# LÝ THUYẾT THẶNG DƯ


TS. Lê Xuân Đại

**Trường Đại học Bách Khoa TP HCM**
**Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng**


TP. HCM — 2013.

## Định nghĩa

*Điểm* $z = a$ *được gọi là* ***điểm bất thường*** *của hàm* $f(z)$ *khi* $f(z)$ *không giải tích tại* $z = a$ *nhưng trong mọi lân cận của* $a$ *đều có chứa các điểm tại đó* $f(z)$ *giải tích.*

## Định nghĩa

*Nếu* $z = a$ *là 1 điểm bất thường của* $f(z)$ *và nếu có 1 lân cận của* $a$ *trong đó không có điểm bất thường nào khác thì* $z = a$ *được gọi là* ***điểm bất thường cô lập*** *của* $f(z)$.

Nếu $a$ là 1 điểm bất thường cô lập của $f(z)$ thì $f(z)$ có thể được khai triển thành chuỗi Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

trong lân cận của $a : 0 < |z-a| < R$, với $R$ là khoảng cách từ $a$ đến hết điểm bất thường khác gần $a$ nhất của $f(z)$.

## Định nghĩa

*Nếu trong khai triển Laurent chỉ chứa một số hữu hạn các lũy thừa âm của* $(z-a)$ *thì* $z=a$ *được gọi là một cực của* $f(z)$. *Nếu* $(z-a)^m$ *là lũy thừa âm cao nhất trong khai triển Laurent thì* $a$ *được gọi là một cực cấp m. Khi đó tổng tất cả các số hạng có lũy thừa âm*

$$\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{(z-a)}$$

*được gọi là phần chính của* $f(z)$ *tại* $z=a$.

### Định nghĩa

*Nếu trong khai triển Laurent chứa vô số lũy thừa âm của* $(z - a)$ *thì* $z = a$ *được gọi là* *điểm bất thường chủ yếu* *của* $f(z)$.

### Định nghĩa

*Nếu trong khai triển Laurent không chứa lũy thừa âm nào của* $(z - a)$ *thì* $z = a$ *được gọi là* *điểm bất thường khử được* *của* $f(z)$.

Phân loại các điểm bất thường của các hàm $f(z)$ sau tại các điểm $z = a$ tương ứng.

1. $\dfrac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$ tại $z = 2$.
2. $\dfrac{\sinh z}{z^4}$ tại $z = 0$.
3. $\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ tại $z = 1$.
4. $e^{\frac{1}{z}}$ tại $z = 0$.
5. $\dfrac{1 - \cos z}{z^2}$ tại $z = 0$.

**1.** $\dfrac{z^2-2z+3}{z-2} = \dfrac{z(z-2)+3}{z-2} = z + \dfrac{3}{z-2} = 2 + (z-2) + \dfrac{3}{z-2}, (0 < |z-2| < \infty)$. Vậy $f(z)$ có một cực đơn tại $z = 2$ với phần chính $\dfrac{3}{z-2}$

**2.** $\dfrac{\sinh z}{z^4} = \dfrac{1}{z^4}\left(z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \ldots\right) = \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{3!z} + \dfrac{z}{5!} + \ldots (0 < |z| < \infty)$. Vậy $f(z)$ có một cực cấp 3 tại $z = 0$ với phần chính $\dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{3!z}$

**3.** $\dfrac{1}{z(z-1)^2} = \dfrac{1}{(z-1)^2}.\dfrac{1}{1+(z-1)} = \dfrac{1}{(z-1)^2}.[1-(z-1)+(z-1)^2-\ldots] = \dfrac{1}{(z-1)^2} - \dfrac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 + \ldots (0 < |z-1| < 1).$

Vậy $f(z)$ có một cực kép tại $z = 1$ với phần chính $\dfrac{1}{(z-1)^2} - \dfrac{1}{z-1}$

**4.** $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \dfrac{1}{3!z^3} + \ldots (0 < |z| < \infty).$

Vậy $f(z)$ có điểm bất thường chủ yếu $z = 0$.

**5.** $\dfrac{1-\cos z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2}\left[1-\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dots\right)\right] = \dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}-\dots (0<|z|<\infty)$. Vậy $f(z)$ giải tích với mọi $z$ nên $z=0$ là điểm bất thường khử được.

