

PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng



TP. HCM — 2011.

Định nghĩa

Nếu phép biến đổi Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ thì $f(t)$ được gọi là *biến đổi Laplace ngược* của $F(s)$ và ta viết $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Ví dụ

$$\text{Ta có } \mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3} \text{ nên } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}.$$

Định lý

Nếu $f_1(t)$ và $f_2(t)$ lần lượt là biến đổi Laplace ngược của $F_1(s)$ và $F_2(s)$, còn c_1, c_2 là hằng số bất kỳ thì

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$$

Ví dụ

Tính $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\}$.

Đáp số. $4e^{2t} - 3\cos 4t + \frac{5}{2}\sin 2t$

Định lý

$$\text{Nếu } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ thì}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-at}f(t)$$

Các công thức quan trọng

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}.$$

Ví dụ

Tính

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 2s + 5}\right\}. \text{ DS. } \frac{1}{2}e^t \sin 2t.$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s - 4}{s^2 - 4s + 20}\right\}. \text{ DS. } e^{2t}(6 \cos 4t + 2 \sin 4t)$$

Định lý

Nếu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ thì

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a).$$

Ví dụ

① Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\}$. DS. $\sin(t - \frac{\pi}{3})u(t - \frac{\pi}{3})$.

② Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(e^{-s} - e^{-2s})}{(s+1)(s+2)}\right\}$. DS.

$$2[e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}]u(t-1) - 2[e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]u(t-2).$$

Định lý

$$\text{Nếu } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ thì } \mathcal{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right), \\ (a > 0)$$

Ví dụ

$$\text{Tìm } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{4s^2 + 16}\right\}$$

$$\text{Đáp số. } \frac{1}{2} \cos 2t$$

Định lý

Nếu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ thì

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \text{ hay}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}}{(-1)^n t^n}$$

Ví dụ

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln \frac{s+1}{s-1}\right\}. \text{ DS. } \frac{2 \sinh t}{t}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right\}. \text{ DS. } \frac{2[u(t) - \cos t]}{t}$$

Định lý

$$\text{Nếu } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ thì } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_s^{\infty} F(x) dx \right\} = \frac{f(t)}{t}$$

$$\text{hay } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_s^{\infty} F(x) dx \right\}.$$

Ví dụ

$$\text{Tìm } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 - 1)^2} \right\}. \text{ DS. } \frac{1}{2} t \sinh t$$

Định lý

Nếu $F(0) = 0$ và $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ thì

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \text{ hay}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{d}{dt}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Định lý

Nếu $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0)$ thì

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^n F(s)\} = f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \text{ hay}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s^n}\right\}$$

Ví dụ

$$\text{Tìm } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\}. \text{ DS. } \cos 2t.$$

Định lý

$$\text{Nếu } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ thì } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)dx$$

$$\text{hay } \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{sG(s)\}dx.$$

Ví dụ

$$① \text{ Tìm } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 4)}\right\}. \text{ DS. } \frac{1 - \cos 2t}{4}.$$

$$② \text{ Tìm } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2 + 1)}\right\}. \text{ DS. } \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

Định lý

Nếu $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ và $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ thì

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

Ví dụ

$$\text{Tìm } L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}. \text{ DS. } e^{2t} - e^t.$$

Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau

$$① \frac{3s - 12}{s^2 + 8}$$

$$② \frac{2s - 5}{s^2 - 9}$$

$$③ \frac{1}{s^5}$$

$$④ \frac{s}{(s + 1)^5}$$

$$⑤ \frac{3s + 2}{4s^2 + 12s + 9}$$

Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau

$$① \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$② \ln \frac{s+2}{s+1}$$

$$③ \frac{1}{s(s+1)^3}$$

$$④ \frac{1}{(s-1)^5(s+2)}$$

$$⑤ \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

THANK YOU FOR ATTENTION