PHÉP BIẾN ĐỔI BẢO GIÁC

Bài giảng điện tử

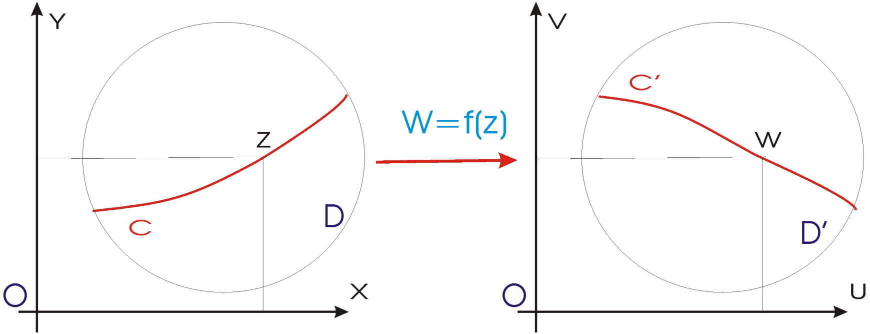
TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2012.

Xét hàm phức

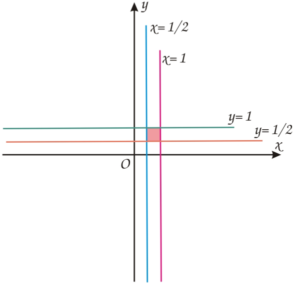
$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

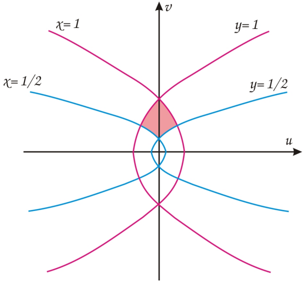


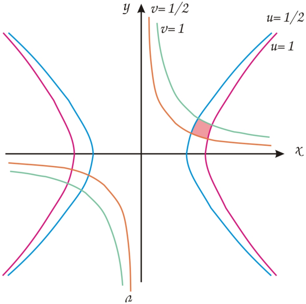
Ví dụ

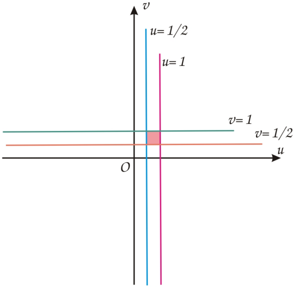
Khảo sát phép biến đổi từ mặt phẳng $\mathbf{z}$ *sang mặt phẳng* $\mathbf{w}$ *xác định bởi* $w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ *trong hệ tọa độ Đề-các*

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \; v(x, y) = 2xy.$$


y
x= 1/2
x= 1
y= 1
y= 1/2
x
O

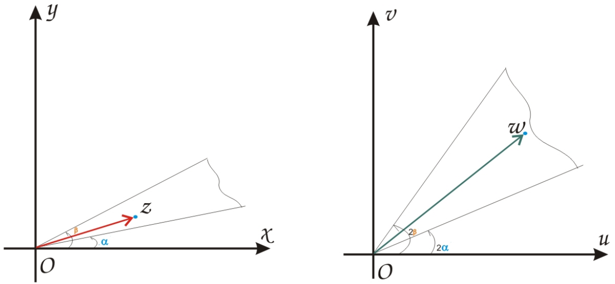

v
x= 1
y= 1
x= 1/2
y= 1/2
u


y
v= 1/2
v= 1
u= 1/2
u= 1
x


v
u= 1/2
u= 1
v= 1
v= 1/2
u
O

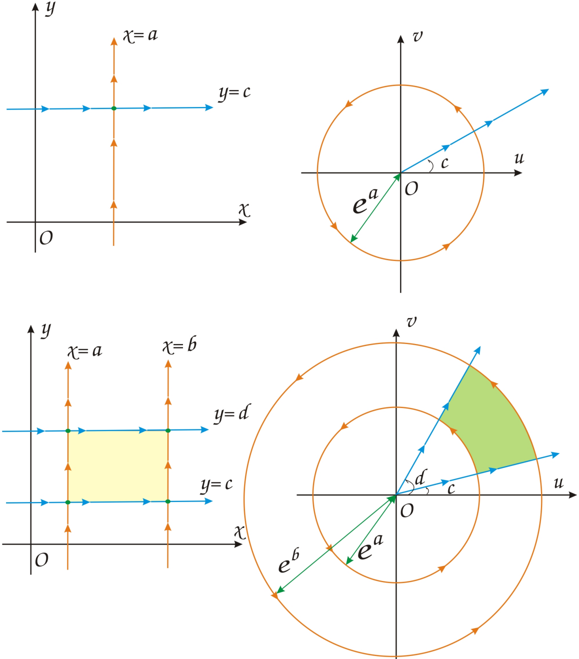
Ví dụ

Khảo sát phép biến đổi từ mặt phẳng z *sang mặt phẳng* w *xác định bởi*
$w = f(z) = z^2 = (re^{i\varphi})^2 = r^2e^{i2\varphi}$ *trong hệ tọa độ cực.*



