# TÍCH PHÂN TRONG MẶT PHẲNG PHỨC

TS. Lê Xuân Đại

**Trường Đại học Bách Khoa TP HCM**
**Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng**

TP. HCM — 2013.

## Định nghĩa

*Gọi* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *là 1 hàm liên tục của* $z$ *và* $C$ *là 1 cung trơn từng đoạn nối 2 điểm* $A, B$. *Khi đó tích phân đường của hàm số* $f(z)$ *được tính theo công thức*

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

1. $\int\limits_A^B f(z)dz = -\int\limits_B^A f(z)dz$
2. $\int\limits_A^B kf(z)dz = k\int\limits_A^B f(z)dz$
3. $\int\limits_A^B [f(z)+g(z)]dz = \int_A^B f(z)dz + \int_A^B g(z)dz.$
4. Nếu $D$ là 1 điểm trên cung $AB$ thì $\int_A^B f(z)dz = \int_A^D f(z)dz + \int_D^B f(z)dz$

Trong trường hợp $C$ được xác định bởi $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, với $t \in \mathbb{R}$ thì

$$\int\limits_A^B f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt$$

trong đó $t_1, t_2$ là các giá trị $t$ ứng với điểm $A$ và $B$.

**Ví dụ.** Tính tích phân $\int\limits_0^{1+i} (x+y)dz$ dọc theo mỗi đường sau:

1. Dọc theo trục Oy đến điểm $i$, rồi theo đường ngang đến $1+i$. **ĐS.** $\dfrac{3}{2}+\dfrac{i}{2}$
2. Dọc theo đường $y = x$. **ĐS.** $1+i$
3. Dọc theo parabol $y = x^2$. **ĐS.** $\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{6}i$
4. Dọc theo trục Ox đến 1 rồi theo đường thẳng đứng đến $1+i$. **ĐS.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3i}{2}$

Tính tích phân $\int\limits_0^{1+i} (x^2 + iy)dz$ dọc theo mỗi đường sau:

1. Dọc theo trục Oy đến điểm $i$, rồi theo đường ngang đến $1 + i$.
2. Dọc theo đường $y = x$
3. Dọc theo parabol $y = x^2$
4. Dọc theo trục Ox đến 1 rồi theo đường thẳng đứng đến $1 + i$.

Tính tích phân $\int_1^i \bar{z} dz$ dọc theo mỗi đường sau:

1. Dọc theo trục Ox đến điểm $0$, rồi dọc theo trục Oy đến $i$.
2. Dọc theo đường $y = 1 - x$
3. Thẳng đứng đến $1 + i$ rồi theo đường ngang đến $i$.

Tính tích phân $\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ với $C$ là đường tròn tâm $z_0$ bán kính $r$, $n$ là 1 số nguyên, theo chiều dương.

## Định nghĩa

*Miền $D$ được gọi là miền liên thông, nếu như với 2 điểm bất kỳ của $D$ luôn tồn tại ít nhất 1 đường cong đi qua 2 điểm này và nó nằm trong miền $D$.*

## Định nghĩa

*Miền $D$ được gọi là miền đơn liên nếu mọi đường cong kín của nó đều nằm gọn trong $D$. Miền liên thông $D$ không là miền đơn liên được gọi là miền đa liên.*

## Định lý

*Nếu $D$ là 1 miền đơn liên mà trên biên $C$ trơn từng đoạn, các hàm $P(x,y), Q(x,y), \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục trong và trên biên $C$ của miền $D$ thì*

$$\oint_C P dx + Q dy = \pm \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

*Dấu $+$ khi chiều lấy tích phân trên $C$ ngược chiều kim đồng hồ*

## Định lý

*Nếu* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *ở mọi điểm của 1 miền đơn liên* $D$ *thì trong* $D$ *tích phân* $\int\limits_C Pdx + Qdy$ *không phụ thuộc vào đường đi, với* $C$ *là biên của miền* $D$*.*

*Nguyên hàm của* $\int Pdx + Qdy$ *là*

$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ *với* $(x_0, y_0)$ *là điểm mà* $P(x,y)$ *và* $Q(x,y)$ *liên tục tại đó.*

### Định lý

*Nếu* $D$ *là miền đơn liên có biên* $C$ *trơn từng đoạn và nếu* $f(z)$ *giải tích*, $f'(z)$ *liên tục trong và trên biên của miền* $D$ *thì* $\oint\limits_C f(z)dz = 0.$

### Ví dụ

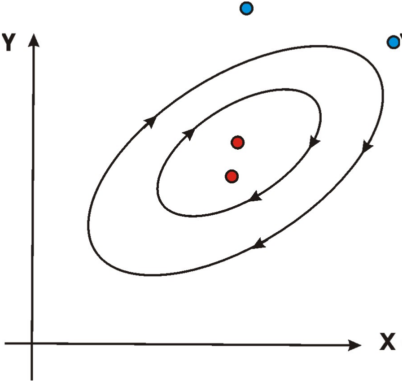
*Gọi* $C$ *là vòng tròn đơn vị* $|z| = 1$. *Tính* $\int\limits_C \frac{\sin z}{z^2+4} dz$.

