Chương 1

SỐ PHỨC VÀ HÀM BIẾN PHỨC

Mục lục

1.1 Số phức

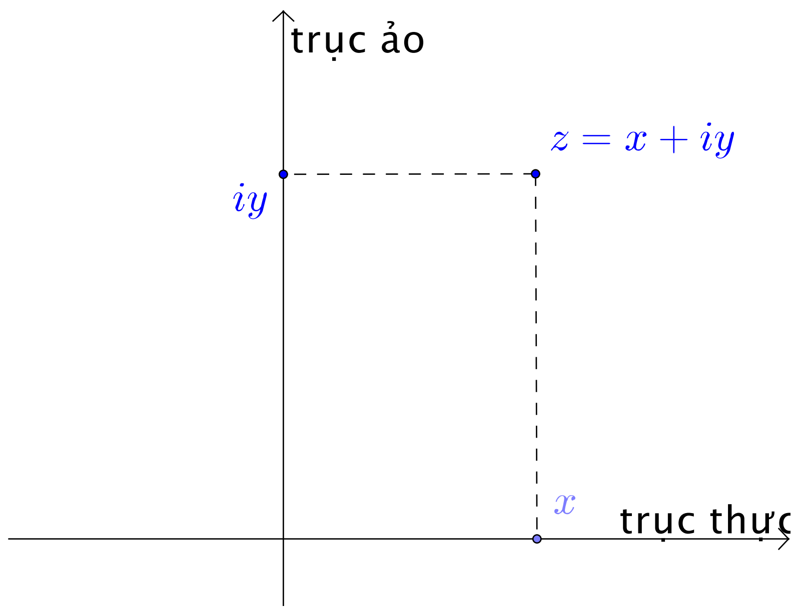
1.1.1 Giới thiệu

Trong phần này, chúng ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất đại số và giải tích cơ bản của số phức.

Một số phức z có dạng $z = x + iy$, trong đó x và y là các số thực và i là một số ảo thoả $i^2 = -1$. Ta gọi x và y lần lượt là phần thực và phần ảo của z và ký hiệu

$$x = \mathrm{Re}(z) \qquad y = \mathrm{Im}(z).$$

Tập hợp tất cả số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$. Một số phức thường được xem như không gian Euclide $\mathbb{R}^2$ bằng cách đồng nhất số phức $z = x + iy \in \mathbb{C}$ với điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Một cách tự nhiên, trục Ox và Oy trong $\mathbb{R}^2$ tương ứng thành trục thực và trục ảo trong không gian phức



1.1.2 Các phép toán và tính chất

Trong không gian phức $\mathbb{C}$, ta trang bị các phép toán sau: Cho $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

i) (Phép cộng) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

ii) (Phép nhân)$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2))$

Các phép toán trên thoả các tính chất sau

i) Tính giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ và $z_1 z_2 = z_2 z_1$

ii) Tính kết hợp: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ và $(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$

iii) Tính phân phối: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_2 z_3$

Phép cộng hai số phức tương ứng với phép cộng hai vector trong không gian $\mathbb{R}^2$. Trong khi đó với phép nhân bao gồm một phép quay (xem 1.1.5), chẳng hạn khi ta nhân một số phức với i, tương ứng ta có phép quay góc $\frac{\pi}{2}$.

1.1.3 Vector và Module

Ta thường đồng nhất không gian phức và không gian Euclide $\mathbb{R}^2$, do đó một cách tự nhiên, để ký hiệu độ dài hay **giá trị tuyệt đối** của số phức, ta đồng nhất với độ dài Euclide trong $\mathbb{R}^2$

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Đây chính là khoảng cách từ gốc toạ độ đến điểm có toạ độ (x, y).

