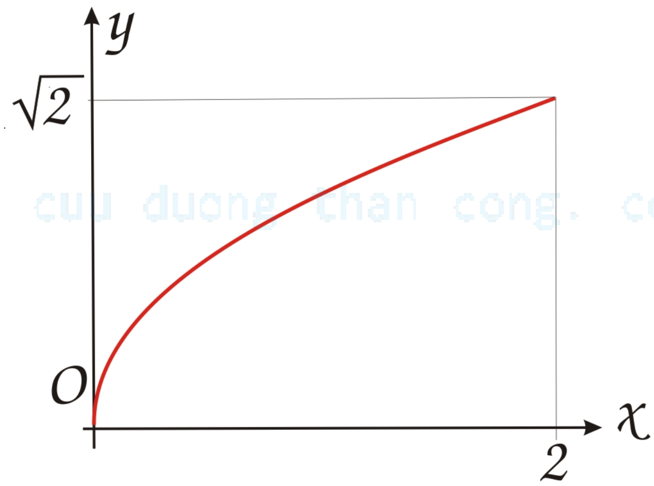
Định lý 1.3. *Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó*

$$\int\limits_{AB} f(x, y)d\ell = \int\limits_{c}^{d} f(x(y), y).\sqrt{1 + (x'(y))^2}dy.$$

Thật vậy, cung $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ có phương trình $x = x(y), c \leqslant y \leqslant d$ sẽ được tham số hóa như sau:

$$\begin{cases} x = x(y) \\ y = y \\ c \leqslant y \leqslant d. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(y) = x'(y) \\ y'(y) = 1 \end{cases}$$

***Ví dụ* 1.1.6.** Tính $I = \int\limits_{C} xyd\ell$, với C là cung của parabol $x = y^2$ nối hai điểm $A(0, 0)$ và $B(2, \sqrt{2})$.



Hình 1.5: $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ là cung của parabol $x = y^2$ nối hai điểm $A(0, 0)$ và $B(2, \sqrt{2})$.

Giải. Ta có

$$d\ell = \sqrt{1 + (x'(y)^2}dy = \sqrt{1 + 4y^2}dy, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}.$$

Khi đó

$$I = \int\limits_{AB} xyd\ell = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} y^2.y\sqrt{1+4y^2}dy$$

Đặt $t = \sqrt{1+4y^2} \Rightarrow tdt = 8ydy$, $\begin{array}{c|cc} y & 0 & \sqrt{2} \\ \hline t & 1 & 3 \end{array}$

$$I = \int\limits_{1}^{3} \frac{t^2-1}{4}.t.\frac{tdt}{4} = \frac{1}{16}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^3 = \frac{149}{60}.$$

1.1.7 Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ cho trong hệ tọa độ cực $x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ xác định trong hệ tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta. \end{cases}$$

***Ví dụ* 1.1.7.** Viết phương trình tham số hóa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ trong hệ tọa độ cực.

Giải. Đặt

$$\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \end{cases}$$

Thay x, y vào phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ ta được $r^2 = 2r\cos\varphi \Rightarrow r = 2\cos\varphi$ và $\cos\varphi \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Vậy

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi.\cos\varphi \\ y = 2\cos\varphi.\sin\varphi \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Từ công thức của đường cong C xác định trong hệ tọa độ cực, ta có

$$\begin{cases} x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x'(\varphi))^2 = (r'(\varphi)\cos\varphi)^2 - 2.r'(\varphi)\cos\varphi.r(\varphi)\sin\varphi + (r(\varphi)\sin\varphi)^2 \\ (y'(\varphi))^2 = (r'(\varphi)\sin\varphi)^2 + 2.r'(\varphi)\sin\varphi.r(\varphi)\cos\varphi + (r(\varphi)\cos\varphi)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2.$$

Định lý 1.4. *Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó*

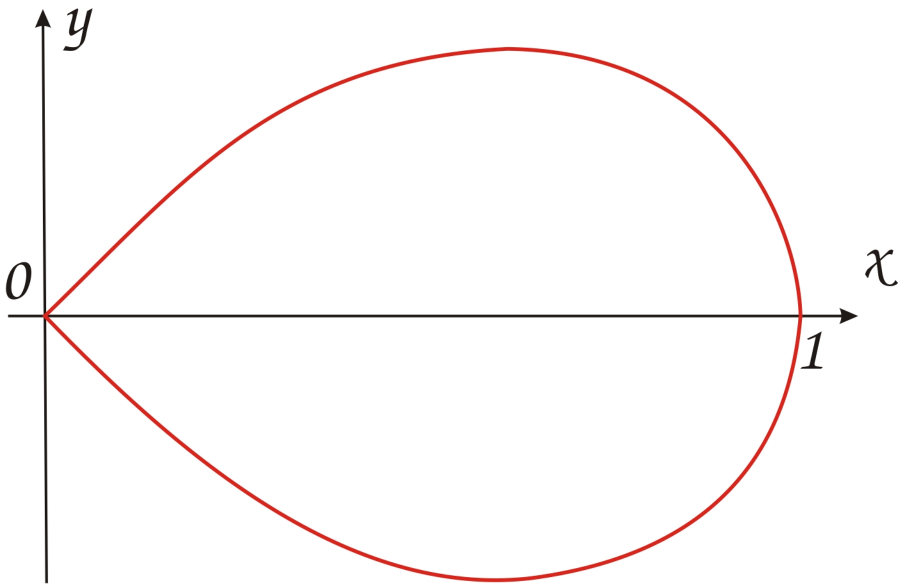
$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi).\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

***Ví dụ* 1.1.8.** Tính $\int\limits_{C} \sqrt{x^2+y^2}d\ell$, với C là đường cong xác định trong hệ tọa độ cực bởi phương trình $r^2 = \cos 2\varphi, \varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Giải. Ta có $r(\varphi) = \sqrt{\cos 2\varphi} \Rightarrow r'(\varphi) = -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \Rightarrow (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2 = \cos 2\varphi + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{\cos 2\varphi}$.

Khi đó

$$\int\limits_{C} \sqrt{x^2+y^2}d\ell = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} r(\varphi).\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\varphi}.\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$



Hình 1.6: C là đường cong xác định trong hệ tọa độ cực bởi phương trình $r^2 = \cos 2\varphi, \varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$.

1.1.8 Tính phân đường loại một trong không gian

Khi mở rộng đường cong C xác định trong không gian thì tích phân đường loại I là tích phân có dạng

$$\int_C f(x,y,z)d\ell$$

với C là đường cong lấy tích phân.

Trường hợp cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ được xác định trong không gian với phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ a \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

***Ví dụ* 1.1.9.** Viết phương trình tham số giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $z = 1$

Giải. Giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $z = 1$ thỏa

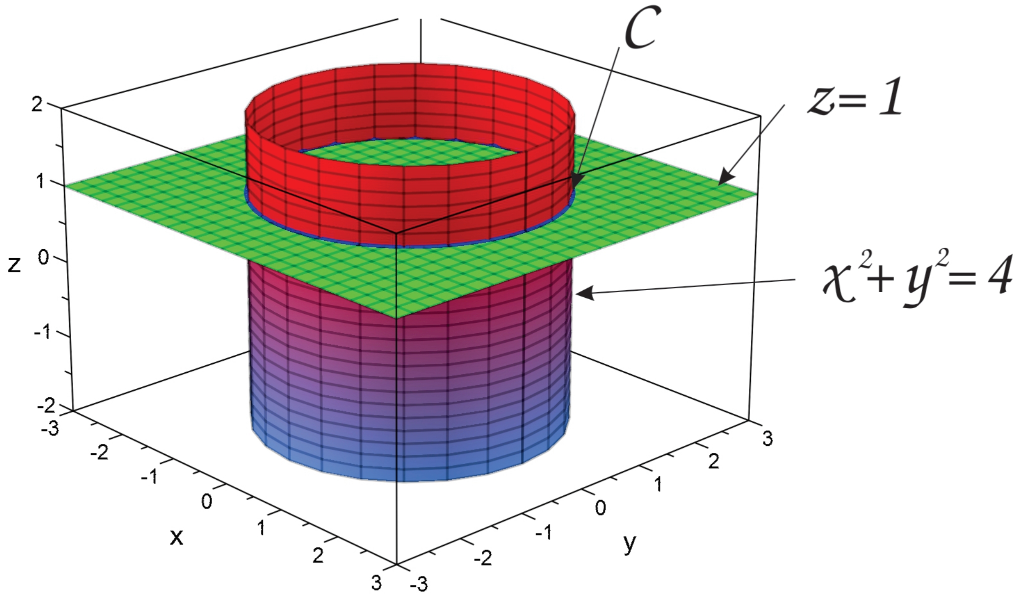
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \quad\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ z = 1 \end{cases}$$

***Ví dụ* 1.1.10.** Viết phương trình tham số giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ và mặt phẳng $z = 2 - x$.