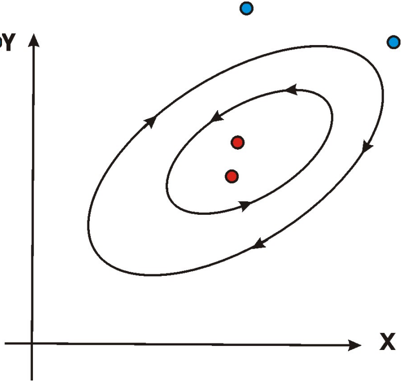
# Định lý

*Nếu* $f(z)$ *giải tích trong và trên biên của 1 miền đa liên* $D$ *nằm giữa 2 đường kín đơn* $C_1$ *và* $C_2$ *thì* $\int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz = 0$ *với điều kiện* $C_1, C_2$ *được chạy theo chiều dương đối với bên trong của* $D$*. Nếu đổi chiều tích phân trên* $C_2$ *ta có*

$$\int\limits_{C_1} f(z)dz = \int\limits_{C_2} f(z)dz$$

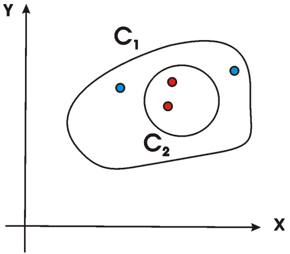
*trong đó* $C_1, C_2$ *cùng chạy theo chiều ngược chiều*


Y
X


Y
X

## Định lý

*Nếu đường kín đơn $C_1$ có thể biến dạng liên tục (co lại) để trùng với $C_2$ mà không vượt qua bất cứ điểm nào tại đó $f(z)$ không giải tích thì tích phân đường của hàm giải tích $f(z)$ trên $C_1$ và $C_2$ bằng nhau.*



Cho hàm $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z}$ và các đường tròn $C_1 : |z| = 3,\ C_2 : |z-1| = \dfrac{3}{2},\ C_3 : |z| = 1$, và 1 đường $C$ bất kỳ chứa các đường tròn $C_1, C_2, C_3$. Gọi $I_1, I_2, I_3, I$ lần lượt là tích phân của $f(z)$ dọc theo $C_1, C_2, C_3, C$.

1. Hỏi $I_1$ hoặc $I_2$ có bằng 0 hay không?
2. Chứng minh rằng $I_1 = I_2$.
3. Hỏi $I_2$ có bằng $I_3$ hay không?
4. Chứng minh $I = I_1 = I_2$. Từ đó rút ra kết luận.

## Bài 1

Cho tích phân $\int\limits_C \dfrac{\sin 2z dz}{(z^2+1)(z-1)}$ dọc theo các đường cong $C$ sau:

**1.** $|z| = \dfrac{1}{2}$ **2.** $|z| = 2$

**3.** $|z-1| = 2$ **4.** $|z+1| = 1$

**5.** $|z+1| = \dfrac{3}{2}$ **6.** $|z-1+i| = \dfrac{3}{2}$

Hỏi tích phân theo đường nào bằng 0. Hỏi tích phân theo đường nào bằng nhau?

## Bài 2

Cho tích phân $\int\limits_C \frac{e^z dz}{z^2 + 2z + 2}$ dọc theo các đường cong $C$ sau:

**1.** $|z - i| = \frac{3}{2}$ **2.** $|z| = 2$

**3.** $|z + 1 + i| = \frac{3}{2}$ **4.** $|z - 1| = 3$

**5.** $|z - 3| = 1$ **6.** $|z + 1| = \frac{1}{2}$

Hỏi tích phân theo đường nào bằng 0. Hỏi tích phân theo đường nào bằng nhau?

## Định lý

*Nếu* $f(z)$ *giải tích trong 1 miền đơn liên* $D$ *thì* $\int_A^B f(z)dz$ *không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ* $A$ *đến* $B$ *trong miền* $D$.