Trong công thức khai triển Laurent, ta có

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}}$$

Khi cho $n = -1$ và thay kí hiệu $t$ bởi $z$ ta được

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz \Rightarrow \int_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

với $C$ là 1 đường kín bất kỳ nằm trong miền kín $D$ lấy theo chiều dương.

## Định nghĩa

*Hệ số* $a_{-1}$ *của* $\dfrac{1}{(z-a)}$ *trong khai triển Laurent của* $f(z)$ *trong lân cận* $0 < |z-a| < R$ *của 1 điểm bất thường cô lập* $z = a$ *được gọi là thặng dư của* $f(z)$ *tại* $z = a$ *và kí hiệu* $Res\,\{f(z); a\}$

## Ví dụ

*Tính* $\int\limits_C e^{\frac{1}{z^2}} dz$, *với* $C$ *là vòng tròn đơn vị* $|z| = 1$.

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \ldots (0 < |z| < \infty).$$

Với $C$ là vòng tròn đơn vị $|z| = 1$ chứa điểm bất thường $z = 0$ của $e^{\frac{1}{z^2}}$ nên

$$\int_C e^{\frac{1}{z^2}} dz = 2\pi i Res \left\{ e^{\frac{1}{z^2}}; 0 \right\} = 0.$$

## Ví dụ

*Tính* $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4}$, *với* $C$ *là vòng tròn* $|z-2| = 1$.

Hàm số giải tích khắp nơi ngoại trừ tại 2 điểm bất thường $z = 0, z = 2$. Tuy nhiên, chỉ có $z = 2$ là điểm bất thường nằm trong vòng tròn $|z-2| = 1 < 2$.

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{(z-2)^4}\cdot\frac{1}{2+(z-2)} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)^4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)^4}\left[1-\frac{z-2}{2}+\left(\frac{z-2}{2}\right)^2-\left(\frac{z-2}{2}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z-2}{2}\right)^4-\dots\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-2)^4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-2)^3}+$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(z-2)^1}+\frac{1}{2^3}-\dots.$$

Hệ số của $(z-2)^{-1}$ là $-\dfrac{1}{16}$ nên

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i\left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{\pi i}{8}.$$

## Định lý

*Nếu* $C$ *là 1 đường kín đơn và nếu* $f(z)$ *là 1 hàm giải tích trong và trên* $C$ *ngoại trừ tại 1 số hữu hạn điểm bất thường* $z_k(k = 1, 2, \ldots, n)$ *trong* $C$ *thì*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\ \{f(z), z_k\}.$$

## Ví dụ

*Tính* $\int\limits_C \frac{-3z+4}{z(z-1)(z-2)}dz$, *với C là vòng tròn* $|z| = \frac{3}{2}$

$f(z) = \frac{-3z+4}{z(z-1)(z-2)}$ có cực đơn $z = 0, z = 1, z = 2$ nhưng chỉ có 2 cực đơn $z = 0, z = 1$ nằm trong $|z| = \frac{3}{2}$. Do đó ta sẽ khai triển Laurent của $f(z)$ tại $z = 0$ và $z = 1$

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

Với $0 < |z| < 1 < 2$ ta có $f(z) =$
$\frac{2}{z} - (1 + z + z^2 + \ldots) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \ldots\right)$
nên $Res\,\{f(z); 0\} = 2$.

Với $0 < |z-1| < \frac{1}{2} < 1$ ta có

$$f(z) = \frac{2}{1+(z-1)} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-(z-1)} =$$

$$2.[1-(z-1)+(z-1)^2-\ldots] - \frac{1}{z-1} +$$

$$+[1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots]$$ nên

$Res\ \{f(z);1\} = -1.$

Vậy

$$\int\limits_C \frac{-3z+4}{z(z-1)(z-2)}dz = 2\pi i(2-1) = 2\pi i.$$

Nếu hàm số $f(z)$ có quá nhiều cực bên trong và trên $C$ thì việc tính quá nhiều thặng dư cũng khá vất vả. Ta có thể tính tích phân của $f(z)$ như sau

## Định lý

*Nếu $C$ là 1 đường kín đơn và nếu $f(z)$ là 1 hàm giải tích khắp nơi trong mặt phẳng hữu hạn, ngoại trừ tại một số hữu hạn điểm bất thường nằm trong và trên $C$ thì*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res\left\{\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right);0\right\}$$

