CHUỖI TRONG MẶT PHẲNG PHỨC

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2011.

Định nghĩa

Chuỗi có số hạng phức là chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$
Tổng riêng thứ ***n*** *của chuỗi này là tổng*
$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

Định nghĩa

Chuỗi có số hạng phức hội tụ tới số phức $S(z)$ *khi*
$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$$

Định nghĩa

Chuỗi có số hạng phức hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| = |f_1(z)| + |f_2(z)| + \ldots + |f_n(z)| + \ldots$$

hội tụ. Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ nhưng đảo lại không đúng.

Định lý

Điều kiện cần và đủ để chuỗi có số hạng phức hội tụ là các chuỗi phần thực và phần ảo $\sum_{n=1}^{\infty} Re\ f_n(z)$, $\sum_{n=1}^{\infty} Im\ f_n(z)$ *hội tụ đến* $Re\ f(z)$ *và* $Im\ f(z)$. *Khi đó*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = Re\ f(z) + i\,Im\ f(z)$$

Tiêu chuẩn D'Alambert

Định lý

Đối với chuỗi có số hạng phức, nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = |r(z)|$ *thì chuỗi này hội tụ tuyệt đối tại các điểm* z *thỏa* $0 \leqslant |r(z)| < 1$ *và phân kỳ tại các điểm* z *thỏa* $|r(z)| > 1$. *Các điểm* z *thỏa* $|r(z)| = 1$ *là biên của miền hội tụ của chuỗi và cần khảo sát riêng.*

Ví dụ

Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$1+\frac{1}{2^2}\frac{z+1}{z-1}+\frac{1}{3^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2+..+\frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{n-1}+...$$

Đáp số. Miền hội tụ là nửa mặt phẳng $Re\ z \leqslant 0$.

Xét tỉ số $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| =$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}.\frac{z+1}{z-1}\right| = \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = |r(z)|$$

Vậy miền hội tụ là tập hợp các điểm z thỏa $0 \leqslant \dfrac{|z+1|}{|z-1|} < 1 \Leftrightarrow |z+1| < |z-1|$, có nghĩa là khoảng cách từ z đến điểm -1 nhỏ hơn đến điểm $+1$. Do đó $Rez < 0$.

Biên của miền hội tụ chính là $Rez = 0$ (trục ảo) tại đó $|z+1| = |z-1|$. Xét chuỗi hội tụ tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z)| = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Chuỗi này hội tụ nên chuỗi đã cho cũng hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $Rez \leqslant 0$

Định nghĩa

Chuỗi có số hạng phức được gọi là hội tụ đều đến $f(z)$ *nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = f(z)$ *với mọi* $z \in D$.

Định lý

(M-Weierstrass) Nếu có 1 dãy hằng số dương $\{M_n\}$ *sao cho* $|f_n(z)| \leqslant M_n (\forall n, \forall z \in D)$ *và nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ *hội tụ thì chuỗi có số hạng phức hội tụ đều trong* D

Định lý

Tích phân của tổng của 1 chuỗi hội tụ đều của các hàm liên tục dọc theo 1 đường cong C *nằm trong miền hội tụ đều có tính bằng cách lấy tích phân từng số hạng của chuỗi*

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C f_1(z)dz + \ldots + \int\limits_C f_n(z)dz + \ldots$$

Định lý

Nếu $f(z)$ *là tổng của 1 chuỗi hội tụ đều của các hàm giải tích, thì đạo hàm của* $f(z)$ *ở bất cứ điểm trong nào của miền hội tụ đều* D *cũng có thể tính bằng cách lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi.*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z).$$

Định nghĩa

Chuỗi có dạng

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

trong đó $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ *là các hằng số phức, được gọi là chuỗi lũy thừa. Chuỗi lũy thừa thì luôn hội tụ đều trên tập xác định của nó.*

