

Mục lục

Lời nói đầu	i
Những kí hiệu	ii
Mục lục	iii
Chương 1. TÍCH PHÂN MẶT	2
1.1. Tích phân mặt loại một	2
1.1.1. Bài toán tính khối lượng của mặt cong	2
1.1.2. Định nghĩa	3
1.1.3. Tính chất của tích phân đường loại một	3
1.1.4. Mặt cong S cho bởi phương trình $z = z(x, y)$	3
1.1.5. Mặt cong S cho bởi phương trình $y = y(x, z)$	3
1.1.6. Mặt cong S cho bởi phương trình $x = x(y, z)$	4
1.1.7. Ứng dụng hình học của tích phân mặt loại một	7
1.2. Tích phân mặt loại hai	8
1.2.1. Mặt định hướng	8
1.2.2. Bài toán thực tế	10
1.2.3. Định nghĩa tích phân mặt loại hai	10
1.2.4. Đưa tích phân mặt loại hai về tích phân kép	11
1.2.5. Cách tính tích phân mặt loại hai	12
1.2.6. Công thức Ostrogradski - Gauss	14
1.2.7. Công thức Stokes	17
1.3. Bài tập	19
1.3.1. Tích phân mặt loại một	19
1.3.2. Tích phân mặt loại hai	19
1.3.3. Công thức Ostrogradski - Gauss	19

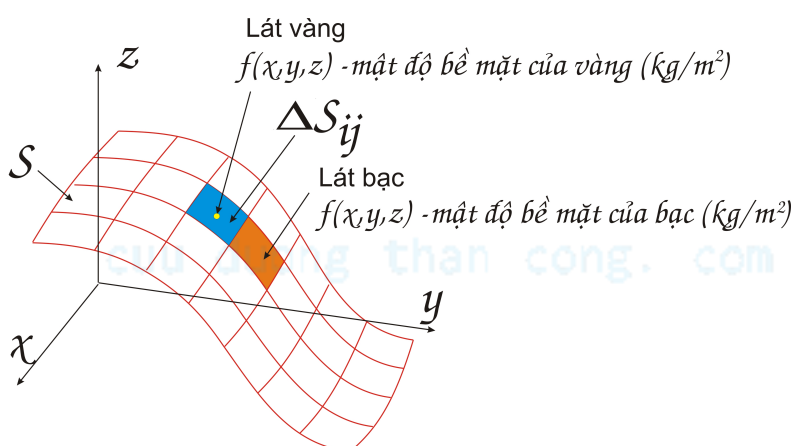
TÍCH PHÂN MẶT

1.1. Tích phân mặt loại một	2
1.2. Tích phân mặt loại hai	8
1.3. Bài tập	19

1.1 Tích phân mặt loại một

1.1.1 Bài toán tính khối lượng của mặt cong

Cho mặt cong S trong không gian có **phân bố khối lượng không đồng đều** theo diện tích mặt cong của nó. Sự phân bố này trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ được mô tả bởi hàm khối lượng trên một đơn vị diện tích $f(x, y, z)$ (hay còn gọi là mật độ bề mặt (kg/m^2))



Hình 1.1: Lát kim loại mỏng không đồng chất

Hãy tính khối lượng M của mặt cong S

Đầu tiên, chúng ta chia mặt cong S thành những mặt cong nhỏ có diện tích ΔS_{ij}

Nếu chúng ta chọn một điểm tùy ý $(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*) \in S_{ij}$ thì ta sẽ được tổng Riemann của tích phân

mặt loại một. Như vậy, khối lượng của vật thể được tính gần đúng là

$$M \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*) \Delta S_{ij}.$$

1.1.2 Định nghĩa

Tích phân mặt loại một là tích phân có dạng

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*) \Delta S_{ij}.$$

S là mặt cong lấy tích phân, $f(x, y, z)$ gọi là hàm lấy tích phân.

1.1.3 Tính chất của tích phân đường loại một

$$1^0. \iint_S 1 dS = \text{diện tích mặt cong.}$$

$$2^0. \iint_S \alpha f(x, y, z) dS = \alpha \cdot \iint_S f(x, y, z) dS.$$

$$3^0. \iint_S [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dS = \iint_S f(x, y, z) dS + \iint_S g(x, y, z) dS.$$

$$4^0. \text{ Nếu } S = S_1 + S_2 \text{ thì } \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS.$$

1.1.4 Mặt cong S cho bởi phương trình $z = z(x, y)$

Nếu mặt cong S có phương trình $z = z(x, y)$, D_{xy} là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy . Khi đó

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

và

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

1.1.5 Mặt cong S cho bởi phương trình $y = y(x, z)$

Nếu mặt cong S có phương trình $y = y(x, z)$, D_{xz} là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxz . Khi đó

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz$$

và

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz$$

1.1.6 Mặt cong S cho bởi phương trình $x = x(y, z)$

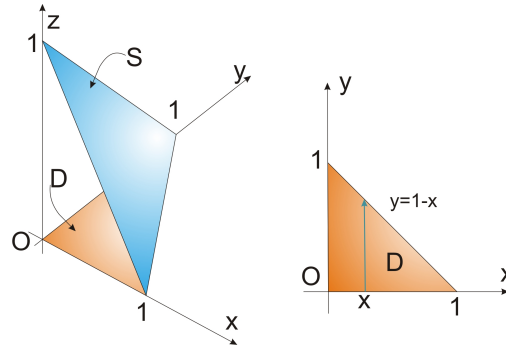
Nếu mặt cong S có phương trình $x = x(y, z)$, D_{yz} là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oyz . Khi đó

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$$

và

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$$

Ví dụ 1.1.1. Tính tích phân $I = \iint_S xyz dS$, trong đó S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

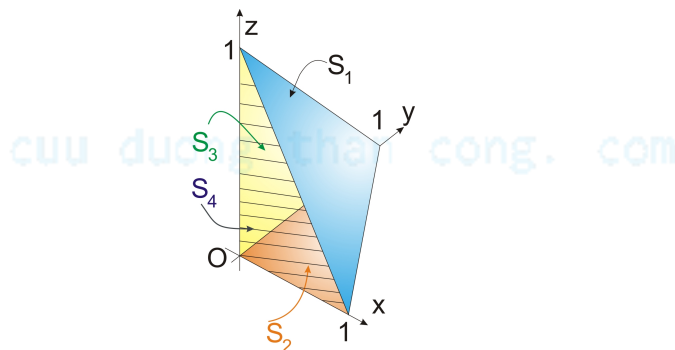


Hình 1.2: S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$ nằm trong góc $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Giải. Mặt cong S được xác định bởi $z = 1 - x - y \Rightarrow z'_x = -1, z'_y = -1$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy(1-x-y) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{3} \iint_D xy(1-x-y) dx dy = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1-x-y) dy = \sqrt{3} \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} - x^2 \frac{y^2}{2} - x \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left[x \frac{(1-x)^2}{2} - x^2 \frac{(1-x)^2}{2} - x \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx = \frac{\sqrt{3}}{120} \end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.2. Tính tích phân $I = \iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$, trong đó S là mặt xung quanh của tứ diện $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.