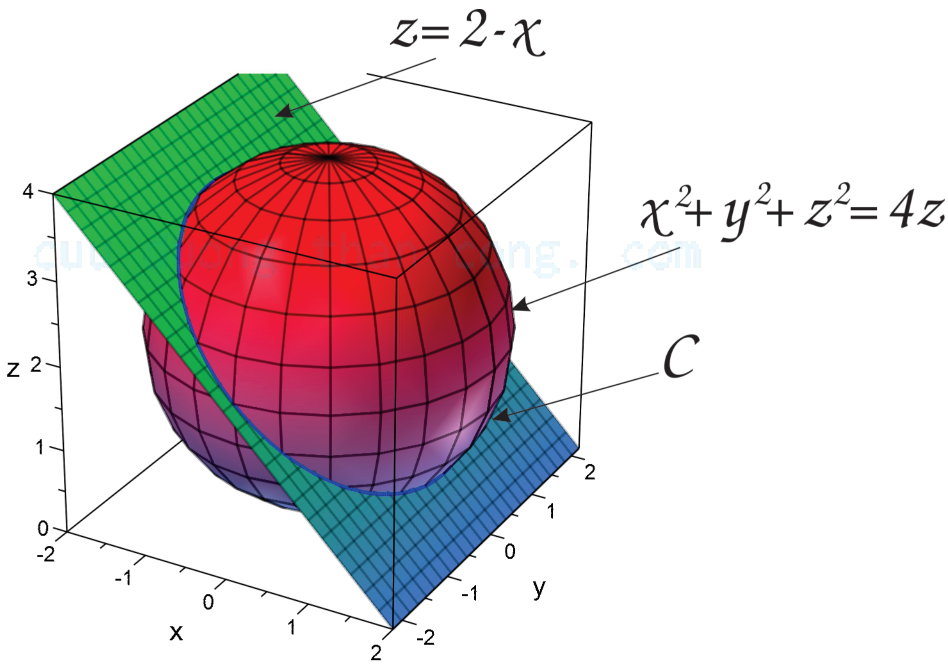
Giải. Giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ và mặt phẳng $z = 2 - x$ thỏa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4z \\ z = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (2-x)^2 = 4(2-x) \\ z = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sin t \quad\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ z = 2 - \sqrt{2}\cos t \end{cases}$$



Hình 1.7: Giao tuyến của mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và mặt phẳng $z = 1$.



Hình 1.8: Giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ và mặt phẳng $z = 2 - x$.

Định lý 1.5. *Cho hàm số $f(x, y, z)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó*

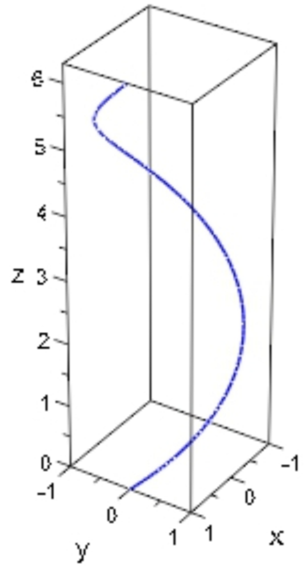
$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t)).\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.$$

Chú ý. Tích phân đường loại một không phụ thuộc vào chiều lấy tích phân trên cung $\overset{\frown}{AB}$.

***Ví dụ* 1.1.11.** Tính $I = \int\limits_C y \sin z d\ell$, với $C : x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Giải. Từ phương trình đường cong $C : x = \cos t, y = \sin t, z = t$ ta có

$$x'(t) = -\sin t; y'(t) = \cos t; z'(t) = 1.$$

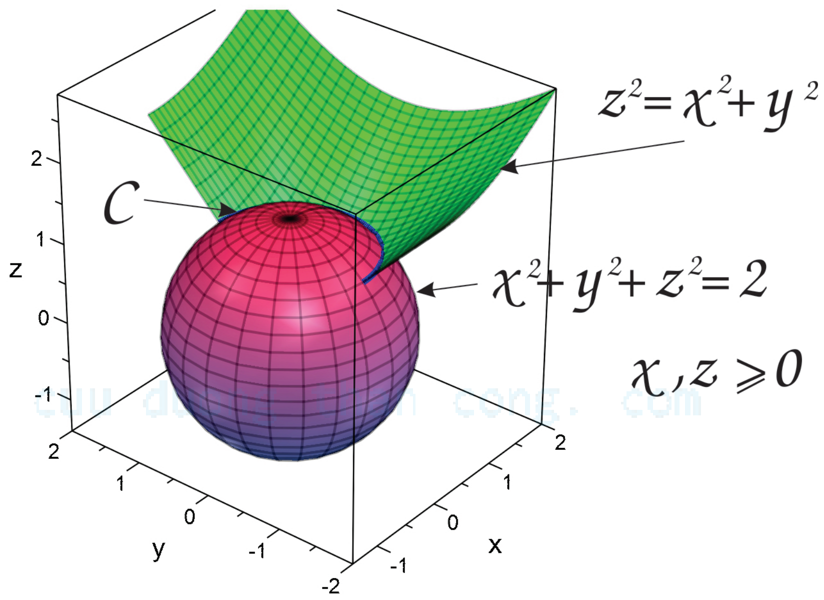


Hình 1.9: Đường cong $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Theo công thức tính tích phân đường loại I trong không gian, ta có

$$I = \int\limits_C y \sin z d\ell = \int\limits_0^{2\pi} \sin t . \sin t . \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt = \sqrt{2} . \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi.$$

***Ví dụ* 1.1.12.** Tính tích phân $I = \int\limits_C xzd\ell$, với C là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ lấy phần $x, z \geqslant 0$.



Hình 1.10: Giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ lấy phần $x, z \geqslant 0$.

Giải. Viết phương trình tham số hóa giao tuyến. Giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ thỏa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 = 1 \end{cases}$$

Vì giao tuyến lấy phần $z \geqslant 0$ nên $z = 1$, và $x \geqslant 0$ nên khi đặt $x = \cos t$ ta lấy phần $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Vậy giao tuyến C cần tìm có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \\ z = 1 \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

Khi đó

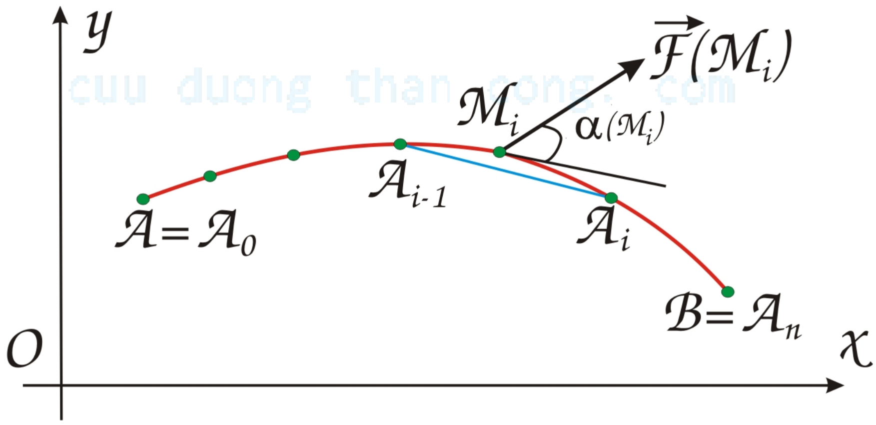
$$I = \int\limits_C xz d\ell = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t.1.\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 0^2} dt = [\sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

1.2 Tích phân đường loại hai

1.2.1 Đặt vấn đề

Công của lực $\overrightarrow{F}$ để di chuyển chất điểm M từ điểm A đến điểm B theo đường thẳng AB là $W =< \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} >= |\overrightarrow{F}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos(\widehat{\overrightarrow{F}, \overrightarrow{AB}})$

Bài toán đặt ra: Hãy tính công của lực $\overrightarrow{F}$ để di chuyển chất điểm M từ điểm A đến điểm B theo một đường cong trơn C nối điểm A với điểm B trong mặt phẳng Oxy.



Hình 1.11: Chia đường cong $\overset{\frown}{AB}$ thành những đường cong nhỏ trong mặt phẳng

Để giải bài toán này, ta chia đường cong $\overset{\frown}{AB}$ thành những đường cong nhỏ $A_{i-1}A_i$ với độ dài $\Delta \ell_i$ bởi những điểm $A_0 = A, A_1, \ldots, A_n = B$ và chọn trên mỗi đường cong nhỏ này điểm M_i. Nếu chia đường cong $\overset{\frown}{AB}$ đủ nhỏ, thì có thể xem:

1. Chất điểm di chuyển trên đường cong $A_{i-1}A_i$ là **đường thẳng**,

2. Lực tác dụng lên chất điểm khi di chuyển trên đường cong $A_{i-1}A_i$ **không đổi** và bằng với $\overrightarrow{F}(M_i)$.