Ta có một số bất đẳng thức sau

$$\text{Re}z \leq |\text{Re}z| \leq |z| \quad \text{và} \quad \text{Im}z \leq |\text{Im}z| \leq |z|$$

Theo bất đẳng thức tam giác, với hai số phức z_1, z_2 bất kỳ, ta có

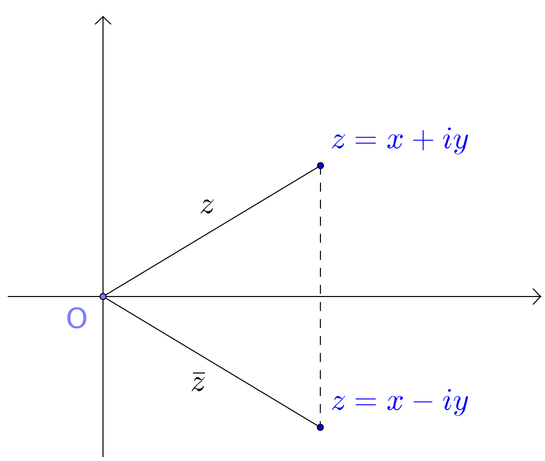
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

và

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1.1.4 Số phức liên hợp

Ta định nghĩa **số phức liên hợp** của z, ký hiệu $\bar{z} = x - iy$.



Trong mặt phẳng phức, $\bar{z}$ đối xứng với z qua trục thực. Ta dễ dàng kiểm tra rằng z là số thực khi và chỉ khi $z = \bar{z}$ và z là số thuần ảo khi và chỉ khi $z = -\bar{z}$.

Đồng thời ta dễ dàng kiểm tra

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{và} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

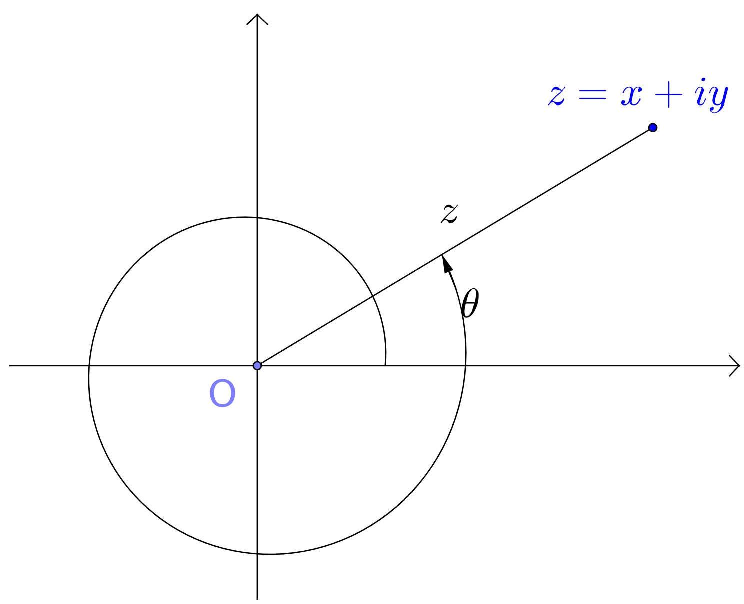
$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{và} \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$$

1.1.5 Dạng lượng giác (dạng cực) của số phức

Với mỗi số phức $z \neq 0$, ta có thể viết dưới dạng lượng giác

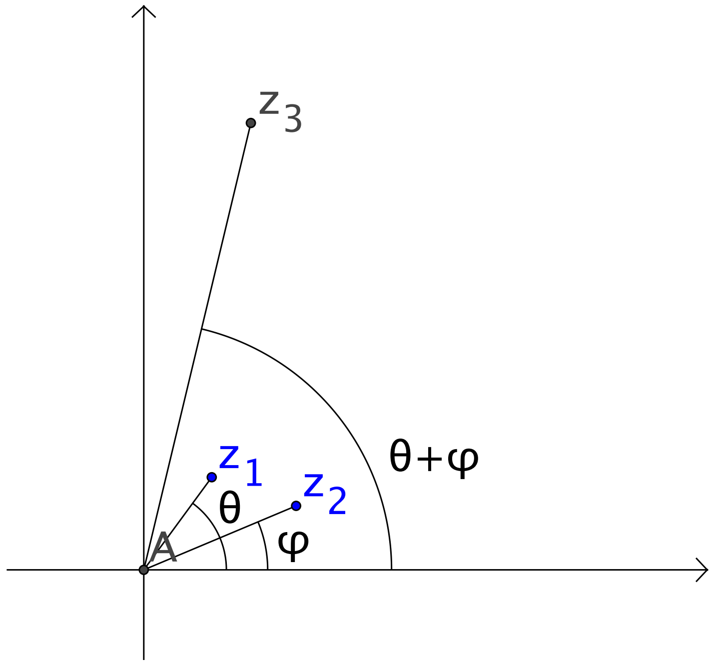
$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

trong đó $r = |z|$ và $\theta \in \mathbb{R}$ được gọi là **argument** của z. Argument của z được xác định duy nhất và sai khác nhau $n2\pi$.