Hình 1.3: S là mặt xung quanh của tứ diện $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Giải. Mặt cong $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ nên theo tính chất của tích phân mặt loại một, ta có

$$I = \iint_{S_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS + \iint_{S_2} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS + \iint_{S_3} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS + \iint_{S_4} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS$$

Mặt cong S_1 được xác định bởi phương trình $z = 1 - x - y \Rightarrow z'_x = -1, z'_y = -1$. Khi đó

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = \iint_{D_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy = \sqrt{3} \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+x+y} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \sqrt{3} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x} \right) dx = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \ln 2. \end{aligned}$$

Mặt cong S_2 được xác định bởi phương trình $z = 0 \Rightarrow z'_x = 0, z'_y = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_2} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = \iint_{D_2} \frac{1}{(1+x+y)^2} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+x+y} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x} \right) dx = -\frac{1}{2} + \ln 2. \end{aligned}$$

Mặt cong S_3 được xác định bởi phương trình $x = 0 \Rightarrow x'_y = 0, x'_z = 0$. Khi đó

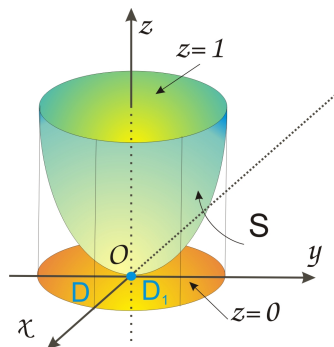
$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{S_3} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = \iint_{D_3} \frac{1}{(1+0+y)^2} \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2} dy dz = \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{1}{(1+y)^2} dy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+y} \right]_{y=0}^{y=1-z} dz = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2-z} + 1 \right) dz = -\ln 2 + 1. \end{aligned}$$

Mặt cong S_4 được xác định bởi phương trình $y = 0 \Rightarrow y'_x = 0, y'_z = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint_{S_4} \frac{1}{(1+x+y)^2} dS = \iint_{D_4} \frac{1}{(1+x+0)^2} \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2} dz dx = \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+x} \right]_{x=0}^{x=1-z} dz = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2-z} + 1 \right) dz = -\ln 2 + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-1) \ln 2$$

Ví dụ 1.1.3. Tính tích phân $I = \iint_S |xyz| dS$, trong đó S là phần mặt $z = x^2 + y^2$ nằm giữa 2 mặt phẳng $z = 0, z = 1$.



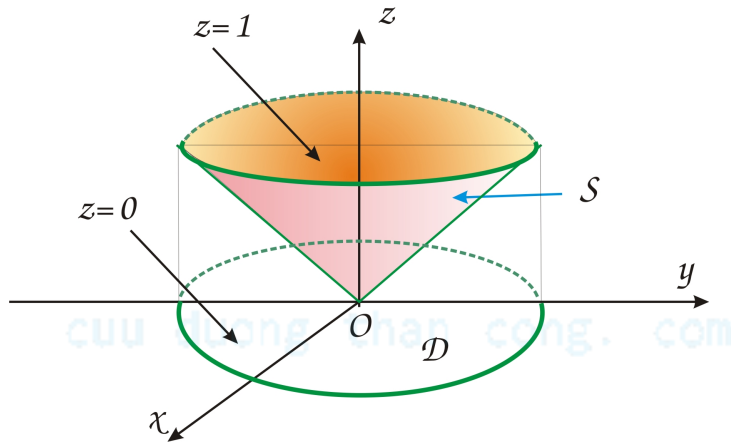
Hình 1.4: S là phần mặt $z = x^2 + y^2$ nằm giữa 2 mặt phẳng $z = 0, z = 1$.

$$D_1 : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1.$$

Giải. Mặt cong S được xác định bởi phương trình $z = x^2 + y^2 \Rightarrow z'_x = 2x, z'_y = 2y$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iint_S |xy|z dS = \iint_D |xy|(x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2} dxdy = 4 \iint_{D_1} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2} dxdy = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi \cdot r^2 \sqrt{1+4r^2} r dr = \left(\frac{1}{120} + \frac{5\sqrt{5}}{24} \right) \int_0^{\pi/2} 2 \sin 2\varphi d\varphi = \left(\frac{1}{60} + \frac{5\sqrt{5}}{12} \right) \end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.4. Tính tích phân $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, trong đó S là phần mặt $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa 2 mặt phẳng $z = 0, z = 1$.



Hình 1.5: S là phần mặt $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa 2 mặt phẳng $z = 0, z = 1$.

Giải. Mặt cong S được xác định bởi phương trình $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

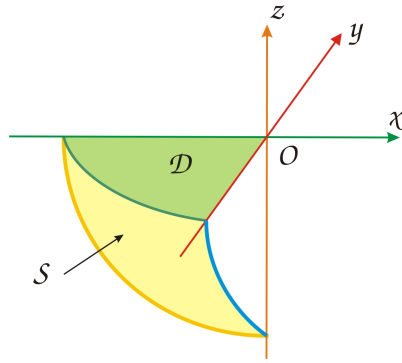
Hình chiếu của mặt cong S lên mặt phẳng Oxy là

$$D : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x^2 + y^2) dS = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} dxdy = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{2} dxdy = \\ &= \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \sqrt{2} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.5. Tính tích phân $\iint_S \frac{x}{x^2 + y^2} dS$, trong đó S là 1 phần tám mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ trong góc $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$.



Hình 1.6: S là 1 phần tám mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ trong góc $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$.