Lúc này, công của lực khi di chuyển chất điểm M từ vị trí A_{i-1} đến A_i là $< \overrightarrow{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i} >$. Khi cộng công của lực trên mọi đường cong nhỏ $A_{i-1}A_i$ ta thu được công thức gần đúng của công khi di chuyển chất điểm dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} < \overrightarrow{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i} >$$

Đặt $\lambda = \max_i \Delta \ell_i$ và cho $\lambda \to 0$ thì

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} < \overrightarrow{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i} >$$

Ta có $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}) = (\Delta x_i, \Delta y_i)$. Giả sử $\overrightarrow{F}(M_i) = (P(x_i, y_i), Q(x_i, y_i))$ thì khi đó

$$< \overrightarrow{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i} >= P(x_i, y_i).\Delta x_i + Q(x_i, y_i).\Delta y_i$$

Như vậy,

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i).\Delta x_i + Q(x_i, y_i).\Delta y_i] = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i).\Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i).\Delta y_i = I_1 + I_2$$

Nếu giới hạn I_1, I_2 tồn tại không phụ thuộc vào việc chia cung $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ thành những cung nhỏ và không phụ thuộc vào việc chọn điểm M_i trên những cung này, thì những giới hạn I_1, I_2 được gọi là **tích phân đường loại II** dọc theo đường cong AB của hàm $P(x, y)$ theo biến x và của hàm $Q(x, y)$ theo biến y. Kí hiệu

$$\int_{AB} P(x, y)dx, \int_{AB} Q(x, y)dy.$$

Trong thực tế, ta thường gặp tổng của những tích phân đường loại II của hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ và ta gọi đó là tích phân đường loại II tổng quát:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

1.2.2 Định nghĩa

Định nghĩa 1.2. Cho $\overrightarrow{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ là hàm véc tơ xác định trên đường cong trơn $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$. Khi đó tích phân đường loại II của $\overrightarrow{F}$ dọc theo $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ là

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy.$$

1.2.3 Mối liên hệ giữa tích phân đường loại I và tích phân đường loại II

Theo công thức tính công của lực $\overrightarrow{F}$ để di chuyển chất điểm M từ điểm A đến điểm B theo một đường cong trơn C nối điểm A với điểm B trong mặt phẳng Oxy, ta có

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} < \overrightarrow{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i} >$$

Khi λ đủ nhỏ chúng ta có thể xem góc giữa các véc tơ $\overrightarrow{F}(M_i), \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ là góc $\alpha(M_i)$ giữa véc tơ $\overrightarrow{F}(M_i)$ và véc tơ tiếp tuyến với đường cong tại điểm M_i. Khi đó $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ có thể tính gần đúng bằng $\Delta \ell_i.\overrightarrow{T}(M_i)$, với $\overrightarrow{T}(M_i)$ là **véc tơ tiếp tuyến đơn vị** tại điểm M_i. Như vậy,

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{F}(M_i)|.|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}| \cos \alpha(M_i) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} .|\overrightarrow{F}(M_i)|.\Delta \ell_i.|\overrightarrow{T}(M_i)|. \cos \alpha(M_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} .|\overrightarrow{F}(M_i)|. \cos \alpha(M_i).\Delta \ell_i.$$

Tổng này chính là tổng Riemann của tích phân đường loại I. Do đó

$$W = \int\limits_{AB} |\overrightarrow{F}(M)|.\cos\alpha(M).d\ell.$$

Vậy mối liên hệ giữa tích phân đường loại I và tích phân đường loại II là

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} |\overrightarrow{F}(M)|.\cos\alpha(M).d\ell.$$

Tuy nhiên, giữa tích phân đường loại I và tích phân đường loại II có sự khác biệt quan trọng sau:

1. Tích phân đường loại I **không phụ thuộc** vào hướng lấy tích phân trên cung $\overset{\frown}{\text{AB}}$ vì trong tổng Riemann của tích phân đường loại I, giá trị của $f(M_i)$ nhân với $\Delta\ell_i$.

2. Tích phân đường loại II **phụ thuộc** vào hướng lấy tích phân trên cung $\overset{\frown}{\text{AB}}$ vì trong tổng Riemann của tích phân đường loại II, giá trị của $\overrightarrow{F}(M_i)$ nhân với $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ nên khi đổi hướng của véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ thì sẽ đổi dấu của tổng Riemann.

Như vậy, đối với tích phân đường loại II thì

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

1.2.4 Trường hợp cung $\overset{\frown}{\text{AB}}$ có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$

Cho cung trơn $\overset{\frown}{\text{AB}}$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$t = a$ ứng với điểm đầu của $\overset{\frown}{\text{AB}}$, $t = b$ ứng với điểm cuối của $\overset{\frown}{\text{AB}}$. Cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục trong miền mở D chứa cung trơn $\overset{\frown}{\text{AB}}$. Khi đó

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt.$$

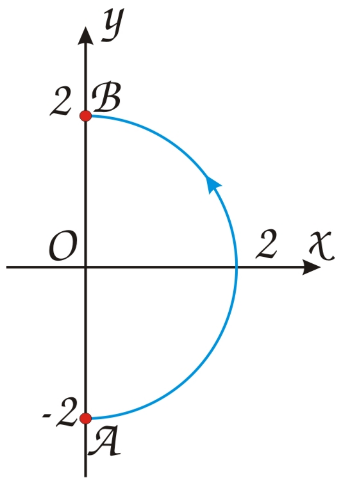
***Ví dụ* 1.2.1.** Tính tích phân $I = \int\limits_C (-ydx + xdy)$ theo đường cong C, là nửa đường tròn được xác định bởi $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$, đi từ $A(0,-2)$ đến $B(0,2)$.

Giải. Ta phải tham số hóa nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 4, x \geqslant 0$ bằng cách đặt

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) &= -2\sin t \\ y'(t) &= 2\cos t \end{cases}$$

Điểm đầu A ứng với $t = -\dfrac{\pi}{2}$, điểm cuối B ứng với $t = \dfrac{\pi}{2}$. Khi đó

$$I = \int\limits_C (-ydx + xdy) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} [(-2\sin t)(-2\sin t) + 2\cos t.2\cos t]dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 4dt = [4t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi.$$



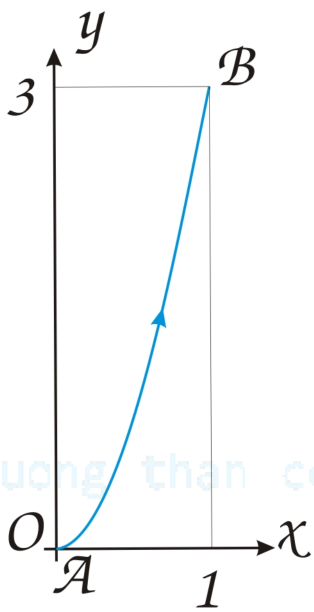
Hình 1.12: Đường cong $C: x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$, đi từ $A(0, -2)$ đến $B(0, 2)$.

1.2.5 Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x)$

Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y(x)$, $x = a$ là hoành độ điểm đầu, $x = b$ là hoành độ điểm cuối. Cho hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ liên tục trong miền mở D chứa cung trơn $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx.$$

***Ví dụ* 1.2.2.** Tính $I = \int\limits_C (4x - y)dx + 5x^2 y dy$, với C là parabol $y = 3x^2$ đi từ điểm $A(0, 0)$ đến $B(1, 3)$.



Hình 1.13: C là parabol $y = 3x^2$ đi từ điểm $A(0, 0)$ đến $B(1, 3)$.

Giải. Vì phương trình của C là $y = 3x^2$ nên $y'(x) = 6x$, điểm đầu A ứng với $x = 0$, điểm cuối B ứng với $x = 1$. Khi đó

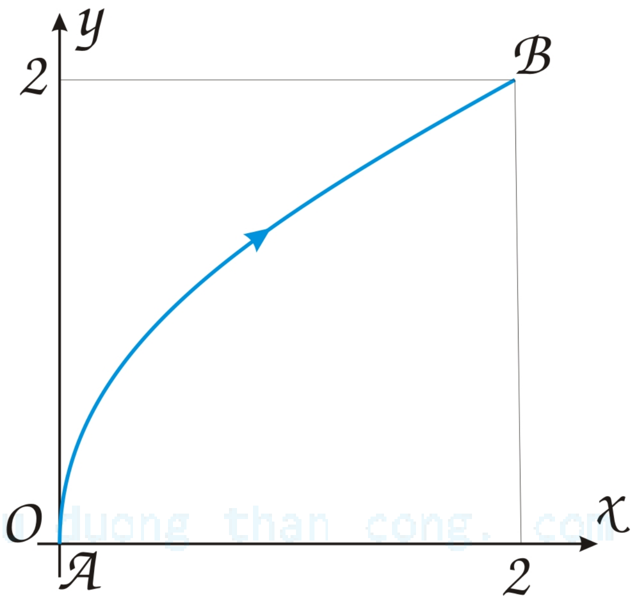
$$I = \int\limits_C (4x - y)dx + 5x^2 y dy = \int\limits_0^1 [(4x - 3x^2) + 5x^2.3x^2.6x]dx = \int\limits_0^1 (4x - 3x^2 + 90x^5)dx = \left[2x^2 - x^3 + 15x^6\right]_0^1 = 16.$$

1.2.6 Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x(y)$

Trường hợp cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $x = x(y)$, $y = a$ là tung độ điểm đầu, $y = b$ là tung độ điểm cuối. Cho hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục trong miền mở D chứa cung trơn $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)]dy.$$

***Ví dụ* 1.2.3.** Tính tích phân $I = \int\limits_C xydx - y^2dy$ theo đường cong C, được xác định bởi $y^2 = 2x$ đi từ $A(0,0)$ đến $B(2,2)$.



Hình 1.14: Đường cong C, được xác định bởi $y^2 = 2x$ đi từ $A(0,0)$ đến $B(2,2)$

Giải. Ta có $C : y^2 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{2} \Rightarrow x'(y) = y$. Điểm A ứng với $y = 0$, điểm cuối B ứng với $y = 2$. Khi đó

$$I = \int\limits_C xydx - y^2dy = \int\limits_0^2 \left[\frac{y^2}{2}.y.y - y^2\right]dy = \left[\frac{y^5}{10} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{32}{10} - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

1.2.7 Tính phân đường loại hai trong không gian

Cho cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

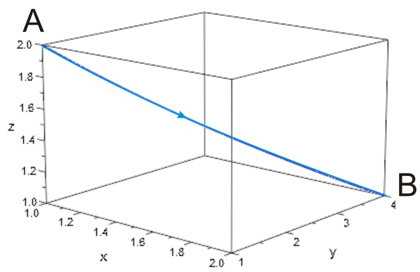
$t = a$ ứng với điểm đầu của C, $t = b$ ứng với điểm cuối của C.

