# PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE


TS. Lê Xuân Đại

**Trường Đại học Bách Khoa TP HCM**
**Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng**


TP. HCM — 2011.

## Định nghĩa

*Phép biến đổi Laplace* $\mathrm{L}$ *là 1 quy luật liên kết với hàm* $f(t)$ *1 hàm* $F(s)$ *xác định bởi*

$$F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

$F(s)$ *gọi là* *biến đổi Laplace* *của* $f(t)$, *còn* $f(t)$ *là* *biến đổi Laplace ngược* *của* $F(s)$. *Kí hiệu* $f(t) \risingdotseq F(s)$.

Biến đổi Laplace tồn tại nếu tích phân suy rộng trên hội tụ khi $s$ ở trong 1 khoảng nào đó.

# Hàm bậc thang đơn vị

Hàm bậc thang đơn vị được định nghĩa như sau

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{L}\{u(t)\} = \int\limits_{0-}^{\infty} 1.e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0-}^{\infty} = \frac{1}{s}, \text{ nếu } s > 0.$$

# Hàm mũ $e^{-at}$

Ta có $\mathrm{L}\{e^{-at}\} = \int\limits_{0-}^{\infty} e^{-at}.e^{-st}dt = \left.\dfrac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_{0-}^{\infty} = \dfrac{1}{s+a}$, nếu $s > -a$.

# Hàm lượng giác $\cos at, \sin at$

Ta có $\mathrm{L}\{\cos at\} = \int\limits_{0-}^{\infty} e^{-st} \cos at dt =$
$\dfrac{e^{-st}}{s^2 + a^2}(-s\cos at + a\sin at)\Big|_{0-}^{\infty} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$, nếu $s > 0$.

và $\mathrm{L}\{\sin at\} = \int\limits_{0-}^{\infty} e^{-st} \sin at dt =$
$\dfrac{e^{-st}}{s^2 + a^2}(-s\sin at - a\cos at)\Big|_{0-}^{\infty} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$, nếu $s > 0$.

## Hàm lũy thừa $t^n$, với $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ta có $\mathrm{L}\{t^n\} = \int\limits_{0-}^{\infty} t^n.e^{-st}dt =$
$\left.\dfrac{t^n e^{-st}}{-s}\right|_{0-}^{\infty} + \dfrac{n}{s}\int\limits_{0-}^{\infty} t^{n-1}e^{-st}dt = \dfrac{n}{s}\mathrm{L}\{t^{n-1}\}$, nếu $s > 0$.

Quá trình này cứ tiếp tục ta được
$\mathrm{L}\{t^n\} = \dfrac{n}{s}.\dfrac{n-1}{s}.\dfrac{n-2}{s}\ldots\mathrm{L}\{u(t)\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ nếu $s > 0$.

## Định lý

*Nếu $F_1(s)$ và $F_2(s)$ lần lượt là biến đổi Laplace của $f_1(t)$ và $f_2(t)$, còn $c_1, c_2$ là hằng số bất kỳ thì*

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

## Ví dụ

*Tính* $\mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\}$.

**Đáp số.** $\dfrac{8}{s^3} - \dfrac{3s}{s^2+4} + \dfrac{5}{s+1}$

## Định lý

*Nếu* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì* $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$

Các công thức quan trọng

1. $\mathcal{L}\{e^{-at}\cos bt\} = \dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$, với $s > -a$
2. $\mathcal{L}\{e^{-at}\sin bt\} = \dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$, với $s > -a$
3. $\mathcal{L}\{e^{-at}t^n\} = \dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$, với $s > -a$

## Ví dụ

*Tính*

1. $\mathrm{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4^2}$, *với* $s > 2$
2. $\mathrm{L}\{e^{-t}\sin 4t\} = \dfrac{4}{(s+1)^2+4^2}$, *với* $s > 1$
3. $\mathrm{L}\{e^{3t}t^2\} = \dfrac{2!}{(s-3)^3}$, *với* $s > -3$

## Định lý

*Nếu* $\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì*

$\mathrm{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, *trong đó*

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

## Ví dụ

*Tìm* $F(s)$ *nếu* $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \dfrac{2\pi}{3} \\ \cos(t - \dfrac{2\pi}{3}), & t > \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

## Định lý

*Nếu* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì* $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $(a > 0)$

## Ví dụ

*Biết rằng* $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin t}{t}\right\} = \arctan\dfrac{1}{s}$ *hãy tìm* $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin at}{t}\right\}$

**Đáp số.** $\arctan\dfrac{a}{s}$

## Định lý

*Nếu* $\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì*

$\mathrm{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0-)$

## Hệ quả

1. $\mathrm{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$
2. $\mathrm{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0-) - s^{n-2}f'(0-) - \ldots - f^{n-1}(0-)$

### Định lý

$$Nếu\ \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)\ thì\ \mathcal{L}\left\{\int_{0-}^{t} f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

## Định lý

*Nếu* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

## Định lý

*Nếu* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì* $\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int\limits_s^\infty F(x)dx$

*với điều kiện* $\lim\limits_{t\to 0-} \dfrac{f(t)}{t}$ *tồn tại.*

## Định lý

*Nếu* $f(t)$ *là 1 hàm tuần hoàn với chu kỳ* $T > 0$ *thì*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int\limits_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

## Định lý

*Nếu* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì*
$\lim\limits_{t\to 0+} f(t) = f(0+) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$, *với điều kiện các giới hạn trên tồn tại.*

**Định lý**

*Nếu* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì* $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$, *với điều kiện các giới hạn trên tồn tại.*

# Ví dụ

1. Tính $\mathcal{L}\left\{\int\limits_t^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx\right\}$
2. Tính $\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^{t} \frac{\sin x}{x} dx\right\}$
3. Tính $\mathcal{L}\left\{\int\limits_t^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx\right\}$

## Định lý

*Nếu* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *thì* $\int\limits_{0-}^{\infty} f(t)dt = F(0)$, *với điều kiện tích phân suy rộng trên hội tụ.*

## Ví dụ

*Tính* $\int\limits_{0-}^{\infty} \dfrac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt$

Tìm biến đổi Laplace của mỗi hàm sau và chỉ ra giá trị $s$ để biến đổi Laplace tồn tại.

1. $2t^2 - e^{-t}$
2. $6\sin 2t - 5\cos 2t$
3. $3\cosh 5t - 4\sinh 5t.$
4. $(5e^{2t} - 3)^2$
5. $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 5 \\ 1, & t > 5 \end{cases}$

Tìm biến đổi Laplace của các hàm sau

1. $3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2\sin 5t + 3\cos 2t$
2. $t^3 e^{-3t}$
3. $(t+2)^2 e^t$
4. $e^{-4t}\cosh 2t$
5. $e^{-t}(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)$
6. $e^{-t}\sin^2 t$
7. $(1 + te^{-t})^3$

Tính tích phân

1. $$\int_0^{\infty} t^3 e^{-t} \sin t dt$$
2. $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \sin t}{t} dt$$

# THANK YOU FOR ATTENTION