Nếu cho $z_1 = re^{i\theta}$ và $z_2 = se^{i\varphi}$, khi đó

$$zw = rse^{i(\theta+\varphi)}$$



1.1.6 Dãy số phức và sự hội tụ

Cho dãy số $\{z_1, z_2, \ldots\}$ các số phức. Dãy số này được gọi là hội tụ đến $z_0 \in \mathbb{C}$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0 \quad \text{ta viết} \quad z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n$$

Khái niệm này đồng nhất với sự hội tụ trong $\mathbb{R}^2$.

Ta dễ dàng kiểm tra được dãy $\{z_n\}$ hội tụ tới z_0 khi và chỉ khi dãy phần thực và dãy phần ảo của z_n hội tụ tương ứng tới phần thực và phần ảo của z_0

$$\boxed{z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re} z = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re} z_n \\ \mathrm{Im} z = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im} z_n \end{cases}$$

1.2 Hàm biến phức

1.2.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.2.1. Xét $\Omega \subset \mathbb{C}$. Một hàm biến phức trên Ω với giá trị phức là một quy tắc cho tương ứng một phần tử $z \in \Omega$ với một hoặc nhiều phần tử $w \in \mathbb{C}$

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

và ta ký hiệu $w = f(z)$.

Khác với khái niệm hàm thực là một quy tắc cho tương ứng MỘT x phần tử thuộc Ω với MỘT phần tử y, hàm biến phức có thể tương ứng với nhiều trị.

Nếu ứng với một giá trị z xác định một giá trị w duy nhất, thì ta nói đó là hàm biến phức đơn trị, ngược lại, ta nói đó là hàm đa trị.

Ví dụ 1.2.1.

1. $w = z^n$ là hàm đơn trị;
2. $w = \sqrt[n]{z}$ là hàm n-trị;
3. $w = \arg z$ là hàm vô số trị.

Bằng cách viết $z = x + iy \simeq (x, y) \in \mathbb{R}$ và $w = f(z) = u + iv$, ta có

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

trong đó $u(x, y) = \mathrm{Re}(f)$ được gọi là phần thực, $v(x, y) = \mathrm{Im}(f)$ được gọi là phần ảo của hàm số f,

Ví dụ 1.2.2. $w = z^2$, với $z = x + iy$, ta có

$$u + iv = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

Do đó

$$\mathrm{Re}(f) = x^2 - y^2 \qquad \mathrm{Im}(f) = 2xy$$

Hoàn toàn tương tự với hàm biến phức, ta có các khái niệm về giới hạn, tính liên tục và liên tục đều đối với hàm biến phức.

1.2.2 Giới hạn và liên tục

Cho hàm phức f xác định trên tập tuỳ ý $\Omega \subset \mathbb{C}$ và z_0 là một điểm tụ của Ω (tồn tại dãy số $\{z_n\} \subset \Omega$ sao cho $z_n \to z_0$) hoặc là điểm xa vô tận.

Số phức a được gọi là **giới hạn của hàm số $f(z)$ khi z dần đến z_0**, ký hiệu

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a$$

nếu với mọi lân cận V của a tồn tại lân cận U của z_0 sao cho $f(z) \in V$ với mọi $z \in U \cap \Omega; z \neq z_0$.

Nói cách khác, khi z_0 hữu hạn, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall z \in \Omega, \quad 0 \leq |z - z_0| < \delta$ thì

$$|f(z) - a| < \epsilon$$

Khi $z_0 = \infty$, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists R > 0, \quad \forall z \in \Omega, \quad |z| > R$ thì

$$|f(z) - a| < \epsilon$$

Hàm f được gọi là **liên tục** tại z_0 nếu thoả mãn một trong hai điều kiện sau

i) z_0 là điểm cô lập của Ω (z_0 không là điểm tụ)

ii) z_0 là điểm tụ của Ω và

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Nếu viết $f(z) = u(z) + iv(z), \quad z \in \Omega$, ta dễ dàng thấy rằng f liên tục tại $z_0 \in |\Omega$ khi và chỉ khi u và v liên tục tại z_0.