Cho hàm số $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ liên tục trong miền mở D chứa cung $\overset{\frown}{AB}$. Khi đó

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + +Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

***Ví dụ* 1.2.4.** Tính $\int\limits_C (x+y)dx + 2zdy + xydz$, với C là đường cong xác định bởi phương trình tham số $x = t, y = t^2, z = 3 - t$, đi từ điểm A ứng với $t = 1$ đến điểm B ứng với $t = 2$.



Hình 1.15: $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong xác định bởi phương trình tham số $x = t, y = t^2, z = 3 - t$, điểm A ứng với $t = 1$, điểm B ứng với $t = 2$.

Giải. Với đường cong $\overset{\frown}{AB}$ ta có $dx = dt, dy = 2tdt, dz = -dt$. Khi đó

$$\int\limits_{AB} (x+y)dx + 2zdy + xydz = \int\limits_1^2 [(t+t^2) + 2(3-t).2t + t.t^2.(-1)]dt = \int\limits_1^2 (13t - 3t^2 - t^3)dt =$$

$$= \left[\frac{13}{2}t^2 - t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_1^2 = \frac{35}{4}$$

1.2.8 Công thức Green

Định nghĩa 1.3. Điểm $M(x, y)$ của đường cong C xác định bởi

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

được gọi là **điểm bội** hay điểm tự cắt của đường cong C.

Định nghĩa 1.4. Đường cong C không chứa điểm bội được gọi là **đường cong đơn giản**.

Định nghĩa 1.5. Đường cong $\overset{\frown}{AB}$ được gọi là **đường cong khép kín**, nếu điểm đầu A và điểm cuối B trùng nhau.

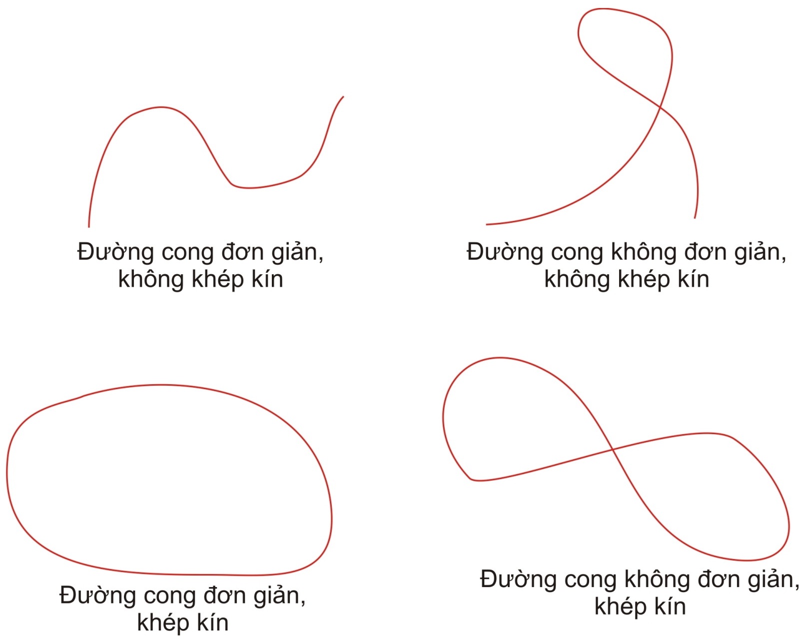
Định nghĩa 1.6. Miền phẳng D được gọi là **miền liên thông** nếu như với hai điểm bất kỳ $A, B \in D$ thì tồn tại một đường cong nối A, B cũng thuộc D.

Định nghĩa 1.7. Miền phẳng D được gọi là **miền đơn liên** khi thỏa mãn tính chất:

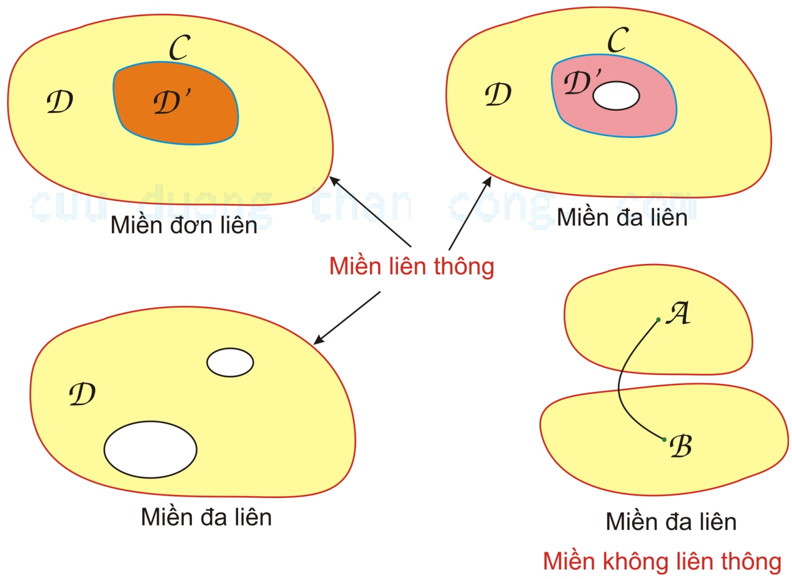
1. Miền phẳng D là miền liên thông;
2. Nếu đường cong đơn giản khép kín C nằm trọn trong miền D thì miền D' có biên là đường cong C sẽ nằm trọn trong D.

Định nghĩa 1.8. Miền phẳng D không phải là miền đơn liên, được gọi là miền đa liên.

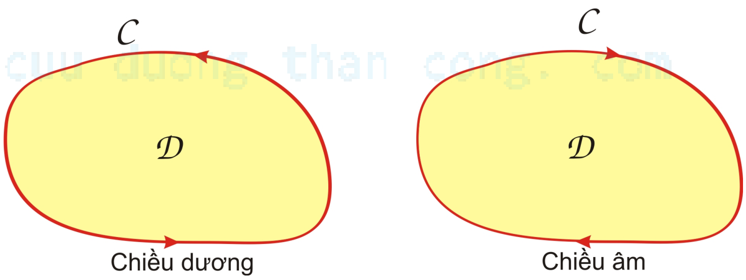
Định nghĩa 1.9. Chiều dương của đường cong đơn giản, khép kín C là chiều ngược chiều kim đồng hồ. **Chiều âm** của đường cong đơn giản, khép kín C là chiều cùng chiều kim đồng hồ.



Hình 1.16: Các đường cong trong mặt phẳng



Hình 1.17: Miền đơn liên, miền đa liên



Hình 1.18: Chiều dương, chiều âm của đường cong đơn giản, khép kín

Định nghĩa 1.10. Đường cong C xác định bởi

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

được gọi là **trơn từng khúc** nếu C có thể chia thành nhiều đoạn nhỏ và trên mỗi đoạn nhỏ này $x'(t), y'(t)$ là những hàm liên tục.

Định lý 1.6. *(Định lý Green.) Trong mặt phẳng xOy, cho D là miền đóng có biên là đường cong đơn giản, khép kín, trơn từng khúc C. Các hàm $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong D. Khi đó*

$$\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \pm \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Dấu "+" nếu chiều lấy tích phân trùng với chiều dương quy ước. Ngược lại, ta lấy dấu "-".

Chú ý. Như vậy, khi đi theo đường cong C thì miền D sẽ nằm bên trái đường cong C thì chiều lấy tích phân là **chiều dương**.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh

$$\oint\limits_C P(x,y)dx = - \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

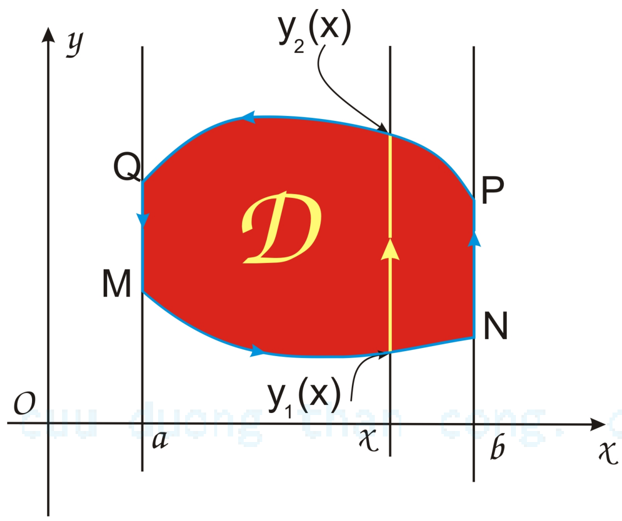
và

$$\oint\limits_C Q(x,y)dy = + \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

1. Giả sử miền D lồi theo y có nghĩa là

$$D : a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$$

Vậy miền D được giới hạn bởi 4 cung MN, NP, PQ, QM. Ta có



Hình 1.19: Miền $D : a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]dx = -\int\limits_b^a P(x,y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,y_1(x))dx =$$

$$= -\int\limits_{PQ} P(x,y)dx - \int\limits_{MN} P(x,y)dx = -\int\limits_{PQ} P(x,y)dx - \int\limits_{MN} P(x,y)dx - \int\limits_{QM} P(x,y)dx - \int\limits_{NP} P(x,y)dx = -\oint\limits_C P(x,y)dx.$$