Giải. Vì S là 1 phần tám mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ trong góc $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$ nên mặt cong S được xác định bởi phương trình $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Hình chiếu của mặt cong S lên mặt phẳng Oxy là

$$D : \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}, 0 \leq r \leq 3.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \frac{x}{x^2 + y^2} dS = \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right)^2} dxdy = \\ &= \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} dxdy = 3 \cdot \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^3 \frac{r \cos \varphi}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 - r^2}} r dr = 3 \cdot \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^3 \frac{\cos \varphi}{\sqrt{9 - r^2}} dr = \\ &= 3 \cdot \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^3 \frac{dr}{\sqrt{9 - r^2}} = 3 \cdot [\sin \varphi]_{\pi}^{3\pi/2} \cdot \left[\arcsin \frac{r}{3} \right]_0^3 = -3 \cdot \arcsin 1 = -3 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

1.1.7 Ứng dụng hình học của tích phân mặt loại một

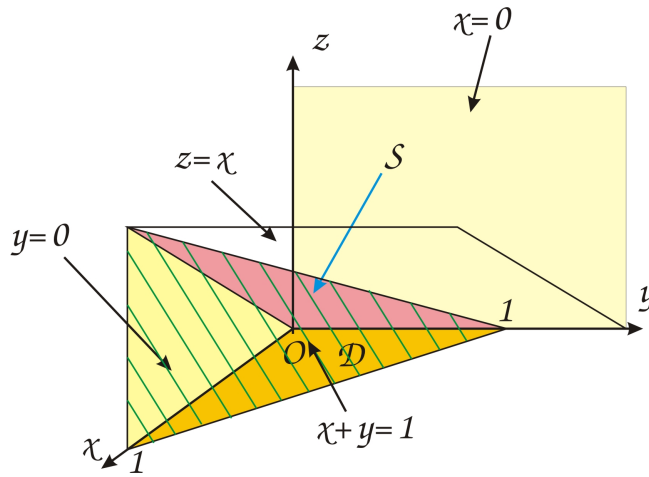
Tính diện tích của mặt cong S

$$\text{Diện tích mặt cong} = \iint_S 1 dS.$$

Ví dụ 1.1.6. Tính diện tích của mặt S , với S là phần mặt phẳng $z = x$ bị chặn bởi các mặt phẳng $x + y = 1, y = 0, x = 0$.

Giải. Mặt cong S được xác định bởi phương trình $z = x \Rightarrow z'_x = 1, z'_y = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{Diện tích của mặt } S &= \iint_S 1 dS = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \sqrt{2} \cdot \iint_D dxdy = \\ &= \sqrt{2} \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 (1 - x) dx = \sqrt{2} \cdot \left[-\frac{(1 - x)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$



Hình 1.7: S là phần mặt $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa 2 mặt phẳng $z = 0, z = 1$.

1.2 Tích phân mặt loại hai

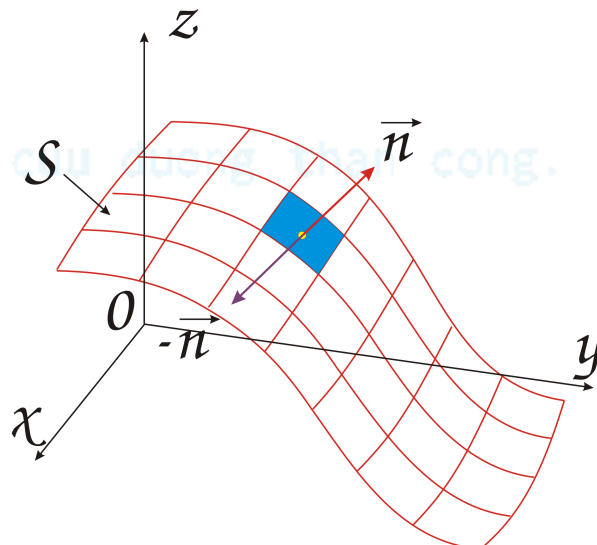
1.2.1 Mặt định hướng

Mặt cong S là tập hợp của điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình $F(x, y, z) = 0$. Trong trường hợp đặc biệt khi mặt cong S được xác định bởi $z = z(x, y)$ thì $F(x, y, z) = z(x, y) - z$ hoặc $F(x, y, z) = z - z(x, y)$

Định nghĩa 1.1. Mặt cong S được gọi là **mặt trơn** nếu $F(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng cấp một F'_x, F'_y, F'_z liên tục và không đồng thời bằng 0 trên S .

Định nghĩa 1.2. Mặt cong S được gọi là **mặt định hướng** hay **mặt hai phía**, nếu tại mọi điểm $M(x, y, z)$ của S luôn xác định được **pháp véc tơ đơn vị** $\vec{n}(M)$ sao cho hàm véc tơ $\vec{n}(M) = (n_1(x, y, z), n_2(x, y, z), n_3(x, y, z))$ liên tục trên S

Như vậy, đối với mặt hai phía chúng ta sẽ có hai **pháp véc tơ đơn vị** $\vec{n}$ và $-\vec{n}$



Hình 1.8: Mặt hai phía

Cho S được xác định bởi phương trình $F(x, y, z) = 0$. Khi đó **pháp véc tơ đơn vị** của S là

$$\vec{n} = \left(\frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}, \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}, \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}} \right)$$

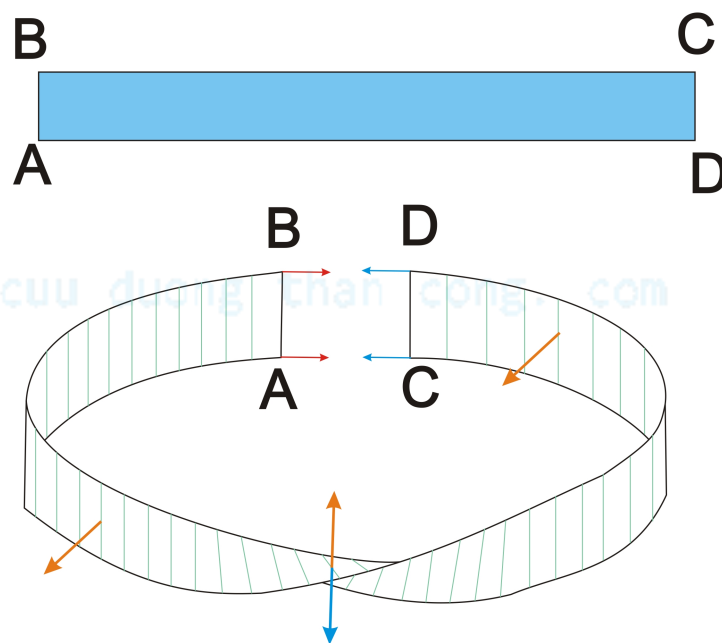
Trong trường hợp đặc biệt khi mặt cong S được xác định bởi $z = z(x, y)$ và có pháp véc tơ đơn vị $\vec{n}$ hướng lên phía trên, có nghĩa là pháp véc tơ đơn vị tạo với tia Oz một góc nhọn và tọa độ thứ 3 của $\vec{n}$ **dương**. Khi đó phương trình của mặt cong S là $F(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$ và

$$\vec{n} = \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \right)$$

Nếu mặt cong S được xác định bởi $z = z(x, y)$ và có pháp véc tơ đơn vị $\vec{n}$ hướng xuống phía dưới, có nghĩa là pháp véc tơ đơn vị tạo với tia Oz một góc tù và tọa độ thứ 3 của $\vec{n}$ **âm** thì phương trình của mặt cong S là $F(x, y, z) = z(x, y) - z = 0$ và

$$\vec{n} = \left(\frac{z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}} \right)$$