Ví dụ

Khảo sát phép biến đổi từ mặt phẳng z *sang mặt phẳng* w *xác định bởi* $w = f(z) = e^z = e^x e^{iy}$


y
x= a
y= c
x
O
v
u
c
O
e^a
y
x= a
x= b
y= d
y= c
x
O
v
u
d
c
O
e^b
e^a

Xét hàm giải tích $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Điều kiện để phép biến đổi $w = f(z)$ có phép biến đổi ngược đơn trị, có nghĩa là có thể tìm x, y theo u, v

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

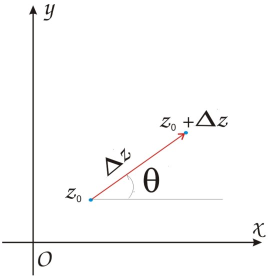
là định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \neq 0$. Vì $f(z)$ giải tích nên u, v thỏa điều kiện Cauchy-Riemann nên $J = \begin{vmatrix} u'_x & -v'_x \\ v'_x & u'_x \end{vmatrix} = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z)|^2$

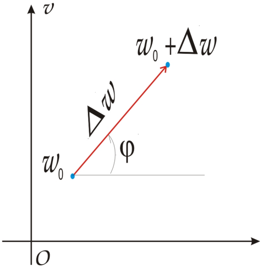
Định lý

Nếu $f(z)$ *giải tích thì* $f(z)$ *sẽ có 1 hàm ngược đơn trị trong lân cận của bất kỳ điểm* z_0 *nào tại đó* $f'(z_0) \neq 0$.

Định nghĩa

Nếu $f'(z_0) = 0$ *thì* z_0 *được gọi là* ***điểm tới hạn*** *của phép biến đổi* $w = f(z)$. *Nếu* $f'(z_0) \neq 0$ *thì* z_0 *được gọi là* ***điểm bình thường*** *của phép biến đổi* $w = f(z)$.





$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| e^{i(\varphi - \theta)} =$$

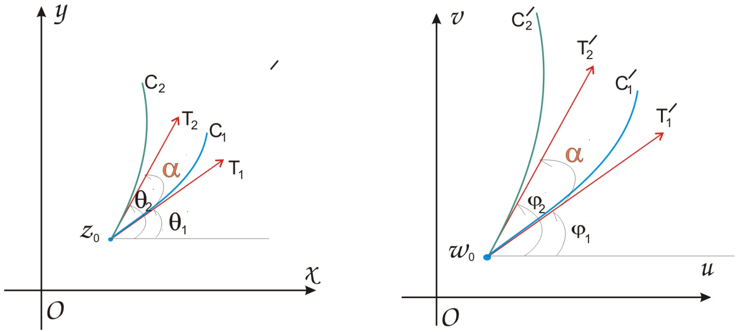
$$= |f'(z_0)| e^{i arg f'(z_0)}.$$

Từ đó suy ra $\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|$ và

$\lim_{\Delta z \to 0} (\varphi - \theta) = arg f'(z_0)$.

Định nghĩa

Một phép biến đổi giữ nguyên độ lớn và chiều của góc được gọi là phép biến đổi bảo giác. Nếu nó chỉ giữ nguyên độ lớn của góc thì được gọi là phép biến đổi đẳng giác.



Định lý

Nếu $f(z)$ *giải tích và* $f'(z) \neq 0$ *trong một miền* D *thì phép biến đổi* $w = f(z)$ *bảo giác tại mọi điểm của* D*. Trong đó* $\arg f'(z)$ *được gọi là góc quay, còn* $|f'(z)|$ *là hệ số khuếch đại.*

Bài 1

Cho ánh xạ $w = f(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 5$.

1. Tìm góc quay và hệ số khuếch đại tại điểm $z = 0$ và $z = i$.
2. Dọc theo đường nào góc quay không đổi? Dọc theo đường nào hệ số khuếch đại không đổi?
3. Tại những điểm nào ánh xạ trên không là ánh xạ bảo giác?

Bài 2

Tìm ảnh của vòng tròn $x^2 + y^2 = 4$ trong phép biến đổi $w = z^2$.

Bài 3

Tìm ảnh của vòng tròn $x^2 + y^2 = 9$ trong phép biến đổi $w = z^3$.

Bài 4

Khảo sát phép biến đổi $w = \overline{z}$.

Bài 5

Khảo sát phép biến đổi $w = \overline{z}^2$.

Bài 6

Khảo sát phép biến đổi $w = \dfrac{1}{z}$.

Bài 7

Tìm ảnh của miền giới hạn bởi $0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant y \leqslant \pi$ trong phép biến đổi $w = -e^{-z}$.

Bài 8

Tìm ảnh của miền giới hạn bởi $r \leqslant \rho \leqslant R, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ trong phép biến đổi $w = \ln z$.