Định lý

Nếu $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *thì chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối tại các điểm trong vòng tròn* $|z - z_0| = \dfrac{1}{L}$, *và phân kỳ tại các điểm ngoài vòng tròn đó, còn các điểm trên vòng tròn thì phải khảo sát riêng.*

Định lý

Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trong và trên mọi vòng tròn $|z - z_0| = r$ *với* $r < R = \dfrac{1}{L}$ *-bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.*

Định lý

Nếu $f(z)$ *giải tích trong 1 miền* D *có biên là 1 đường kín đơn* C *và* z *và* a *là 2 điểm trên* C *thì*

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + R_n(z),$$

trong đó $R_n(z) = \dfrac{(z-a)^n}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(t)dt}{(t-a)^n(t-z)}$

Định lý

Nếu $f(z)$ giải tích bên trong 1 vòng tròn nào đó tâm a thì nó sẽ được biểu diễn bởi chuỗi Taylor

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

tại mọi điểm z bên trong vòng tròn đó.

Định nghĩa

Nếu $a = 0$ *thì chuỗi Taylor được gọi là chuỗi Maclaurint*

Định lý

(Liouville.) Nếu $f(z)$ *giải tích và bị chặn ở mọi giá trị* z *thì* $f(z)$ *phải là hằng số.*

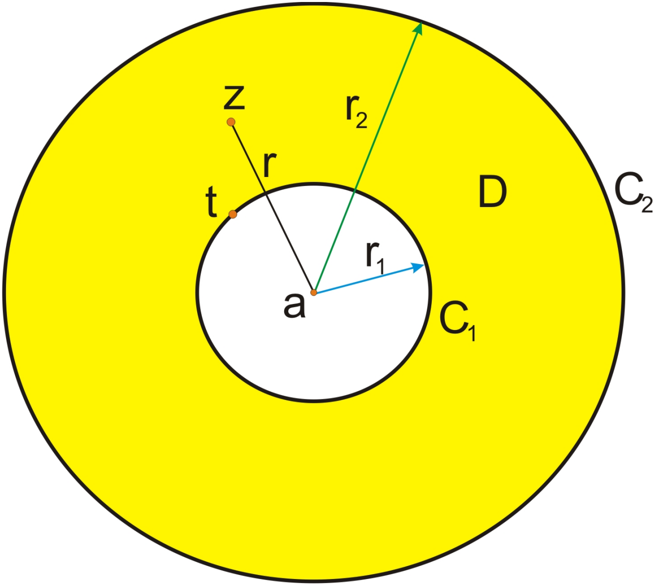
1. $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ với mọi } |z| < \infty$$
2. $$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ với mọi } |z| < \infty$$
3. $$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \text{ với mọi } |z| < \infty$$
4. $$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ với mọi } |z| < \infty$$
5. $$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \text{ với mọi } |z| < \infty$$

1. $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, với mọi $|z| < 1$
2. $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, với mọi $|z| < 1$

Định lý

Nếu $f(z)$ *giải tích khắp miền kín* D *có biên là 2 vòng tròn đồng tâm thì ở mọi điểm* $z \in D$, $f(z)$ *có thể được biểu diễn bởi chuỗi*

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$, *trong đó* a *là tâm chung của 2 vòng tròn và* $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}$, *các tích phân được lấy theo chiều dương quanh 1 đường kín* C *bất kỳ nằm trong* D *và bao quanh biên trong* D.


z
r2
r
t
D
C2
r1
a
C1

Định lý

Nếu $f(z)$ có khai triển Laurent trong 1 hình vành khăn, thì khai triển đó là duy nhất.