Hàm f được gọi là liên tục trên Ω nếu nó liên tục tại mọi điểm $z \in \Omega$.

Hàm f được gọi là **liên tục đều** trên Ω nếu

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega, \quad |z_1 - z_2| < \delta$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$$

Dễ dàng thấy nếu f liên tục đều trên Ω thì nó liên tục trên Ω.

Các tính chất về hàm số liên tục của hàm biến phức và hàm thực hoàn toàn tương tự nhau.

Định lý 1.2.1. *Nếu hàm số f liên tục trên miền Ω đóng và bị chặn, khi đó tồn tại số thực M không âm thoả*

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Omega.$$

Dấu bằng xảy ra tại ít nhất một điểm $z \in \Omega$.

1.2.3 Hàm chỉnh hình

1.2.3.1 Khái niệm đạo hàm phức

Cho Ω là một tập hợp trong $\mathbb{C}$ và hàm số phức f xác định trên Ω. Hàm f được gọi là **chỉnh hình tại điểm** $z_0 \in \Omega$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad z, z+h \in \Omega$$

với $h \in \mathbb{C}$ được gọi là số gia. Nếu tại điểm z giới hạn trên tồn tại thì nó được gọi là **đạo hàm phức** của f tại z, ký hiệu là $f'(z)$ hay $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)$.

Chú ý trong định nghĩa trên, h là một số phức và nó tiến đến 0 theo mọi hướng, (so sánh với các khái niệm đạo hàm có hướng trong giải tích hàm nhiều biến).

Hàm f được gọi là chỉnh hình trên Ω nếu f chỉnh hình tại mọi điểm trong Ω.

Tương tự hàm biến thực, bằng qui nạp, ta viết

$$f^{(k)} = (f^{k-1})'$$

và gọi là đạo hàm phức cấp k của f trên Ω.

Hàm f chỉnh hình tại z cũng được gọi là **khả vi phức** tại z. Ta thấy rằng, hàm f chỉnh hình tại $z_0 \in \Omega$ khi và chỉ khi tồn tại số phức a thoả

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - ah = h\psi(h)$$

với ψ là hàm xác định với h nhỏ và $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$. Từ công thức trên ta có hàm f liên tục tại z.

Ta thấy khái niệm chỉnh hình của hàm phức một biến tương tự với hàm một biến thực, tuy nhiên hàm chỉnh hình có nhiều tính chất mạnh hơn. Ví dụ, một hàm chỉnh hình sẽ có đạo hàm vô hạn cấp, trong khi đó hàm khả vi thực có thể không có đạo hàm cấp hai.

Ví dụ 1.2.3. Hàm $f(z) = \dfrac{1}{z}$ chỉnh hình trên mọi tập mở không chứa điểm 0 trong $\mathbb{C}$. và

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(z+h)z} = -\frac{1}{z^2}$$

Ví dụ 1.2.4. Hàm số $w = f(z) = \bar{z} = x - iy$ xác định trên $\Omega = \mathbb{C}$ không chỉnh hình tại mọi điểm $z \in \Omega$. Thật vậy, xét điểm $z_0 = x_0 + iy_0$ bất kỳ và cho số gia $h = h_1 + ih_2$. Khi đó ta có

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \overline{z_0 + h} - \overline{z_0} = \overline{h} = h_1 - ih_2.$$

i) Xét trường hợp $h_2 = 0$, $h = h_1 + i0$ (là một số thực), ta có $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h_1}{h_1} = 1$.

ii) Xét trường hợp $h_1 = 0$, $h = 0 + ih_2$ (là một số ảo), ta có $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-ih_2}{h_2} = -1$.

Như vậy không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$, hàm số f không có đạo hàm phức tại z với mọi z.