Ở đây, ta sử dụng công thức tích phân đường loại hai và chú ý rằng

$$\int_{QM} P(x,y)dx = 0; \int_{NP} P(x,y)dx = 0.$$

Tương tự, đối với miền lồi theo x ta chứng minh được

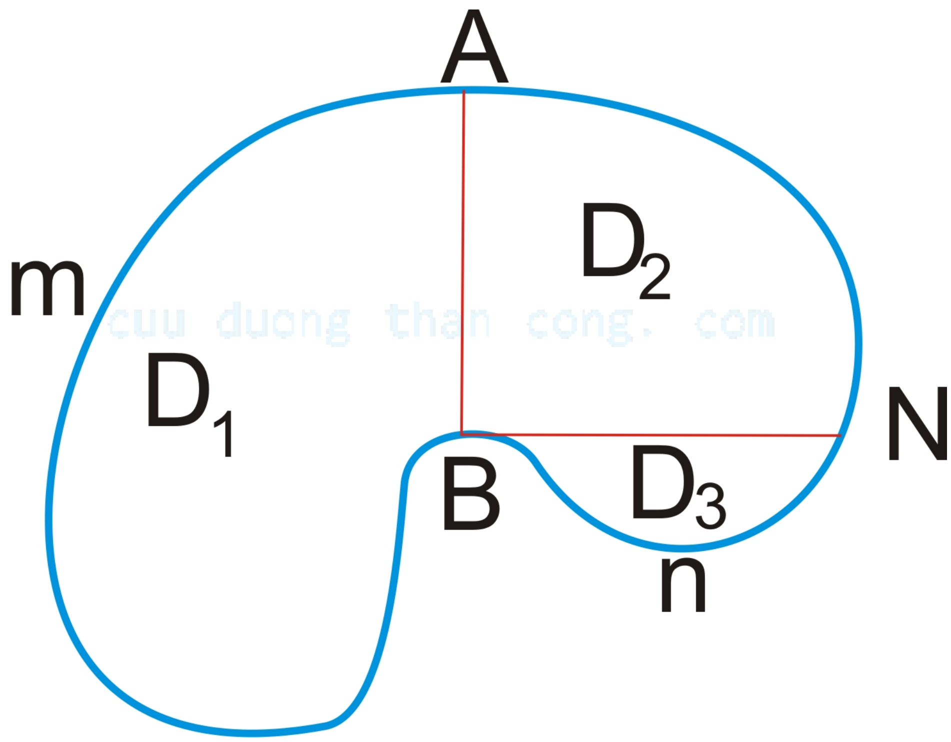
$$\oint_C Q(x,y)dy = +\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

Vậy, chúng ta đã chứng minh được định lý cho miền D lồi theo cả x và y.

2. Giả sử D là miền đơn liên có thể chia thành hữu hạn các miền đơn giản (lồi theo x và y). Giả sử miền D chia thành miền D_1, D_2, D_3 với các biên C_1, C_2, C_3 :

$$C_1 = AmB + \overline{BA}, C_2 = \overline{BN} + NA + \overline{AB}, C_3 = BnN + \overline{NB}$$

Ta có



Hình 1.20: Miền D chia thành miền D_1, D_2, D_3

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Theo công thức Green cho các miền D_1, D_2, D_3 ta có

$$\iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{C_1} Pdx + Qdy = \int_{AmN} + \int_{\overline{BA}}.$$

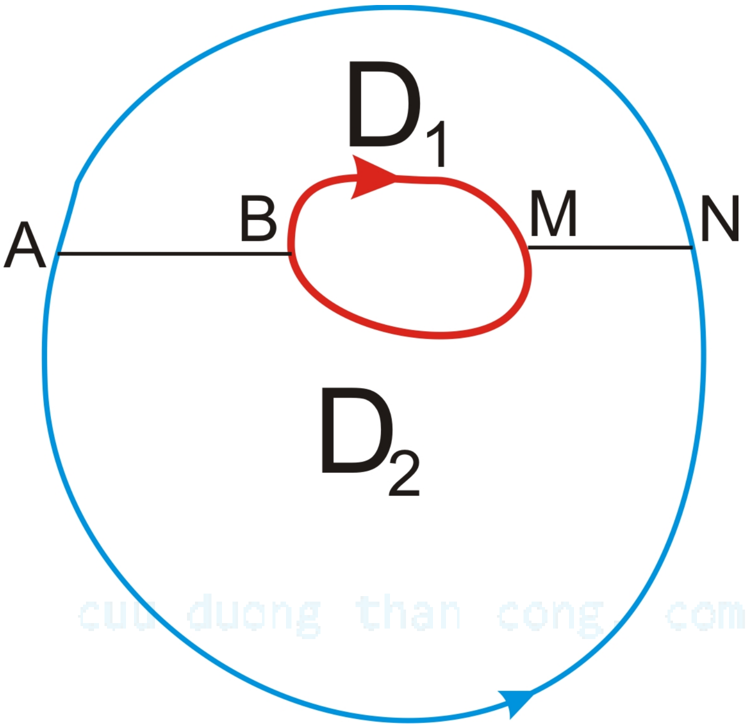
$$\iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{C_2} Pdx + Qdy = \int_{\overline{BN}} + \int_{NA} + \int_{\overline{AB}}.$$

$$\iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{C_3} Pdx + Qdy = \int_{BnN} + \int_{\overline{NB}}.$$

Cộng các đẳng thức trên lại ta được

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{AmN} + \int\limits_{BA} + \int\limits_{\overline{BN}} + \int\limits_{NA} + \int\limits_{\overline{AB}} + \int\limits_{BnN} + \int\limits_{\overline{NB}} = \int\limits_{AmN} + \int\limits_{NA} + \int\limits_{BnN} = \oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

3. Giả sử miền D là miền đa liên, có thể chia thành hữu hạn các miền đơn liên. Ví dụ, miền D có thể tách thành 2 miền D_1, D_2 bởi các đoạn thẳng AB, MN. Sử dụng công thức Green cho D_1, D_2 và lấy tổng của chúng, ta cũng thu được định lý Green cho miền D là miền đa liên.



Hình 1.21: Miền D có thể tách thành 2 miền D_1, D_2 bởi các đoạn thẳng AB, MN.

Để chứng minh định lý Green cho trường hợp tổng quát, ta phải xấp xỉ miền D bởi những miền đã xét.

***Ví dụ* 1.2.5.** Tính tích phân $I = \int\limits_C x^2ydx - xy^2dy$, với C là đường tròn $x^2+y^2=9$, lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

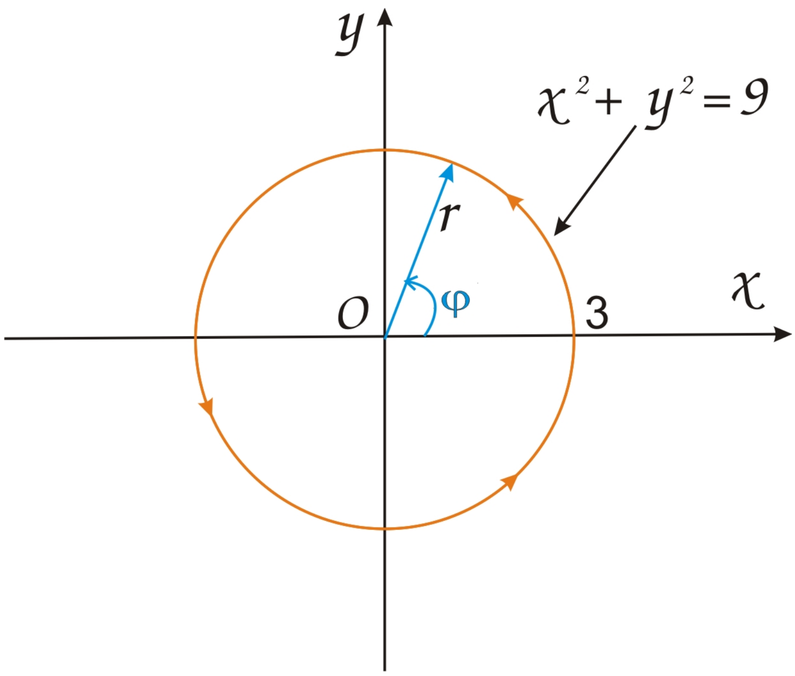
Giải. Ta có $P(x,y) = x^2y$, $Q = -xy^2 \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2$. Áp dụng công thức Green đối với đường cong khép kín C, lấy theo chiều dương là chiều ngược kim đồng hồ, ta được

$$I = \oint\limits_C x^2ydx - xy^2dy = +\iint\limits_D (-y^2-x^2)dxdy$$

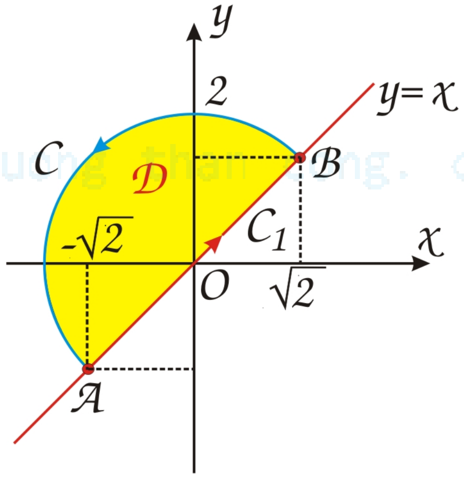
Đổi miền $D: x^2+y^2 \leqslant 9$ sang hệ tọa độ cực, ta được $D = \{(r,\varphi): 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 3\}$. Khi đó

$$I = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 r^2.r dr = -[\varphi]_0^{2\pi}.\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 = -\frac{81\pi}{2}.$$

***Ví dụ* 1.2.6.** Tính tích phân đường loại hai $I = \int\limits_C (x^2+2y)dx - (y^2+2x)dy$, với C là phần đường tròn $x^2+y^2=4$ thỏa điều kiện $y \geqslant x$, hướng theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.



