HÀM GIẢI TÍCH

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2012.

Định nghĩa

Cho $E \subset (Z)$. Qui tắc ứng với mỗi điểm $z \in E$ luôn xác định được một hay nhiều số phức xác định w được gọi là hàm số biến phức z xác định trên tập hợp E.

Hàm biến phức là ánh xạ $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Nếu như ứng với 1 giá trị z xác định được 1 giá trị w thì hàm số được gọi là hàm số phức đơn trị, còn nếu xác định được nhiều giá trị w thì hàm số được gọi là hàm biến phức đa trị.

Ví dụ.

1. Hàm số $w = z^n (n \in \mathbb{N})$ là hàm biến phức đơn trị.

2. Hàm số $w = \sqrt[n]{z} (n \in \mathbb{N}, n > 1)$ là hàm biến phức $n-$trị. Ứng với mỗi số $z \neq 0$ luôn có n giá trị $w = \sqrt[n]{z}$.

3. Hàm số $w = arg\ z$ là hàm vô số trị.

Cho $z = x + iy \in E$ và $w = Arg\ z + n2\pi \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa

Ứng với mỗi điểm $(x, y) \in E$ *luôn có 2 số* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. *Như vậy trên tập hợp* E *luôn xác định được 2 hàm thực* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y)$ *và* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y)$ *biến* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *sao cho* $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{u}(x, y) + \boldsymbol{iv}(x, y)$. *Hàm* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y)$ *được gọi là phần thực, còn hàm* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y)$ *được gọi phần ảo của hàm biến phức.*

Lúc này ta viết
$Ref(z) = u(x, y), Imf(z) = v(x, y).$

Ví dụ. Hàm số $w = z^2$. Cho $z = x + iy, w = u + iv$. Khi đó

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2.$$

Từ đó suy ra $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ hay $Rez^2 = x^2 - y^2, Imz^2 = 2xy$.

Định nghĩa

Cho hàm số $w = f(z)$ *xác định trên tập hợp* $E \subset (Z)$ *và cho* $z_0 \in E$ *là điểm giới hạn của tập hợp* E. *Lấy một điểm bất kỳ* $z \in E, z \neq z_0$ *và thành lập quan hệ* $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

thì nó được gọi là đạo hàm của hàm số $f(z)$ *tại điểm* z_0.

Đạo hàm được kí hiệu là $f'(z_0), w', \frac{df(z_0)}{dz}, \frac{dw}{dz}$.
Khi đặt $z - z_0 = \Delta z$ ta sẽ có $z = z_0 + \Delta z$, và
$f(z)-f(z_0) = f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = \Delta f(z_0) = \Delta w$.
Lúc này

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \qquad (1)$$

Từ công thức (1) suy ra, đạo hàm của hàm số phức tại một điểm không khác gì so với định nghĩa đạo hàm của hàm biến thực tại một điểm

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Tuy nhiên bản chất của công thức (1) và (2) khác nhau. Trong công thức (2) $x = x_0 + \Delta x$ có thể hội tụ đến x_0 chỉ theo một hướng theo trục OX. Trong công thức (1) $z = z_0 + \Delta z$ có thể hội tụ đến z_0 theo tập hợp vô hạn những đường khác nhau.

Nếu hàm số $w = f(z)$ có đạo hàm hữu hạn $f'(z_0)$ tại điểm $z_0 \in E$ thì nó được gọi là **hàm khả vi** hoặc **mônôgen** tại điểm này.

Ví dụ. Hàm số $w = \overline{z} = x - iy$ không có đạo hàm tại bất kỳ điểm $z_0 = x_0 + iy_0 \in (Z)$ nào.
Thật vậy, lấy điểm $z_0 = x_0 + iy_0$ và cho nó gia lượng $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Khi đó hàm số $f(z) = \overline{z} = x - iy$ có gia lượng là
$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0} = \overline{z_0} + \overline{\Delta z} - \overline{z_0} = \overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y.$

Như vậy

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z}$ không tồn tại, vì

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Mặt khác

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-1) = -1.$$

Định nghĩa

Nếu $w = f(z)$ *có đạo hàm tại* $z = z_0$ *và tại mọi điểm trong lân cận của* z_0 *thì ta nói* $f(z)$ *giải tích tại* z_0*. Hàm số* $w = f(z)$ *giải tích tại mọi điểm của miền* D *được gọi là giải tích trong* D*.*

Định lý

Nếu $u(x,y), v(x,y)$ *liên tục cùng với 4 đạo hàm riêng cấp 1 của chúng trong 1 miền* D *thì điều kiện Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

là điều kiện cần và đủ để $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *giải tích trong* D. *Lúc đó*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \ f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Ví dụ

Khảo sát đạo hàm của các hàm sau:

1. $f(z) = \overline{z}$
2. $f(z) = z.\overline{z} = |z|^2$
3. $f(z) = z^2.$
4. $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

Nếu hàm số $f(z)$ và $g(z)$ có cùng 1 vùng xác định $E \subset (Z)$ và có tại một số điểm $z \in E$ những đạo hàm hữu hạn $f'(z)$ và $g'(z)$ thì ta luôn có những đẳng thức

$$(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z);$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

Nếu $g(z) \neq 0$ tại điểm z thì

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

Định lý

Nếu $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *giải tích trong miền* D *và nếu* u, v *có đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong* D *thì trong* D *2 hàm* u, v *thỏa mãn phương trình Laplace*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Định nghĩa

Hàm 2 biến có các đạo hàm riêng cấp 2 thỏa phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa. Hai hàm điều hòa $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sao cho $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ là hàm giải tích được gọi là 2 hàm điều hòa liên hợp.