## Định lý

*Nếu $f(z)$ giải tích khắp 1 miền đơn liên $D$ thì hàm số $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ là 1 hàm giải tích và có đạo hàm tại mỗi điểm của $D$ là $f(z)$. Khi đó $F(z)$ được gọi là nguyên hàm của $f(z)$*

## Định lý

*Nếu $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên $D$ và đường lấy tích phân nằm trong $D$, $F(z)$ là 1 nguyên hàm nào đó của $f(z)$ thì $\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$.*

### Ví dụ

*Tính tích phân* $\int\limits_{0}^{1+i\pi} (z^2 + \cosh 2z)dz.$

**ĐS.** $\dfrac{1}{3} - \pi^2 + \dfrac{1}{2}\sinh 2 + \dfrac{i}{3}(3\pi - \pi^3).$

## Bài 1

Tính tích phân

1. $\int\limits_0^{1+i} e^{2z} dz$
2. $\int\limits_0^{i} (z + \sin z) dz$
3. $\int\limits_0^{1+i} \cos z dz$

## Bài 2

Tính tích phân

1. $\int\limits_0^i ze^z dz$
2. $\int\limits_0^{1+i\pi} (z \sin z) dz$
3. $\int\limits_i^1 \frac{dz}{(z+1)^2}$

## Định lý

*Nếu* $\mathbf{u}(x, y)$ *là nghiệm của phương trình Laplace trong 1 miền* $D$ *thì trong* $D$ *có 1 hàm giải tích nhận* $\mathbf{u}(x, y)$ *là phần thực. Đó là hàm* $f(z) = u + iv$ *với*

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u'_y dx + u'_x dy$$

### Ví dụ

*Cho* $u(x, y) = y^3 - 3x^2y + y$. *Hãy xác định* $v(x, y)$ *sao cho* $f(z) = u + iv$ *là hàm giải tích.*

# Bài 1

Xác định $v(x, y)$, sao cho $u + iv$ là hàm giải tích:

1. $u = x + y$
2. $u = 2x + 3y$
3. $u = e^x \cos y$
4. $u = e^x \sin y$
5. $u = x^2 + y^2$
6. $u = \cos x \sinh y$
7. $u = \cos x \sin y$
8. $u = x^2 + 2y - y^2$

## Định lý

*Nếu* $f(z)$ *giải tích trong và trên biên* $C$ *của 1 miền đơn liên* $D$ *mà biên* $C$ *trơn từng đoạn và nếu* $z_0$ *là 1 điểm bất kỳ bên trong miền* $D$ *thì giá trị của* $f(z_0)$ *được xác định bởi công thức*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

*trong đó tích phân được lấy theo chiều dương.*

## Ví dụ

*Tính tích phân* $\int\limits_C \frac{e^z}{z^2+1} dz$ *với* $C$ *là vòng tròn bán kính 1 có tâm là*

1. $z = i$
2. $z = -i$

## Định lý

*Nếu* $f(z)$ *giải tích trong và trên biên* $C$ *của 1 miền đơn liên* $D$, *mà biên* $D$ *trơn từng đoạn thì tại 1 điểm* $z_0$ *bất kỳ bên trong miền* $D$, *đạo hàm mọi cấp của* $f(z)$ *tồn tại, giải tích và được xác định bởi công thức*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Tính tích phân $\int\limits_C \frac{e^z}{(z+i)^3}dz$ với $C$ là đường tròn $|z| = 2$.

### Định lý

*Nếu* $f(z)$ *giải tích trong và trên một vòng tròn* $C$ *tâm* $z_0$ *bán kính* $r$ *thì*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!M}{r^n},$$

*trong đó* $M$ *là giá trị cực đại của* $|f(z)|$ *trên* $C$.

Tính tích phân sau

1. $\int\limits_{i\pi}^{1} e^z dz$
2. $\int\limits_{C} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz$ với $C$ là đường tròn $|z-i|=1$
3. $\int\limits_{C} \frac{3z^2+7z+1}{z-1} dz$ với $C$ là đường tròn $|z+1|=1$
4. $\int\limits_{C} \frac{\sin 2z}{z^2+4z+5} dz$ với $C$ là đường tròn $|z|=1$

Tính tích phân sau

1. $\int\limits_C \frac{z+4}{z^2+2z+5}dz$ với $C$ là đường tròn $|z|=1$
2. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$ với $C$ là đường tròn $|z-1|=3$
3. $\int\limits_C \frac{z+1}{z^3-2z^2}dz$ với $C$ là đường tròn $|z|=1$

Tính tích phân sau

1. $\int\limits_C \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz$ với $C$ là đường tròn $|z| = 2$
2. $\int\limits_C \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz$ với $C$ là đường tròn $|z| = 3$

# THANK YOU FOR ATTENTION