Hình 1.22: C là đường tròn $x^2+y^2=9$, lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.



Hình 1.23: C là phần đường tròn $x^2+y^2=4$ thỏa điều kiện $y \geqslant x$, hướng theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

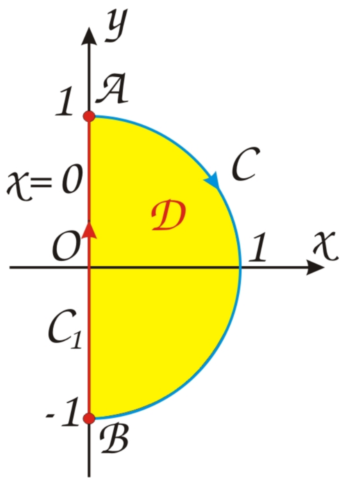
Giải. Bài toán có thể giải theo cách tham số hóa phần đường tròn $x^2+y^2=4$ thỏa điều kiện $y \geqslant x$. Tuy nhiên, việc tính tích phân theo đường cong C này khá phức tạp. Do đó, bằng việc thêm đường C_1 là đường thẳng AB vào đường cong C ta sẽ thu được đường cong khép kín. Từ đó, chúng ta có thể áp dụng được công thức Green. Vậy

$$I=\int\limits_{C}[(x^2+2y)dx-(y^2+2x)dy]=\int\limits_{C+C_1}[(x^2+2y)dx-(y^2+2x)dy]-\int\limits_{C_1}[(x^2+2y)dx-(y^2+2x)dy]=$$

$$=\iint\limits_{D}[-(y^2+2x)'_x-(x^2+2y)'_y]dxdy-\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}[(x^2+2x)-(x^2+2x)]dx=\iint\limits_{D}(-2-2)dxdy-\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}0dx=$$

$$=-4.\iint\limits_{D}dxdy=-4S_D=-4.\frac{\pi.4}{2}=-8\pi.$$

***Ví dụ* 1.2.7.** Tính tích phân đường loại hai $I = \int\limits_C [(y^5e^x - 5y)dx + (5y^4e^x - 5)dy]$, với C là phần đường tròn $x = \sqrt{1-y^2}$ đi từ $A(0,1)$ đến $B(0,-1)$.



Hình 1.24: C là phần đường tròn $x = \sqrt{1-y^2}$ đi từ $A(0,1)$ đến $B(0,-1)$.

Giải. Bài toán có thể giải theo cách tham số hóa phần đường tròn $x = \sqrt{1-y^2}$. Tuy nhiên, việc tính tích phân theo đường cong C này khá phức tạp. Do đó, bằng việc thêm đường C_1 là đường thẳng BA vào đường cong C ta sẽ thu được **đường cong khép kín theo chiều cùng chiều kim đồng hồ**. Từ đó, chúng ta có thể áp dụng được công thức Green. Vậy

$$I = \int\limits_C [(y^5e^x - 5y)dx + (5y^4e^x - 5)dy] = \int\limits_{C+C_1} [(y^5e^x - 5y)dx + (5y^4e^x - 5)dy] - \int\limits_{C_1} [(y^5e^x - 5y)dx + (5y^4e^x - 5)dy] =$$

$$= - \iint\limits_D [(5y^4e^x - 5)'_x - (y^5e^x - 5y)'_y]dxdy - \int\limits_{-1}^{1} [(5y^4e^0 - 5)]dy = - \iint\limits_D (5y^4e^x - 5y^4e^x + 5)dxdy - \int\limits_{-1}^{1} (5y^4 - 5)dy =$$

$$= -5.\iint\limits_D dxdy - \left[y^5 - 5y\right]_{-1}^{1} = -5S_D + 8 = -5.\frac{\pi.1}{2} + 8 = -\frac{5\pi}{2} + 8.$$

Ứng dụng công thức Green tính diện tích miền phẳng D.

Từ công thức Green cho $Q(x,y) = x$ và $P(x,y) = -y$ ta được

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx.$$

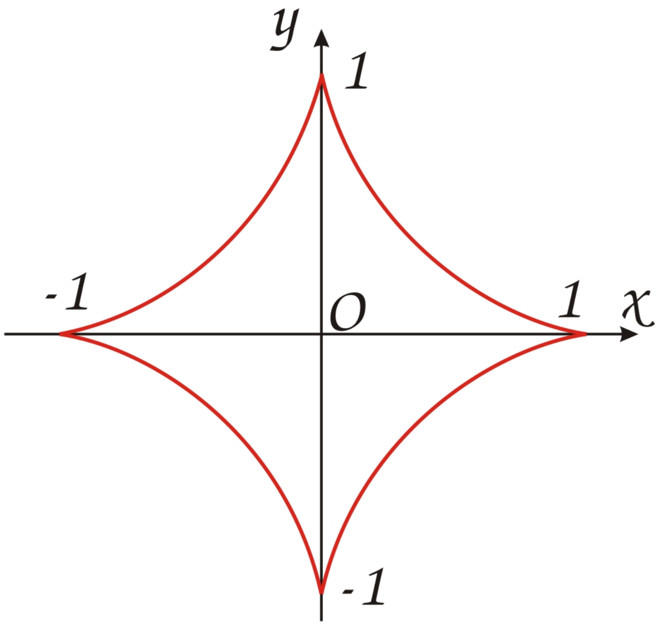
***Ví dụ* 1.2.8.** Tính diện tích miền phẳng D giới hạn bởi $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Giải. Từ công thức Green cho $Q(x,y) = x$ và $P(x,y) = -y$ ta được

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [x(t).y'(t) - y(t).x'(t)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [\cos^3 t.3\sin^2 t.\cos t - \sin^3 t.3\cos^2 t.(-\sin t)]dt = \frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi} [\sin^2 t\cos^2 t]dt = \frac{3}{8}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2tdt =$$

$$= \frac{3}{16}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)dt = \frac{3}{16}.\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$



Hình 1.25: Miền phẳng D giới hạn bởi $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

1.2.9 Tích phân không phụ thuộc vào đường đi

Định lý 1.7. *Cho hàm $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng liên tục trong miền mở, đơn liên D chứa cung AB. Khi đó các mệnh đề sau tương đương*

- $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

- *Tích phân $I = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ không phụ thuộc đường cong trơn từng khúc nối cung AB nằm trong D.*

- *Tồn tại hàm $u(x,y)$ là vi phân toàn phần của $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, tức là*

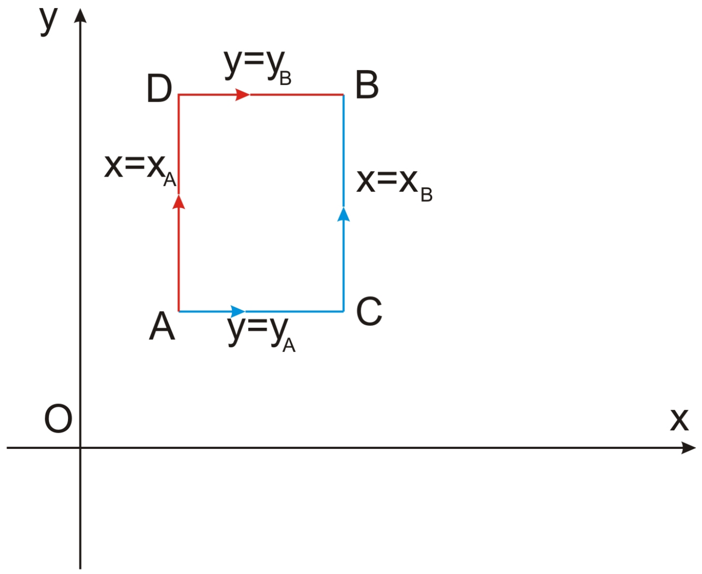
$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A)$$

- *Tích phân trên mọi chu tuyến kín C, trơn từng khúc trong D bằng* 0.

$$I = \oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Cách tính tích phân đường loại hai không phụ thuộc vào đường đi. Do tích phân I không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nên ta có thể lấy tích phân theo đường thẳng từ A đến C sau đó là từ C đến B hoặc lấy tích phân theo đường thẳng từ A đến D sau đó là từ D đến B.



$$I = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} = \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_A)dx + \int_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y)dy,$$

hay

$$I = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AD} + \int\limits_{DB} = \int_{y_A}^{y_B} Q(x_A, y)dy + \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_B)dx.$$

***Ví dụ* 1.2.9.** Chứng minh rằng, tích phân đường $I = \int\limits_{AB} (3x^2y+y)dx+(x^3+x)dy$, với $A(1,-2), B(2,3)$ không phụ thuộc vào đường đi. Tính I.