Tuy nhiên, có những mặt không thể định hướng, ví dụ lá Mobius. Lá Mobius có thể được tạo bằng cách sau: lấy một hình chữ nhật $ABCD$ (bằng giấy) sau đó vắn cong hình chữ nhật để hai đầu giáp nhau (điểm A trùng điểm C , điểm B trùng điểm D). Giả sử pháp véc tơ tại điểm M là $\vec{n}(M)$. Dịch chuyển $\vec{n}(M)$ liên tục dọc theo lá (không vượt quá biên) ta sẽ quay lại điểm xuất phát M ban đầu nhưng lúc này hướng của pháp véc tơ $\vec{n}(M)$ có hướng ngược lại. Pháp véc tơ tại một điểm M không thể có hai hướng, do đó hàm pháp véc tơ không liên tục trên mặt Mobius, vì nếu liên tục thì sau khi dịch chuyển một cách liên tục, quay về vị trí M ban đầu thì pháp véc tơ phải trùng với pháp véc tơ ban đầu. Do đó, mặt Mobius là **mặt một phía**. Trong chương trình học, chúng ta chỉ xét mặt định hướng (mặt hai phía).



Hình 1.9: Lá Mobius là mặt một phía

1.2.2 Bài toán thực tế

Xét bài toán tính lượng chất lỏng đi qua bề mặt cho trước S trong một đơn vị thời gian.

Giả sử **mật độ của chất lỏng** (khối lượng riêng của chất lỏng) tại mỗi điểm $M_i(x, y, z)$ trong không gian là $\rho(x, y, z)(kg/m^3)$, mặt cong S là **mặt định hướng** với pháp vectơ đơn vị $\vec{n}$, có khả năng cho chất lỏng thấm qua, **vec tơ vận tốc** $\vec{v}(x, y, z)(m/s)$ của chất lỏng tại mỗi điểm $M_i(x, y, z)$ trong không gian **không đổi** theo thời gian.

Khi đó khối lượng của chất lỏng đi qua mặt cong S trên một đơn vị diện tích, theo một đơn vị thời gian là $\rho \cdot \vec{v}(kg/(m^2 \cdot s)) = (P(M_i), Q(M_i), R(M_i))$

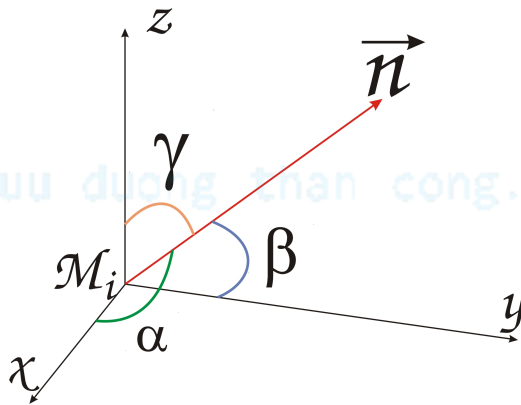
Nếu chúng ta chia mặt cong S thành những mặt cong nhỏ S_i thì S_i **gần như là một mặt phẳng**. Như vậy, chúng ta có thể tính gần đúng khối lượng chất lỏng đi qua S_i theo một đơn vị thời gian là

$$< \rho \cdot \vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i) > \cdot \Delta S_i.$$

Do đó, khối lượng chất lỏng đi qua S theo một đơn vị thời gian được tính gần đúng là

$$m \approx \sum_{i=1}^n < \rho \cdot \vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i) > \cdot \Delta S_i.$$

Giả sử pháp vectơ đơn vị của mặt S tại điểm M_i là $\vec{n}(M_i) = (\cos \alpha(M_i), \cos \beta(M_i), \cos \gamma(M_i))$.



Hình 1.10: Pháp vectơ đơn vị của mặt S tại điểm M_i

Khi đó

$$m \approx \sum_{i=1}^n [P(M_i) \cos \alpha(M_i) + Q(M_i) \cos \beta(M_i) + R(M_i) \cos \gamma(M_i)] \cdot \Delta S_i.$$

Đây là tổng Riemann của tích phân mặt loại hai.

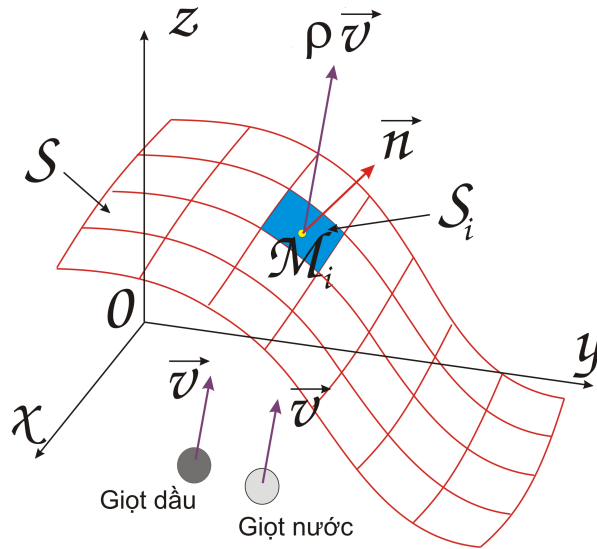
1.2.3 Định nghĩa tích phân mặt loại hai

Định nghĩa 1.3. Cho những hàm $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ xác định trên **mặt trơn, định hướng** S . **Pháp vectơ đơn vị** của mặt S là $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, với α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi $\vec{n}$ và các tia Ox, Oy, Oz . Tích phân mặt loại một

$$I = \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS$$

được gọi là **tích phân mặt loại hai** của P, Q, R trên mặt định hướng S . Tích phân này được ký hiệu là

$$I = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$



Hình 1.11: Tính tổng Riemann tích phân mặt loại hai

1.2.4 Đưa tích phân mặt loại hai về tích phân kép

Giả sử cần tính tích phân

$$\iint_S R dx dy = \iint_S R \cos \gamma dS,$$

trong đó S là mặt cong có phương trình $z = z(x, y)$ với pháp véc tơ đơn vị $\vec{n}$ hướng lên trên, có nghĩa là pháp véc tơ đơn vị tạo với tia Oz một góc nhọn và tọa độ thứ 3 của $\vec{n}$ **đương**. Do đó phương trình của mặt cong S là $F(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$ và

$$\vec{n} = \left(\frac{-z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \right)$$