## Ví dụ

*Tính tích phân* $I = \int\limits_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$, *với* $C$ *là vòng tròn* $|z| = 2$

$$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)} \Rightarrow \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2z-5}{z(z-1)} =$$

$$\frac{5}{z} - \frac{3}{z-1} = \frac{5}{z} + 3(1 + z + z^2 + \ldots)(0 < |z| < 1)$$

Vậy $Res\left\{\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right); 0\right\} = 5$, và

$I = 2\pi i.5 = 10\pi i.$

## Định lý

*Một điểm bất thường cô lập* $a$ *của 1 hàm* $f(z)$ *là 1 cực cấp* $m$ *nếu và chỉ nếu* $f(z)$ *có thể viết dưới dạng*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

*trong đó* $\varphi(z)$ *giải tích tại* $a$ *và* $\varphi(a) \neq 0$. *Hơn nữa*

$$Res\,\{f(z); a\} = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

## Ví dụ

*Xác định cực và thặng dư tại các cực của các hàm sau*

1. $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+9}$.

   **Đáp số.** $Res\left\{f(z); 3i\right\} = \dfrac{3-i}{6}$,

   $Res\left\{f(z); -3i\right\} = \dfrac{3+i}{6}$.

2. $f(z) = \dfrac{z^3+2z}{(z-i)^3}$.

   **Đáp số.** $Res\left\{f(z); i\right\} = 3i$.

**1.** $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+9} = \dfrac{z+1}{(z+3i)(z-3i)} = \dfrac{\varphi(z)}{z-3i}$,

với $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{z+3i}$

Hàm số $\varphi(z)$ giải tích tại $z = 3i$ và

$\varphi(3i) = \dfrac{1+3i}{6i} \neq 0$ nên với $z = 3i$ là cực đơn ta được

$$Res\ \{f(z); 3i\} = \frac{\varphi(3i)}{0!} = \frac{1+3i}{6i} = \frac{3-i}{6}$$

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2+9} = \frac{z+1}{(z+3i)(z-3i)} = \frac{\varphi(z)}{z+3i},$$ với
$$\varphi(z) = \frac{z+1}{z-3i}$$
Hàm số $\varphi(z)$ giải tích tại $z = -3i$ và
$\varphi(-3i) = \dfrac{1-3i}{-6i} \neq 0$ nên với $z = -3i$ là cực đơn
ta được

$$Res\,\{f(z); -3i\} = \frac{\varphi(-3i)}{0!} = \frac{1-3i}{-6i} = \frac{3+i}{6}$$

**2.** $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z}{(z-i)^3} = \dfrac{\varphi(z)}{(z-i)^3}$, với

$\varphi(z) = z^3 + 2z$

Hàm số $\varphi(z)$ giải tích tại $z = i$ và $\varphi(i) = i \neq 0$ nên với $z = i$ là cực cấp 3 ta được

$$Res\ \{f(z); 3i\} = \frac{\varphi''(3i)}{2!} = \frac{6i}{2!} = 3i.$$

## Định nghĩa

*Xét hàm* $f(z)$ *giải tích tại* $a$. *Nếu tại* $z$ *hàm* $f(z)$ *thỏa mãn điều kiện*
$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ *và*
$f^{(m)}(a) \neq 0$ *thì ta nói* $f(z)$ *có 1 zero cấp* $m$ *tại* $a$

## Định lý

*Một hàm* $f(z)$ *giải tích tại* $a$ *sẽ có* $a$ *là zero cấp* $m$ *nếu và chỉ nếu* $f(z)$ *có thể viết dưới dạng*
$f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, *trong đó* $\varphi(z)$ *giải tích tại* $a$ *và* $\varphi(a) \neq 0$.

## Ví dụ

*Xác định cấp của zero* $a = 0$ *của hàm* $f(z) = z(e^z - 1)$

Ta có $f(0) = f'(0) = 0$ và $f''(0) = 2$ nên $a = 0$ là một zero cấp 2 của $f(z)$. Khi đó

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

hay $\varphi(z) = 1 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^3}{3!} + \dots$

## Định lý

*Gọi* $P(z)$ *và* $Q(z)$ *là 2 hàm giải tích tại điểm* $a$ *và* $P(a) \neq 0$. *Nếu* $a$ *là 1 zero cấp* $m$ *của mẫu* $Q(z)$ *thì hàm* $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *sẽ nhận* $a$ *là cực cấp* $m$.