Giải. Ta có $P(x,y) = 3x^2y + y$, $Q(x,y) = x^3 + x \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 1$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 1$. Do đó, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 1.$$

Vậy tích phân I không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Cách 1: Tính I

Tồn tại hàm $u(x,y)$ là vi phân toàn phần của $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, tức là

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = 3x^2y + y$$

$$\Rightarrow u(x,y) = y.x^3 + y.x + C(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = x^3 + x \Rightarrow x^3 + x + C(y) = x^3 + x \Rightarrow C(y) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = x^3y + xy.$$

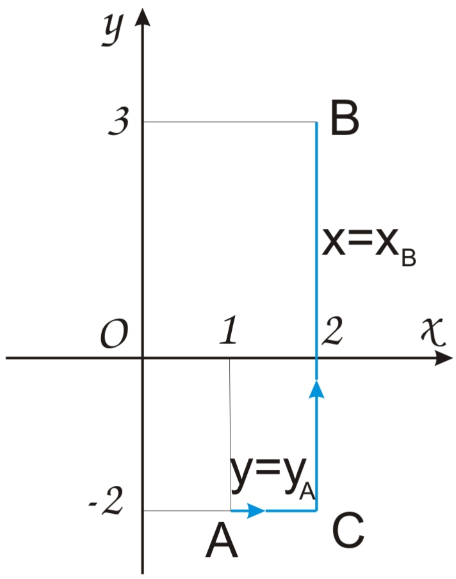
Khi đó

$$I = \int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = u(x_B,y_B)-u(x_A,y_A) = [2^3.3+2.3]-[1^3.(-2)+1.(-2)] = 30-(-4) = 34.$$

Cách 2: Tính I

Vì tích phân I không phụ thuộc vào đường đi nên ta sẽ lấy tích phân theo đường thẳng đi từ A đến C, sau đó đi từ C đến B. Khi đó

$$I = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB} = \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x, y_A)dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(x_B, y)dy =$$



Hình 1.26: Lấy tích phân theo đường thẳng từ A đến C sau đó từ C đến B

$$= \int_1^2 (3x^2.-2+-2)dx + \int_{-2}^3 (2^3+2)dy = \left[-2x^3-2x\right]_1^2 + [10y]_{-2}^3 = (-20+4)+(30+20) = 34.$$

***Ví dụ* 1.2.10.** Cho 2 hàm $P(x,y) = (1+x+y)e^{-y}, Q(x,y) = (1-x-y)e^{-y}$. Tìm hàm $h(x)$ thỏa $h(0) = 1$ để biểu thức $h(x)P(x,y)dx + h(x)Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó. Với $h(x)$ vừa tìm, tính tích phân $I = \int_C [h(x)P(x,y)dx + h(x)Q(x,y)dy]$ trong đó C là nửa đường tròn $x^2+y^2 = 9$ nằm bên phải trục tung, chiều đi từ điểm $A(0,-3)$ đến điểm $B(0,3)$.

Giải. Để biểu thức $h(x)P(x,y)dx + h(x)Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó thì

$$[h(x)Q(x,y)]'_x = [h(x)P(x,y)]'_y \Rightarrow h'(x)Q(x,y) + h(x).Q'_x = h(x).P'_y$$

$$\Rightarrow h'(x).(1-x-y)e^{-y} + h(x).(-1)e^{-y} = h(x).[e^{-y} - (1+x+y)e^{-y}] \Rightarrow h'(x).(1-x-y)e^{-y} = h(x).(1-x-y)e^{-y}$$

$$\Rightarrow h'(x) = h(x) \Rightarrow \frac{dh}{dx} = h \Rightarrow \frac{dh}{h} = dx \Rightarrow \ln|h(x)| = x + C \Rightarrow h(x) = e^{x+C}.$$

Hàm $h(x)$ thỏa $h(0) = 1$ nên $h(0) = e^{0+C} = 1 \Rightarrow C = 0$. Vậy $h(x) = e^x$.

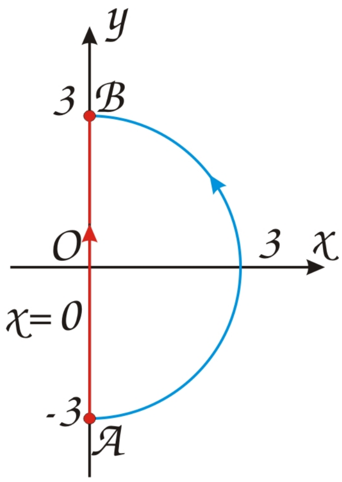
Với $h(x) = e^x$ thì tích phân $I = \int_C [h(x)P(x,y)dx + h(x)Q(x,y)dy]$ **không phụ thuộc đường đi** nên ta sẽ lấy tích phân theo đường thẳng $x = 0$ đi từ A đến B. Khi đó

$$I = \int_{AB} [h(x)P(x,y)dx + h(x)Q(x,y)dy] = \int_{y_A}^{y_B} h(0)Q(0,y)dy =$$

$$= \int_{-3}^{3} e^0.(1-0-y)e^{-y}dy = \int_{-3}^{3} (1-y)e^{-y}dy$$

Theo công thức tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} u = 1-y \\ dv = e^{-y}dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dy \\ v = -e^{-y} \end{cases}$$



Hình 1.27: C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ nằm bên phải trục tung, chiều đi từ điểm $A(0, -3)$ đến điểm $B(0, 3)$.

Khi đó

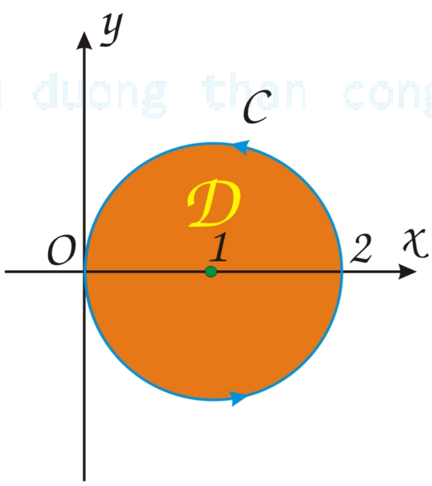
$$I = \left[-e^{-y}(1-y)\right]_{-3}^{3} - \int_{-3}^{3} e^{-y}dy = \left[(1-1+y)e^{-y}\right]_{-3}^{3} = \left[ye^{-y}\right]_{-3}^{3} = 3(e^{-3} + e^{3}).$$

***Ví dụ* 1.2.11.** Cho 2 hàm $P(x, y) = 2ye^{xy} + e^{\alpha x}\cos y$, $Q(x, y) = 2xe^{xy} - e^{\alpha x}\sin y$, trong đó α là hằng số. Tìm α để biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ nào đó. Với α vừa tìm được, tính tích phân đường $I = \oint\limits_C [P(x, y) - y^3]dx + [Q(x, y) + x^3]dy$ trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ lấy theo chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Giải. Để biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ nào đó thì

$$Q'_x = P'_y \Rightarrow 2e^{xy} + 2xye^{xy} - \sin y.\alpha.e^{\alpha x} = 2e^{xy} + 2yxe^{xy} + e^{\alpha x}(-\sin y)$$

$$\Rightarrow -\sin y.\alpha.e^{\alpha x} = e^{\alpha x}.(-\sin y) \Rightarrow \alpha = 1.$$



Hình 1.28: $C : x^2 + y^2 = 2x$ lấy theo chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Khi đó theo công thức Green đối với đường cong khép kín C với $Q'_x = P'_y$, ta có

$$I = \oint\limits_C [P(x,y) - y^3]dx + [Q(x,y) + x^3]dy = \iint\limits_D \left([Q(x,y) + x^3]'_x - [P(x,y) - y^3]'_y\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left([Q'_x + 3x^2] - [P'_y - 3y^2]\right) dxdy = \iint\limits_D \left(3x^2 + 3y^2\right) dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2.rdr =$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2\cos\varphi} = 3\int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{2^4\cos^4\varphi}{4}\right] d\varphi = 12\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = 3.\left[\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = 9\pi.$$

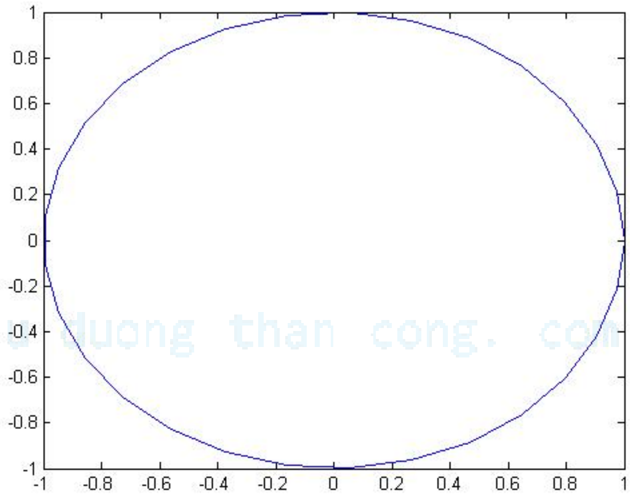
1.3 Thực hành MatLab

1.3.1 Vẽ đường cong tham số trong mặt phẳng

Lệnh plot(x(t),y(t))

***Ví dụ* 1.3.1.** Vẽ đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

```
t = linspace(0,2*pi,30);
x = cos(t);
y = sin(t);
plot(x,y)
```