Ví dụ

Khai triển các hàm sau thành chuỗi Laurent

1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *quanh điểm* $a = 0$
2. $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2}$ *quanh điểm* $a = i$
3. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(2-z)}$ *trong toàn mặt phẳng phức.*

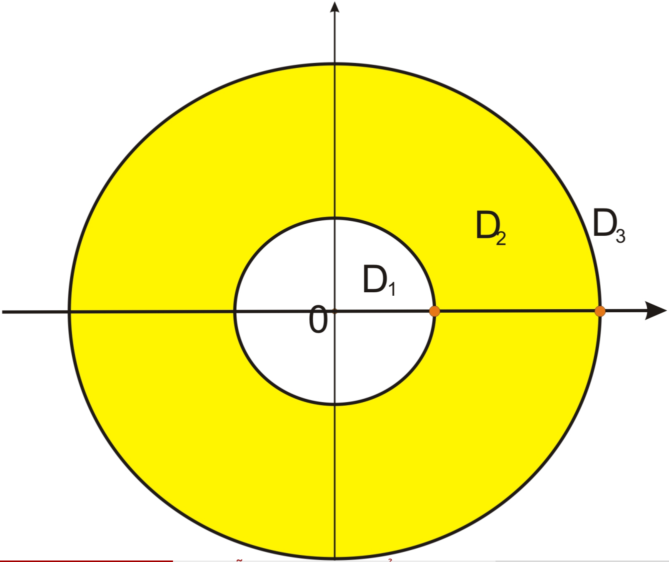
1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ quanh điểm $a = 0$. Ta có 1 điểm bất thường $z = 0$. Thay z bởi $\dfrac{1}{z}$ trong khai triển Maclaurint của hàm e^z, ta có

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots (0 < |z| < +\infty)$$

2. $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2}$ quanh điểm $a = i$

$f(z) = (z-i)^{-2}$. Đây chính là khai triển Laurent của $f(z)$ quanh $a = i$ với $a_{-2} = 1$ và $a_n = 0, \forall n \neq -2$

3. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ trong toàn mặt phẳng.



$f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z-2}$ có 2 điểm bất thường $z = 1, z = 2$ và giải tích trong 3 miền $D_1 : |z| < 1,\ D_2 : 1 < |z| < 2, D_3 : 2 < |z|$.
Trong miền D_1 vì $|z| < 1$ nên $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$, do đó

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}.\frac{1}{1-z/2} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n$$

Trong miền D_2 vì $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ và $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ nên

$$f(z) = \frac{1}{z}.\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{2}.\frac{1}{1-z/2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{2^{n+1}} \right)$$

Trong miền D_3 vì $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ và $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ nên

$$f(z) = \frac{1}{z}.\frac{1}{1 - 1/z} - \frac{1}{z}.\frac{1}{1 - 2/z} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{z^{n+1}}$$

Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

1. $1 + (z - i) + (z - i)^2 + \ldots$
2. $z(1 - z) + z^2(1 - z) + z^3(1 - z) + \ldots$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (z+i)^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{Re\ z}{z+1} \right)^n$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz}$

Tìm miền hội tụ, tổng và miền hội tụ đều của chuỗi sau

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{(1+z)^{n-1}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z(1+z)^{n-1}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-z^2)^{n-1}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n|z|}$

Tìm bán kính hội tụ của chuỗi sau

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (z-1)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (z-1)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} (z+2)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sqrt{n}} (z+1)^n$

Khai triển các hàm $f(z)$ sau đây thành chuỗi Taylor quanh điểm a cho trước và xác định bán kính hội tụ của mỗi chuỗi

1. $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$, $a = 0$ và $a = 1$.
2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+3z+2}$, $a = 0$ và $a = 2$.
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $a = i$
4. $f(z) = e^z$, $a = 0$ và $a = \dfrac{i\pi}{2}$, $a = i\pi$ và $a = \dfrac{3i\pi}{2}$

Khai triển hàm $f(z)$ sau thành chuỗi Laurent và chỉ ra miền hội tụ của chuỗi khai triển

1. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ trong hình vành khăn $0 < |z| < 1$
2. $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$ trong hình vành khăn $2 < |z-1| < \infty$
3. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3iz - 2}$ quanh điểm $z_0 = 2i$

THANK YOU FOR ATTENTION