Tia Oz có véc tơ chỉ phương đơn vị là $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Vì γ là góc tạo bởi $\vec{n}$ và tia Oz nên

$$\cos \gamma = \frac{\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

Mặt khác, ta có

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

Như vậy, theo công thức tính tích phân mặt loại một, ta được

$$\begin{aligned} \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

Nếu pháp véc tơ đơn vị $\vec{n}$ của mặt cong S hướng xuống dưới thì góc γ là góc tù và tọa độ thứ 3 của $\vec{n}$ **âm**. Do đó phương trình của mặt cong S là $F(x, y, z) = z(x, y) - z = 0$ và

$$\vec{n} = \left(\frac{z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \frac{z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \right)$$

$$\cos \gamma = \frac{\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{k}\|} = -\frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

Vậy

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

1.2.5 Cách tính tích phân mặt loại hai

Tích phân mặt loại hai của P, Q, R trên mặt định hướng S là

$$\begin{aligned} I &= \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \\ &= \iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy = \\ &= \iint_S P \cos \alpha dS + \iint_S Q \cos \beta dS + \iint_S R \cos \gamma dS = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Tính I_1 .

Tìm phương trình của mặt cong S là $x = x(y, z)$. Gọi D_{yz} là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oyz . Khi đó

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz$$

- Dấu "+" nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Ox 1 góc nhọn.
- Dấu "-" nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Ox 1 góc tù.
- Tích phân $I_1 = 0$ nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Ox 1 góc bằng $\frac{\pi}{2}$

Tính I_2

Tìm phương trình của mặt cong S là $y = y(x, z)$. Gọi D_{zx} là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Ozx . Khi đó

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(x, z), z) dz dx$$

- Dấu "+" nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Oy 1 góc nhọn.
- Dấu "-" nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Oy 1 góc tù.
- Tích phân $I_2 = 0$ nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Oy 1 góc bằng $\frac{\pi}{2}$

Tính I_3

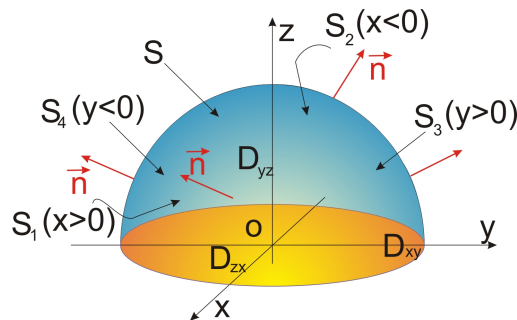
Tìm phương trình của mặt cong S là $z = z(x, y)$. Gọi D_{xy} là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy . Khi đó

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

- Dấu "+" nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Oz 1 góc nhọn.

- Dấu "-" nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Oz 1 góc tù.
- Tích phân $I_3 = 0$ nếu pháp vectơ tạo với chiều dương của tia Oz 1 góc bằng $\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 1.2.1. Tính tích phân $I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, trong đó S mặt phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$.



Hình 1.12: S mặt phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$.

Giải. Ta tách tích phân I thành 3 tích phân mặt

$$I = \iint_S x^2 dydz + \iint_S y^2 dzdx + \iint_S z^2 dxdy = I_1 + I_2 + I_3$$

Tính I_1 : S mặt phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$ nên phương trình mặt cong S là $x = \pm\sqrt{9 - y^2 - z^2}$. Do đó, ta chia mặt cong S thành 2 mặt cong S_1 với phương trình $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}, x \geq 0$ và S_2 với phương trình $x = -\sqrt{9 - y^2 - z^2}, x < 0$. Mặt cong S_1 có pháp vectơ đơn vị hướng ra ngoài cùng phía với trục dương của tia Ox nên pháp vectơ đơn vị của S_1 sẽ tạo với tia Ox một góc nhọn. Mặt cong S_2 có pháp vectơ đơn vị hướng ra ngoài ngược phía với trục dương của tia Ox nên pháp vectơ đơn vị của S_2 sẽ tạo với tia Ox một góc tù. **Hình chiếu của mặt cong S_1 và S_2 xuống mặt phẳng Oyz trùng nhau.** Kí hiệu là D_{yz} . Khi đó

$$I_1 = \iint_S x^2 dydz = \iint_{S_1} x^2 dydz + \iint_{S_2} x^2 dydz = + \iint_{D_{yz}} (9 - y^2 - z^2) dydz - \iint_{D_{yz}} (9 - y^2 - z^2) dydz = 0$$

Tính I_2 : S mặt phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$ nên phương trình mặt cong S là $y = \pm\sqrt{9 - x^2 - z^2}$. Do đó, ta chia mặt cong S thành 2 mặt cong S_3 với phương trình $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}, y \geq 0$ và S_4 với phương trình $y = -\sqrt{9 - x^2 - z^2}, y < 0$. Mặt cong S_3 có pháp vectơ đơn vị hướng ra ngoài cùng phía với trục dương của tia Oy nên pháp vectơ đơn vị của S_3 sẽ tạo với tia Oy một góc nhọn. Mặt cong S_4 có pháp vectơ đơn vị hướng ra ngoài ngược phía với trục dương của tia Oy nên pháp vectơ đơn vị của S_4 sẽ tạo với tia Oy một góc tù. **Hình chiếu của mặt cong S_3 và S_4 xuống mặt phẳng Oxz trùng nhau.** Kí hiệu là D_{zx} . Khi đó

$$I_2 = \iint_S y^2 dzdx = \iint_{S_3} y^2 dzdx + \iint_{S_4} y^2 dzdx = + \iint_{D_{zx}} (9 - x^2 - z^2) dzdx - \iint_{D_{zx}} (9 - x^2 - z^2) dzdx = 0$$

Tính I_3 : S mặt phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$ nên phương trình mặt cong S là $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Mặt cong S có pháp vectơ đơn vị hướng ra ngoài cùng phía với trục dương của tia Oz nên pháp vectơ đơn vị của S sẽ tạo với tia Oz một góc nhọn. Hình chiếu của mặt cong S xuống mặt phẳng Oxy là D_{xy} . Khi đó

$$I_3 = \iint_S z^2 dxdy = + \iint_{D_{xy}} (9 - x^2 - y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (9 - r^2) r dr = \frac{81}{4} \cdot 2\pi = \frac{81\pi}{2}$$