## Định lý

*Gọi* $P(z), Q(z)$ *là 2 hàm giải tích tại* $\mathbf{a}$. *Nếu* $P(a) \neq 0, Q(a) = 0, Q'(a) \neq 0$ *thì* $\mathbf{a}$ *là 1 cực đơn của hàm* $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *và*

$$Res\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}; a\right\} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

## Ví dụ

1. *Tìm thặng dư của hàm* $f(z) = \dfrac{z}{z^4+4}$ *tại cực đơn cô lập* $1+i$. **ĐS.** $\dfrac{-i}{8}$
2. *Tìm thặng dư của hàm* $f(z) = \dfrac{1+z}{1-\cos z}$ *tại* $z = 0$. **ĐS.** $Res\,\{f(z); 0\} = 2.$

**1.** Ta có $f(z) = \dfrac{z}{z^4+4} = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ với $P(z) = z$ và $Q(z) = z^4 + 4$. Từ đó $P(1+i) = 1 + i \neq 0$, $Q(1+i) = 0, Q'(1+i) = 4(1+i)^3 \neq 0$ nên $1 + i$ là cực đơn của $f(z)$ với thặng dư bằng

$$Res\{f(z); 1+i\} = \frac{P(1+i)}{Q'(1+i)} =$$

$$= \frac{1+i}{4(1+i)^3} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}.$$

**2.** Ta không biết cực cấp mấy của $f(z)$ nhưng khi thay $\cos z$ bằng chuỗi Macluarint ta được

$$f(z) = \frac{1+z}{1-(1-z^2/2+z^4/24-\ldots)} =$$

$$= \frac{1+z}{z^2(1/2-z^2/24+\ldots)}$$

Từ đó suy ra $z=0$ là cực cấp 2. Với $m=2$ và $\varphi(z) = \dfrac{1+z}{z^2(1/2-z^2/24+\ldots)}$ ta có

$$Res\{f(z);0\} = \frac{\varphi'(0)}{1!} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(1/2-z^2/24+\ldots)-(1+z)(-2z/24+\ldots)}{(1/2-z^2/24+\ldots)^2} = 2$$

Tìm thặng dư của các hàm $f(z)$ tại các điểm $z$ tương ứng

1. $\dfrac{z}{z^2+1}$ tại $z = i$ và $z = -i$. ĐS. $\dfrac{1}{2}$
2. $\dfrac{z+1}{z^2(z-2)}$ tại $z = 0$ và $z = 2$. ĐS. $-\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}$
3. $\dfrac{1}{z - \sin z}$ tại $z = 0$. ĐS. $\dfrac{3}{5}$
4. $\dfrac{z}{(z-1)^2(z+1)^3}$ tại các cực của nó. ĐS.

$$Res\,\{f(z);1\} = -\frac{1}{16},\ Res\,\{f(z);-1\} = \frac{1}{16}.$$

Nếu $C$ là vòng tròn $|z| = 4$ tính $\int\limits_C f(z)dz$ với mỗi hàm $f(z)$ sau

1. $\dfrac{z}{z^2 - 1}$. ĐS. $2\pi i$
2. $\dfrac{z^2}{(z^2 + 3z + 2)^2}$. ĐS 0

## Định lý

*Nếu* $F(\cos\theta, \sin\theta)$ *là 1 hàm hữu tỉ của* $\cos\theta$ *và* $\sin\theta$, *hữu hạn trên khoảng kín* $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, *và nếu* $f(z)dz$ *là biểu thức có được từ* $F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ *bằng cách đặt* $z = e^{i\theta}$ *và thay thế* $\cos\theta = \dfrac{z + 1/z}{2}, \sin\theta = \dfrac{z - 1/z}{2i}, d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ *thì*

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\{f(z), z_k\},$$

*trong đó* $z_k, k = 1, .., n$ *là các cực của* $f(z)$ *nằm trong vòng tròn đơn vị* $|z| = 1$.