Do định nghĩa đạo hàm hàm phức hoàn toàn tương tự đạo hàm hàm thực, ta dễ dàng kiểm tra các công thức sau

Định lý 1.2.2. *Nếu $f(z)$ và $g(z)$ chỉnh tại z_0 thì ta có $(\alpha f + \beta g)(z)$, $(fg)(z)$, $\dfrac{f}{g}(z)$ $(g(z_0) \neq 0)$ cũng chỉnh hình tại z_0 với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ và*

i) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$;

ii) $(fg)' = f'g + fg'$;

iii) Nếu $g \neq 0$ thì

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

iv) Nếu $f : \Omega \to U$ và $g : U \to \mathbb{C}$ là các hàm chỉnh hình, khi đó

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \quad \forall z \in \Omega$$

1.2.3.2 Điều kiện Cauchy-Riemann

Xét hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ chỉnh hình tại $z_0 = x_0 + iy_0$, $f(z) = f(x, y)$. Cho $h = h - 1 + ih_2 \in \mathbb{C}$, ta xét giới hạn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_1 + ih_2}.$$

Trước tiên ta xét h là thực, tương ứng $h = h_1 + ih_2$ với $h_2 = 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0); \end{aligned}$$

Tương tự, với h là thuần ảo, tương ứng với $h = h_1 + ih_2$ với $h_1 = 0$, ta có

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{ih_2} \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

Khi đó, f chỉnh hình tại z_0 thì

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Với $f = u + iv$, ta thấy u, v thoả hệ phương trình

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{và} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Hệ phương trình trên được gọi là phương trình Cauchy - Riemann (điều kiện Cauchy - Riemann). Đây chính là **điều kiện cần** để một hàm phức chỉnh hình.

Ta đã biết

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{và} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp, ta có hai toán tử sau

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{và} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Bổ đề 1.2.1. Nếu $f = u + iv$ chỉnh hình tại z_0 thì

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

Chứng minh. Ta dễ dàng tính ra

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Từ điều kiện Cauchy - Riemann, ta có $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. □

Định lý 1.2.3 (Điều kiện đủ)**.** *Xét hàm biến phức $f = u + iv$ trên miền $\Omega \subset \mathbb{C}$. Nếu u, v là các hàm khả vi, liên tục và thoả điều kiện Cauchy-Riemann trên Ω, thì f chỉnh hình trên Ω và $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}$*

Chứng minh. Ta có $u(x, y), v(x, y)$ là các hàm khả vi, liên tục, do đó

$$u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2 + |h|\psi_1(h),$$

và

$$v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2 + |h|\psi_2(h),$$

trong đó $h = h_1 + ih_2$ và $\psi_i(h) \to 0$ khi $|h| \to 0$. Cộng hai phương trình trên và áp dụng điều kiện Cauchy - Riemann, với $\psi(h) = \psi_1 + i\psi_2$, ta có

$$\begin{aligned}f(z+h) - f(z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2\right) + |h|\psi(h) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)h_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)h_2 + |h|\psi(h) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)h_1 + i\left(-i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)h_2 + |h|\psi(h) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1 + ih_2) + |h|\psi(h).\end{aligned}$$

Vì $\psi(h) \to 0$ khi $h \to 0$, ta có f chỉnh hình, và

$$f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

□

1.2.4 Chuỗi luỹ thừa

Tương tự đối với hàm thực, chuỗi luỹ thừa phức có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}. \tag{*}$$

Để kiểm tra sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi này, ta kiểm tra

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n.$$

Ta thấy rằng, nếu chuỗi (∗) hội tụ tuyệt đối tại z_0 thì nó sẽ hội tụ tuyệt đối với mọi z thuộc đĩa $|z| \leq |z_0|$. Ta chứng minh được rằng: luôn tồn tại một đĩa mở mà trên đó chuỗi luỹ thừa hội tụ tuyệt đối.

Định lý 1.2.4. *Cho chuỗi luỹ thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, tồn tại* $0 \leq R \leq \infty$ *sao cho*

i) Nếu $|z| < R$ *thì chuỗi hội tụ tuyệt đối;*

ii) Nếu $|z| > R$ *thì chuỗi phân kỳ.*

Số thực R *được cho bởi công thức Hadamard*

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

và ta xem $1/0 = \infty$ *và* $1/\infty = 0$.

Số R được gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi luỹ thừa và miền $|z| < R$ được gọi là **đĩa hội tụ**.