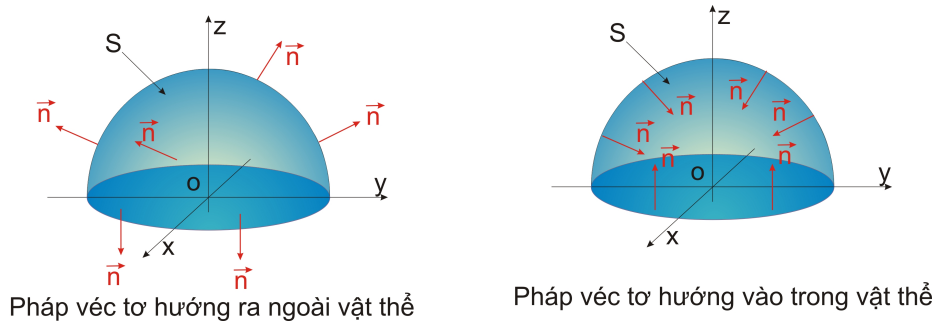
$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{81\pi}{2}.$$

1.2.6 Công thức Ostrogradski - Gauss

Định lý 1.1. Cho S là **mặt kín**. Ω là vật thể được bao quanh bởi S . Nếu $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ và các đạo hàm riêng của nó **liên tục** trên miền Ω thì

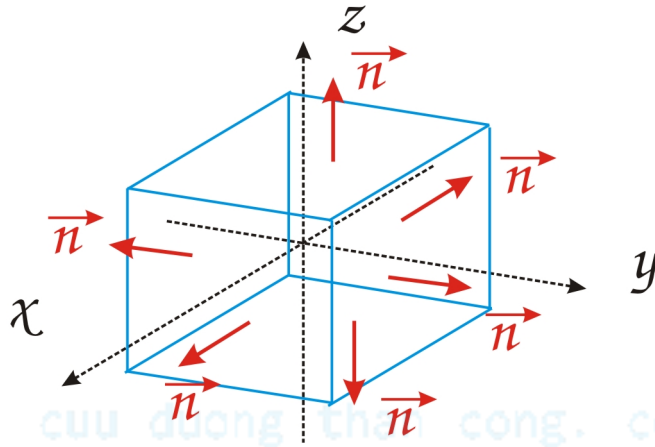
$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \pm \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

Dấu "+" nếu hướng của pháp vectơ với mặt cong lấy hướng ra **phía ngoài** vật thể Ω , dấu "-" nếu hướng của pháp vectơ hướng vào **phía trong** Ω .



Hình 1.13: Pháp vectơ của mặt cong kín S

Ví dụ 1.2.2. Dùng công thức Ostrogradski - Gauss tính tích phân $I = \oiint_S (y-x)dydz + (z-y)dzdx + (x-z)dxdy$, trong đó S là mặt phía ngoài hình lập phương $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

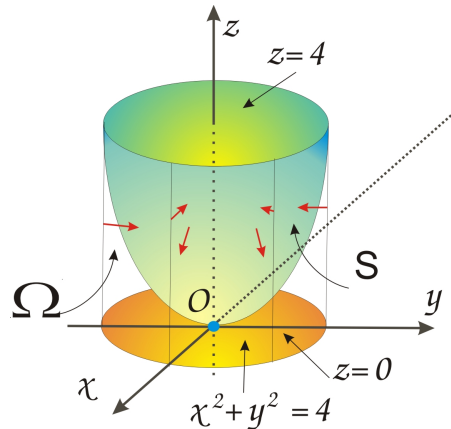


Hình 1.14: Hình lập phương $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

Giải. Vì S là mặt phía ngoài hình lập phương $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ nên S là mặt kín có **pháp vectơ hướng ra phía ngoài** hình lập phương. Do đó theo công thức Ostrogradski - Gauss, ta có

$$\begin{aligned} I &= \oiint_S (y-x)dydz + (z-y)dzdx + (x-z)dxdy = + \iiint_{\Omega} [(y-x)'_x + (z-y)'_y + (x-z)'_z] dxdydz = \\ &= \iiint_{\Omega} (-1 - 1 - 1) dxdydz = -3 \cdot 2^3 = -24. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.3. Dùng công thức Ostrogradski - Gauss tính tích phân $I = \iint_S ydydz + xydzdx - zdx dy$, trong đó S là mặt biên phía trong của vật thể xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$.



Hình 1.15: S là mặt biên phía trong của vật thể xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$.

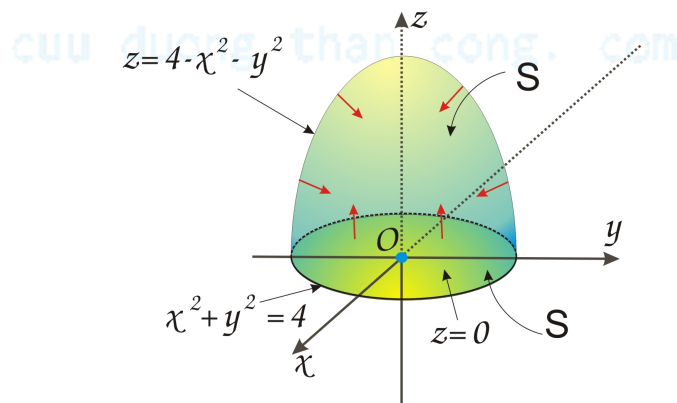
Giải. Vì S là mặt phía trong của vật thể Ω xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$ nên S là mặt kín có **pháp véc tơ hướng vào phía trong** vật thể Ω . Do đó theo công thức Ostrogradski - Gauss, ta có

$$\begin{aligned} I &= - \iiint_{\Omega} (0 + x - 1) dx dy dz = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_0^{r^2} (r \cos \varphi - 1) dz = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \cdot (r \cos \varphi - 1) \cdot r^2 dr = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{32}{5} \cos \varphi - 4 \right) d\varphi = 8\pi \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.4. Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + 2z dx dy,$$

với S là mặt biên phía trong của vật thể giới hạn bởi $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.