## Ví dụ

*Tính* $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta.$

**Đáp số.** $I = \frac{\pi}{12}$ Đặt $z = e^{i\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{z + 1/z}{2}$,

$\cos 3\theta = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} = \frac{z^3 + 1/z^3}{2}$, $dz = izd\theta$

$$I = -\frac{1}{2i}\int_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)} dz,$$

trong đó $C : |z| = 1$ và $f(z) = \frac{z^6 + 1}{z^3(2z-1)(z-2)}$

$f(z)$ có $z = 0$ là cực cấp 3, $z = 1/2$ là cực đơn nằm trong vòng tròn đơn vị $|z| = 1$

$$Res\{f(z);0\} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^6+1}{(2z-1)(z-2)}\right] = \frac{21}{8}$$

$$Res\{f(z);1/2\} = \lim_{z\to 1/2}\left[\frac{z^6+1}{2z^3(z-2)}\right] = -\frac{65}{24}$$

Vậy $I = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left(\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right) = \frac{\pi}{12}$

# Định lý

*Nếu* $f(z)$ *là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng trên* $Im\ z > 0$ *ngoại trừ ở một số hữu hạn cực không nằm trên trục thực, và nếu* $zf(z)$ *hội tụ đều về 0 khi* $z \to \infty$ *qua các giá trị sao cho* $0 \leqslant arg\ z \leqslant \pi$ *thì*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\{f(z), z_k\},$$

*trong đó* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *là các cực của* $f(z)$ *nằm trong nửa mặt phẳng trên.*

## Hệ quả

*Nếu* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *trong đó* $P(x), Q(x)$ *là 2 đa thức thực sao cho bậc của* $Q(x) \geqslant$ *bậc* $P(x) + 2$ *và nếu* $Q(x)$ *không có nghiệm thực thì*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res\{f(z), z_k\},$$

*trong đó* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *là các cực của* $f(z)$ *nằm trong nửa mặt phẳng trên.*

## Ví dụ

Tính $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx$. **Đáp số.** $I = \frac{\pi}{3}$

Với $f(z) = \frac{z^2}{z^6+1}$ có bậc của $Q(z) = z^6 + 1$ là 6 và bậc của $P(z) = z^2$ là 2 nên

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{5} Res\{f(z), z_k\},$$

trong đó $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

Tuy nhiên, ta chỉ lấy các cực nằm trong nửa mặt phẳng trên là $z_0 = e^{i\pi/6}$, $z_1 = i$, $z_2 = e^{i5\pi/6}$. Mặt khác ta có

$$Res\{f(z), z_k\} = \frac{z_k^2}{5z_k^5} = \frac{1}{6z_k^3}, k = 0, 1, 2.$$

Vậy

$$I = 2\pi i.\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i} + \frac{1}{i}\right) = \frac{\pi}{3}$$

# Hệ quả

*Nếu $f(z)$ là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng trên ngoại trừ ở một số hữu hạn cực không nằm trên trục thực, và nếu $zf(z)$ hội tụ đều về 0 khi $z \to \infty$ trong nửa mặt phẳng trên, thì với $a > 0$, ta có*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax dx = -2\pi Im \sum_{k=1}^{n} Res\{e^{iaz}f(z), z_k\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax dx = 2\pi Re \sum_{k=1}^{n} Res\{e^{iaz}f(z), z_k\},$$

*trong đó $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là các cực của $f(z)$ nằm trong nửa mặt phẳng trên.*

## Ví dụ

*Tính* $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2}$. **Đáp số.** $\frac{\pi e^{-a}(a+1)}{2}$

Hàm $z.f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$ hội tụ đều về 0 khi $z \to \infty$.

Hàm $\frac{e^{iaz}}{(z^2+1)^2}$ chỉ có 1 cực kép $z = i$ nằm trong nửa mặt phẳng trên với thặng dư

$$Res\left\{\frac{e^{iaz}}{z^2+1}; i\right\} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{e^{iaz}}{(z+i)^2} = -\frac{ie^{-a}(a+1)}{4}$$

Vậy $I = -2\pi.Im\left(-\frac{ie^{-a}(a+1)}{4}\right) = -\frac{\pi e^{-a}(a+1)}{2}$

Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp thặng dư

1. $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta + 2\sin\theta + 3}$$
2. $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{5 + 4\cos\theta}$$

Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp thặng dư

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^2)(x^2+4)}$$

Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp thặng dư

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx dx}{1+x^4}$$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin mx dx}{1+x^4}$$

# THANK YOU FOR ATTENTION