Ví dụ

Hàm $\mathbf{u}(x, y) = 3x^2 + xy + y^2$ *không phải là hàm điều hòa. Hàm* $\mathbf{u}(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 7y$ *là hàm điều hòa.*

Định lý

Nếu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *giải tích trong miền* D *thì trong* D *các đường cong của họ* $u(x,y) = c = const$ *là những quỹ đạo trực giao của các đường cong họ* $v(x,y) = k = const$ *và ngược lại.*

Xét tại giao điểm $z = x + iy$ của $u(x,y) = c$ và $v(x,y) = k$, hệ số góc của tiếp tuyến của $u(x,y) = c$ là

$$k_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{u'_x}{u'_y},$$

hệ số góc của tiếp tuyến của $v(x,y) = k$ là

$$k_2 = \frac{dy}{dx} = -\frac{v'_x}{v'_y}.$$

Vì $f(z)$ giải tích trong D nên thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann nên $k_1.k_2 = -1$.

Định nghĩa

Hàm số $w = e^z$ *xác định bởi công thức*
$e^z = e^x(cosy + isiny)$ *với* $z = x + iy$ *được gọi là hàm số mũ với biến số phức.*

Theo định nghĩa trên ta có
$arg\ e^z = y + k2\pi, k \in Z.$

Tính chất:

1. $e^z \neq 0$ với mọi $z \in (Z)$.
2. $z = |z|e^{i\ arg\ z}$ với mọi $z \in (Z)$.
3. Với 2 số phức bất kì $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ ta có
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}. \tag{1}$$
4. Hàm số mũ $w = f(z) = e^z$ là hàm tuần hoàn với chu kì chính $T = 2\pi i$, tức là $e^{z+2\pi i} = e^z$.
5. Hàm số mũ $w = f(z) = e^z$ có đạo hàm là $w' = e^z$.

Định nghĩa

Hàm cosin và hàm sin của biến phức z *được xác định như sau*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Tính chất cơ bản

1. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
2. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
3. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
4. $\dfrac{d(\cos z)}{dz} = -\sin z$
5. $\dfrac{d(\sin z)}{dz} = \cos z$

1. $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
2. $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

Định nghĩa

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Tính chất

1. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
2. $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$

Định nghĩa

Hàm Logarit là hàm ngược của hàm mũ. Cho $z \neq 0$ ta tìm w sao cho $e^w = z$.

Nếu viết $z = re^{i\varphi}$ và $w = u + iv$ ta được $e^u = r$ và $v = \varphi + 2n\pi (n \in \mathbb{Z})$. Từ đó ta có $w = \ln r + i(\varphi + 2n\pi), (n \in \mathbb{Z})$. Như vậy

$$\ln z = \ln |z| + i\ arg\ z, z \neq 0.$$

Tính chất cơ bản

- $\ln z$ là hàm vô số trị. Nếu chọn trước số n ta sẽ được 1 nhánh của hàm logarit, nếu $n = 0$ ta được nhánh chính của hàm logarit. Kí hiệu Lnz. Từ đó suy ra $\ln z = Lnz + 2n\pi i$.
- $\dfrac{d(\ln z)}{dz} = \dfrac{1}{z}$

Định nghĩa

Cho $z \neq 0 \in \mathbb{C}$*- số phức và* $s \in \mathbb{C}$*- số phức. Khi ấy ta có*

$$z^s = e^{s \ln z}. \tag{2}$$

Tính chất: hàm z^s cũng là hàm vô số trị.

Định nghĩa

Hàm $w = \arccos z$ *được định nghĩa là các giá trị của* w *thỏa phương trình* $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$.
Từ đó ta có $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$ *hay* $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$. *Vậy* $w = \arccos z = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$. *Hàm* $\ln z$ *có vô số trị nên hàm* $\arccos z$ *cũng có vô số trị.*

1. $\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$
2. $\arctan z = \dfrac{i}{2} \ln \dfrac{i + z}{i - z}$
3. $arccoshz = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$
4. $arcsinhz = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$
5. $arctanhz = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + z}{1 - z}$

1. $(z^s)' = sz^{s-1}$, với s là 1 số phức tùy ý.
2. $(e^z)' = e^z$
3. $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$
4. $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$
5. $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$

Tính giá trị của hàm số f khi biết z

1. $f(z) = xy + i(x^2 - y^2)$ biết $z = -1 + 2i$
2. $f(z) = x^2 - y + i(x + y^2)$ biết $z = 2 - 3i$

Tính đạo hàm của các hàm sau

1. $w = -2z^2 + 3z + 4$
2. $w = \dfrac{1}{z}$

Chứng minh rằng hàm Rez^2 và Imz^2 là các hàm điều hòa.

Tìm giá trị sau

1. $\ln(-10)$, $\ln(1 - i\sqrt{3})$
2. $\sin(1 + i)$, $\cosh(1 - i)$
3. $(1 - i)^{2+i}$, 2^i.
4. $\tan i$
5. $\arccos 2$

Giải phương trình

1. $e^z = 0$
2. $\cosh z = 0$
3. $\sin z = 3$
4. $\sinh z = i$.

THANK YOU FOR ATTENTION