Hình 1.16: S là mặt biên phía trong của vật thể giới hạn bởi $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

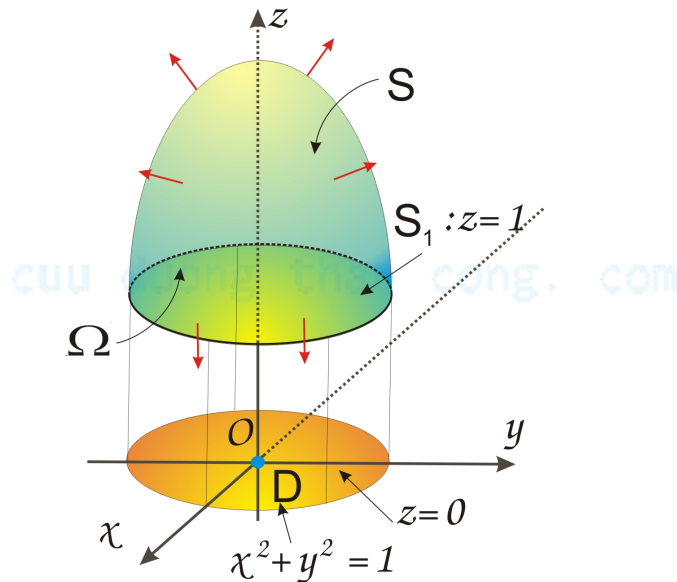
Giải. Vì S là mặt phía trong của vật thể Ω giới hạn bởi $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ nên S là mặt kín có pháp véc tơ hướng vào phía trong vật thể Ω . Do đó theo công thức Ostrogradski - Gauss, ta có

$$\begin{aligned} I &= - \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2) dx dy dz = -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_0^{4-r^2} (r \cos \varphi + r \sin \varphi + 1) dz = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \cdot (r \cos \varphi + r \sin \varphi + 1) (4 - r^2) dr = -2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{64}{15} \cos \varphi + \frac{64}{15} \sin \varphi + 4 \right) d\varphi = -16\pi. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.5. Tính tích phân mặt loại hai

$$I = \iint_S (2x + y) dy dz + (2y + z) dz dx + (2z + x) dx dy,$$

với S là phần mặt $z = 2 - x^2 - y^2$ bị cắt bởi mặt $z = 1$ và có pháp véc tơ đơn vị hướng lên phía trên theo hướng dương trục Oz .



Hình 1.17: S là phần mặt $z = 2 - x^2 - y^2$ bị cắt bởi mặt $z = 1$

Giải. Vì S là phần mặt $z = 2 - x^2 - y^2$ nên S chưa là mặt kín. Do đó ta phải thêm vào mặt $S_1 : z = 1$ với hướng của pháp véc tơ đơn vị hướng xuống dưới. Như vậy, pháp véc tơ đơn vị của S_1 sẽ vuông góc với mặt phẳng Oxy , có nghĩa là vuông góc với tia Ox, Oy . Khi đó, $S + S_1$ là mặt kín của vật thể Ω giới hạn bởi $1 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ và có pháp véc tơ hướng ra phía ngoài vật thể Ω . Do đó theo công thức Ostrogradski - Gauss, ta có

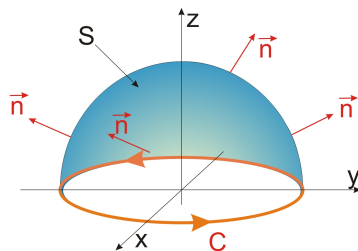
$$\begin{aligned} I &= \iint_{S+S_1} (2x + y) dy dz + (2y + z) dz dx + (2z + x) dx dy - \iint_{S_1} (2x + y) dy dz + (2y + z) dz dx + (2z + x) dx dy = \\ &= + \iint_{\Omega} (2+2+2) dx dy dz - \left(0 + 0 - \iint_{D_{xy}} (2 \cdot 1 + x) dx dy \right) = 6 \iint_{D_{xy}} (2 - x^2 - y^2 - 1) dx dy + \iint_{D_{xy}} (2 + x) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (6 - 6r^2) r dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2 + r \cos \varphi) r dr = 3\pi + \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = 5\pi. \end{aligned}$$

1.2.7 Công thức Stokes

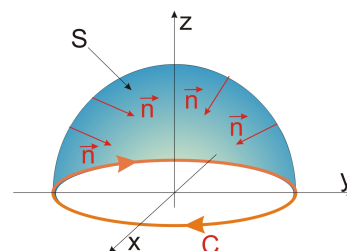
Định lý 1.2. Cho S là mặt cong trơn, có định hướng với biên là đường cong khép kín C . $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trên miền S . Khi đó

$$\oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Chú ý. Hướng của pháp véc tơ đơn vị $\vec{n}$ của mặt cong S và hướng của đường cong khép kín C tuân theo quy tắc bàn tay phải: nếu hướng của pháp véc tơ đơn vị $\vec{n}$ của mặt cong S **hướng lên phía trên** thì hướng của đường cong khép kín C là hướng **ngược chiều kim đồng hồ**; còn nếu hướng của pháp véc tơ đơn vị $\vec{n}$ của mặt cong S **hướng xuống phía dưới** thì hướng của đường cong khép kín C là **hướng cùng chiều kim đồng hồ**.



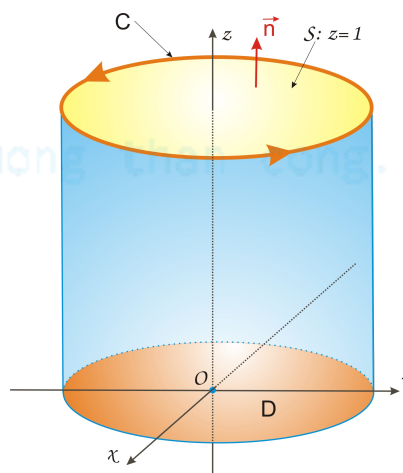
Pháp véc tơ đơn vị hướng lên trên thì hướng của C ngược chiều kim đồng hồ



Pháp véc tơ đơn vị hướng xuống dưới thì hướng của C cùng chiều kim đồng hồ

Hình 1.18: Hướng của pháp véc tơ đơn vị của mặt cong S và hướng của đường cong khép kín C

Ví dụ 1.2.6. Dùng công thức Stokes tính tích phân $I = \oint_C 3ydx + 3xdy + 3xdz$, trong đó C là đường giao tuyến của $x^2 + y^2 = 1$ với mặt $z = 1$ lấy theo ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Oz .