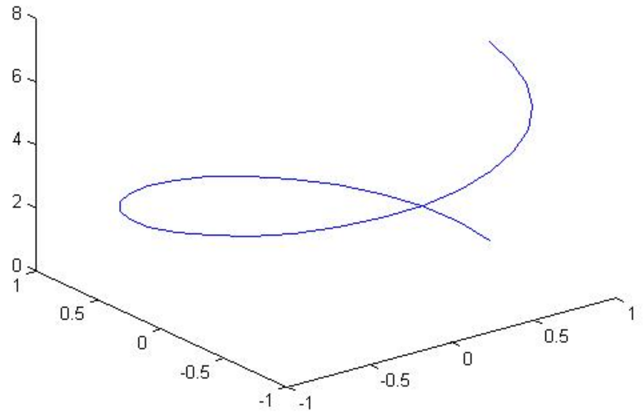
Hình 1.29: Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

1.3.2 Vẽ đường cong tham số trong không gian

Lệnh plot3(x(t),y(t),z(t))

***Ví dụ* 1.3.2.** Vẽ $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

```
t = linspace(0,2*pi,30);
x = cos(t);
y = sin(t);
z=t;
plot3(x,y,z)
```



Hình 1.30: Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

1.4 Bài tập

1.4.1 Tính tích phân đường loại I

Bài tập 1.4.1. Tính tích phân

1. Tính tích phân $\int\limits_C ye^{-x} d\ell$ với C là đường cong $x = \ln(1+t^2), y = 2\arctan t - t, 0 \leqslant t \leqslant 1$.
2. Tính $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2} d\ell$ trong đó C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 2x, x \geqslant 1$.
3. Tính tích phân $\int\limits_C x^{4/3} + y^{4/3} d\ell$ với C là đường cong khép kín xác định bởi phương trình $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Bài tập 1.4.2. Tính tích phân

1. Tính tích phân $\int\limits_C \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+5}} d\ell$ với C là đường thẳng nối hai điểm $A(0,0), B(1,2)$.
2. Tính tích phân $\int\limits_C \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+5}} d\ell$ với C là đường thẳng nối hai điểm $A(0,0), B(4,3)$.
3. Tính $\int\limits_C (x+y) d\ell$ trong đó C là chu vi tam giác OAB với $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$.
4. Tính $\int\limits_C x^3 d\ell$ trong đó C là cung $y = \dfrac{x^2}{2}, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$.

Bài tập 1.4.3. Tính tích phân

1. Tính tích phân $\int\limits_C \arctan \frac{y}{x} d\ell$ với C là đường cong xác định trong hệ tọa độ cực bởi phương trình $r = \varphi, \varphi \in [0, \pi/2]$.

Bài tập 1.4.4. Tính tích phân

1. Tính tích phân $\int\limits_C xyzd\ell$ với C là đường cong xác định bởi $x = t, y = \frac{t^2}{2}, z = \frac{\sqrt{8t^3}}{3}, t \in [0, 1]$.

2. Tính $\int\limits_C (x+z)d\ell$ trong đó C là đường cong $x = t, y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}, z = t^3, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

3. Tính $\int\limits_C \frac{z^2}{x^2+y^2} d\ell$ trong đó C là đường cong $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4. Tính tích phân $\int\limits_C (x+y-2z)d\ell$ với C là giao tuyến của mặt trụ $x^2+y^2 = 1$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$

5. Tính $\int\limits_C xyzd\ell$ trong đó C là giao tuyến của 2 mặt $x^2+y^2+z^2 = 1$ và $x^2+y^2 = \frac{1}{4}$ lấy phần $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$.

1.4.2 Tính tích phân đường loại II

Bài tập 1.4.5. Tính tích phân đường $I = \int\limits_C ydx + xdy$ theo đường cong C với điểm đầu $O(0, 0)$ và điểm cuối $A(1, 1)$ nếu như

1. C là đoạn thẳng OA.

2. C là cung parabol $y = x^2$.

3. C là cung của đường tròn tâm $(1, 0)$ bán kính bằng 1.

Bài tập 1.4.6. Tính tích phân $I = \int\limits_C xdy - ydx$ theo đường cong C, đi từ $A(0, 0)$ đến $B(1, 2)$.

1. C là đoạn thẳng AB. **ĐS.** 0

2. C là cung parabol $y = 2x^2$. **ĐS.** $\frac{2}{3}$

3. C là đường thẳng gấp khúc nối 3 điểm A, D, B với $D(0, 1)$. **ĐS.** -1

Bài tập 1.4.7. 1. Tính tích phân $I = \int\limits_C xydx$ theo đường cong $C : y = \sin x$, với điểm đầu $O(0, 0)$ và điểm cuối $A(\pi, 0)$.

2. Tính tích phân $I = \int\limits_C \left(x - \frac{1}{y}\right) dy$ theo đường cong $C : y = x^2$, với điểm đầu $A(1, 1)$ và điểm cuối $B(2, 4)$.

3. Tính tích phân $I = \int\limits_C xdy - ydx$ theo đường cong $C : y = x^3$, với điểm đầu $O(0, 0)$ và điểm cuối $A(2, 4)$.

4. Tính tích phân $I = \int\limits_C \frac{y}{x}dx + dy$ theo đường cong $C : y = \ln x$, với điểm đầu $A(1, 0)$ và điểm cuối $B(e, 1)$.

5. Tính tích phân $I = \int\limits_C 2xydx + x^2dy$ theo đường cong $C : y = \dfrac{x^2}{4}$, với điểm đầu $O(0,0)$ và điểm cuối $A(2,1)$.

6. Tính tích phân $I = \int\limits_C 2xydx - x^2dy$ theo đường cong $C : y = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$, với điểm đầu $O(0,0)$ và điểm cuối $A(2,1)$.

7. Tính tích phân $I = \int\limits_C \cos y dx - \sin y dy$ theo đường cong $C : y = -x$, với điểm đầu $A(-2,2)$ và điểm cuối $B(2,-2)$.

8. Tính tích phân $I = \int\limits_C (xy - y^2)dx + xdy$ theo đường cong $C : y = 2\sqrt{x}$, với điểm đầu $O(0,0)$ và điểm cuối $A(1,2)$.

9. Tính tích phân $I = \int\limits_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ theo đường cong $C : y = x^2$, với điểm đầu $A(-1,1)$ và điểm cuối $B(1,1)$.

10. Tính tích phân $I = \int\limits_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ theo đường cong $C : y = 1 - |x - 1|$, với điểm đầu $O(0,0)$ và điểm cuối $A(2,0)$.

11. Tính tích phân $I = \int\limits_C \dfrac{3x}{y}dx - \dfrac{2y^3}{x}dy$ theo đường cong C, được xác định bởi $y^2 = x$ đi từ $A(4,2)$ đến $B(1,1)$.

12. Tính tích phân $I = \int\limits_C \dfrac{x}{y}dx - \dfrac{y-x}{x}dy$ theo đường cong C, được xác định bởi $y = x^2$ đi từ $A(2,4)$ đến $B(1,1)$.

13. Tính tích phân $I = \int\limits_C x^3dy - xydx$ theo đường cong C, là đoạn thẳng nối $A(0,-2)$ đến $B(1,3)$.

14. Tính tích phân $I = \int\limits_C -3x^2dx + y^3dy$ theo đường cong C, là đoạn thẳng nối $A(0,0)$ đến $B(2,4)$.

Bài tập 1.4.8. 1. Tính tích phân $I = \int\limits_C xdy$ theo đường cong C, là nửa đường tròn được xác định bởi $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, đi từ $A(0,-a)$ đến $B(0,a)$.

Bài tập 1.4.9. Tính tích phân

1. Tính $I = \int\limits_C (ydx + zdy + xdz)$, với C là những đường thẳng gấp khúc nối từ điểm $A(2,0,0)$ đến $B = (3,4,5)$ và từ $B = (3,4,5)$ đến $C = (3,4,0)$.

1.4.3 Tích phân đường không phụ thuộc vào đường đi

Bài tập 1.4.10. Tính tích phân

$$\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x}\right)dy$$

theo đường cong C không qua gốc O và không cắt trục tung.

Lời giải bài tập chương 6

1.4.1 1. $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

2. $4\sqrt{2}$

3. $4a^{7/3}$

1.4.2 1. $\sqrt{5}.\ln\dfrac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}$

2. $\dfrac{5}{2}$

3. $1+\sqrt{2}$

4. $\dfrac{58}{15}$

1.4.3 1. $\dfrac{(\pi^2+4)^{3/2}-8}{24}$

1.4.4 1. $\dfrac{16\sqrt{2}}{143}$

2. $\dfrac{3}{4}$

3. $\dfrac{8\sqrt{2}\pi^3}{3}$

4. -4π

5. $\dfrac{\sqrt{3}}{32}$

1.4.5 1. 1

2. 1

3. 1

1.4.6 1. 0

2. $\dfrac{2}{3}$

3. -1

1.4.7 1. π

2. $\dfrac{14}{3} - \ln 2$

3. 8

4. $\dfrac{3}{2}$

5. 4

6. $\dfrac{12}{5}$

7. $2\sin 2$

8. $-\dfrac{8}{15}$

9. $-\dfrac{14}{15}$

10. $\dfrac{4}{3}$

11. -11

12. $\dfrac{5}{3} - \ln 2$

1.4.8 1. $\dfrac{\pi a^2}{2}$

1.4.9 1. $\dfrac{19}{2}$

1.4.10