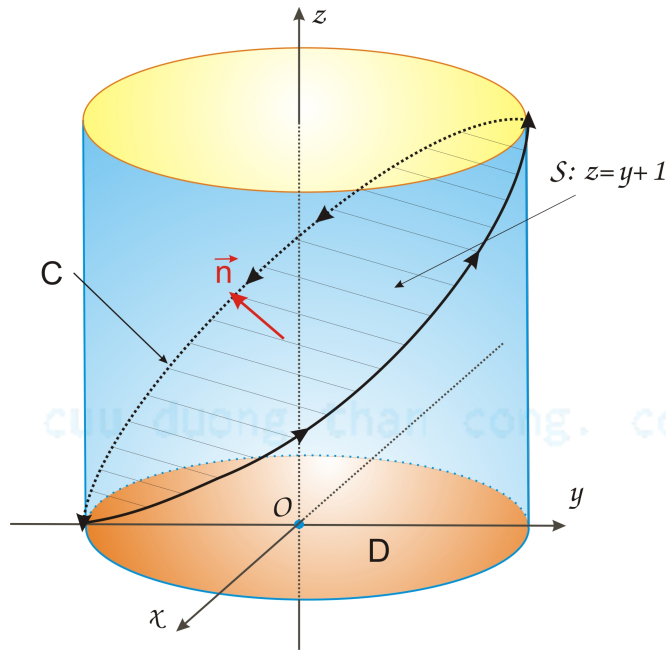


Hình 1.19: C là đường giao tuyến của $x^2 + y^2 = 1$ với mặt $z = 1$ lấy theo ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Oz .

Giải. Vì hướng của đường cong C ngược chiều kim đồng hồ nên hướng của pháp véc tơ đơn vị với mặt cong $S : z = 1$ sẽ hướng lên phía trên. Do đó, pháp véc tơ đơn vị với mặt cong S là $\vec{n} = (0, 0, 1)$ và $\vec{n}$ sẽ vuông góc với mặt phẳng Oxy , có nghĩa là vuông góc với tia Ox, Oy . Theo công thức Stokes, ta có

$$I = \iint_S (0 - 0) dydz + (0 - 3) dzdx + (3 - 3) dxdy = -3 \cdot \iint_S dzdx = 0.$$

Ví dụ 1.2.7. Dùng công thức Stokes tính tích phân $I = \oint_C 2ydx - xdy + xdz$, trong đó C là đường giao tuyến của $x^2 + y^2 = 1$ với mặt $z = y + 1$ lấy theo ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Oz .



Hình 1.20: C là đường giao tuyến của $x^2 + y^2 = 1$ với mặt $z = y + 1$ lấy theo ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục Oz .

Giải. Vì hướng của đường cong C ngược chiều kim đồng hồ nên hướng của pháp véc tơ đơn vị với mặt cong $S : z - y - 1 = 0$ sẽ hướng lên phía trên. Do đó, pháp véc tơ đơn vị với mặt cong S là $\vec{n} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ và $\vec{n}$ sẽ vuông góc với tia Ox . Theo công thức Stokes, ta có

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (0 - 0) dydz + (0 - 1) dzdx + (-1 - 2) dxdy = - \iint_S (dzdx + 3dxdy) = \\ &= - \iint_S (1 \cdot \cos \beta + 3 \cdot \cos \gamma) dS = - \iint_S \left[1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] dS = - \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \\ &= - \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + 0^2 + 1^2} dxdy = -2 \iint_{D_{xy}} dxdy = -2S_{D_{xy}} = -2 \cdot \pi \cdot 1^2 = -2\pi \end{aligned}$$

1.3 Bài tập

1.3.1 Tích phân mặt loại một

Bài tập 1.3.1. Tính tích phân $\iint_S (x + y + z) dS$, trong đó S là phần mặt phẳng $2x + 2y + z = 2$ trong góc $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Bài tập 1.3.2. Tính tích phân $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, trong đó S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$).

Bài tập 1.3.3. Tính tích phân $\iint_S x^2 z dS$, trong đó S là phần của mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 1$ và $z = 4$.

Bài tập 1.3.4. Tính tích phân $\iint_S \frac{xz}{y} dS$, trong đó S là phần của mặt trụ $x = y^2$ bị chặn bởi các mặt phẳng $z = 0, z = 5$ và $y = 1, y = 4$.

1.3.2 Tích phân mặt loại hai

Bài tập 1.3.5. Tính tích phân $\iint_S -x^2 z dydz + y dzdx + 2 dx dy$, trong đó S là mặt phía ngoài của mặt $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ nằm trong góc $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Bài tập 1.3.6. Tính tích phân $\iint_S z^2 dydz + x dzdx - 3z dx dy$, trong đó S là mặt phía trong của phần mặt trụ $z = 4 - y^2$ giới hạn bởi $x = 0, x = 1, z = 0$.

Bài tập 1.3.7. Tính tích phân $\iint_S 2y dzdx$ trong đó S là phần mặt trụ $y = x^2$ bị chặn bởi các mặt phẳng $y = 4, z = 0, z = 1$ lấy phía y dương.

Bài tập 1.3.8. Tính tích phân $I = \iint_S (x + 2y) dydz + (2y + 3z) dzdx + (z + 3x) dx dy$, với S là phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm trên mặt phẳng $x + y + z = 0$, lấy mặt phía trên theo hướng trục Oz .

Bài tập 1.3.9. Tính tích phân $\iint_S 3x dydz + 3y dzdx + z dx dy$, trong đó S là mặt phía ngoài của phần mặt paraboloid $z = 9 - x^2 - y^2$ lấy phần $z \geq 0$.

1.3.3 Công thức Ostrogradski - Gauss

Bài tập 1.3.10. Tính tích phân $I = \iint_S xz dydz + yx^2 dzdx + zy^2 dx dy$, với S là phần mặt biên ngoài của vật thể giới hạn bởi $z = 0$ và $z = 1 - x^2 - y^2$.

Bài tập 1.3.11. Tính tích phân $\iint_S z dx dy$, trong đó S mặt phía ngoài của ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Lời giải bài tập chương 7

1.3.1 2

1.3.2 $\frac{64\sqrt{2}a^4}{15}$

1.3.3 $\frac{1023\sqrt{2}\pi}{5}$

$$1.3.4 \quad \frac{25(\sqrt{65^3} - \sqrt{5^3})}{24}$$

$$1.3.5 \quad \frac{4\pi}{3} - \frac{4}{15}$$

$$1.3.6 \quad 32$$

$$1.3.7 \quad \frac{32}{3}$$

$$1.3.8 \quad \frac{64\pi}{3}.$$

$$1.3.9 \quad \frac{567\pi}{2}$$

$$1.3.10 \quad \frac{\pi}{3}.$$

$$1.3.11 \quad \frac{4\pi abc}{3}.$$

cuu duong than cong. com

cuu duong than cong. com