1.2.5 Định nghĩa các hàm sơ cấp

1.2.5.1 Hàm sơ cấp

1. $f(z) = az + b$ — hàm nguyên tuyến tính
2. $f(z) = z^n$ — hàm luỹ thừa
3. $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ — hàm phân tuyến tính
4. $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \dfrac{a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots b_m z^m}$ — hàm hữu tỉ

Dễ dàng thấy ba hàm đầu tiên là trường hợp đặc biệt của hàm thứ tư.

1.2.5.2 Hàm mũ, hàm lượng giác, hàm hyperbolic

Trong giải tích thực, ta xây dựng các hàm sau theo chuỗi số

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

2. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!} x^{2n}$

4. $\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

5. $\cosh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} x^{2n}$

Các chuỗi số trên hội tụ với mọi số thực x, theo định lý Abel, nếu ta thay x bằng số phức z bất kỳ, ta cũng thu được chuỗi hội tụ. Từ đó ta định nghĩa các hàm trên đối với số phức z

1. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

2. $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

3. $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!} z^{2n}$

4. $\sinh z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

5. $\cosh z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n!} z^{2n}$

Tính chất

1. $e^z e^w = e^{z+w}$

2. $$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\ &= \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

   Tương tự ta có $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$.
   Do đó

3. $\begin{cases} \cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2} \\ \sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i} \end{cases}$.

   Tương tự ta có

4. $\begin{cases} \cosh z = \dfrac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} \\ \sinh z = \dfrac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} \end{cases}$

5. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y)$

   Ta thấy: hàm e^z tuần hoàn theo chu kỳ $2i\pi$, hàm $\sin z$, $\cos z$ tuần hoàn theo chu kỳ 2π.

$$|e^z| = e^x \quad \text{và} \quad \arg(e^z) = y + 2n\pi$$

6. Các công thức của hàm lượng giác

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

   Từ đó suy ra

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z \quad \cos 2 = \cos^2 z - \sin^2 z$$
$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \quad \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

7. Từ công thức 3., 4. ta có

$$\sin(iy) = i\sinh(y) \quad \text{và} \quad \cos(iy) = \cosh y$$

   Áp dụng công thức 6,

$$\sin(z) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y;$$
$$\cos(z) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y;$$

   từ trên ta có

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

1.2.5.3 Hàm logarith

Cho $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Số phức w được gọi là logarit (cơ số e) của $z \neq 0$ nếu $e^w = z$. Với $w = u + iv$, và $\varphi = \arg z$ ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^w = z &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \mathrm{e}^u(\cos v + i\sin v) &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{aligned}$$

do đó

$$\begin{cases} u = \ln|z| \\ v = \varphi + 2k\pi \qquad \text{với } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy

$$w = \ln|z| + i\arg(z) \quad (k \in \mathbb{Z}) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z) + k2\pi.$$

Với $\mathrm{Arg}(z) \in arg(z)$ và $-\pi < Arg(z) \leq \pi$. Ta thấy $w = \ln(z)$ là hàm vô số trị, ứng với 1 giá trị k, ta có một nhánh của hàm logarit.

Với $k = 0$, ta được nhánh chính, kí hiệu là $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$.

Từ đó ta có $\ln z = \mathrm{Ln}z + 2ik\pi$.

1.2.5.4 Hàm luỹ thừa phức

Xét $z \neq 0$ và c là số phức bất kỳ. Khi đó hàm z^c được định nghĩa bởi

$$z^c = e^{c\ln z}$$

với $\ln z$ là hàm đa trị.

Ví dụ 1.2.5. Tính i^{-2i}.

ta có

$$\ln i = \ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad \text{với } n \in \mathbb{Z}.$$

Do đó,

$$i^{-2i} = \exp(-2i\ln i) = \exp\left[(4n+1)\pi\right]$$

Ta thấy rằng i^{-2i} là một số thực.

1.2.5.5 Hàm lượng giác ngược

1. $\arcsin z = -i\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$
2. $\arccos z = \dfrac{i}{2}\ln\dfrac{i + z}{i - z}$
3. $\mathrm{arccosh}z = \ln(z + \sqrt{z - 1})$
4. $\mathrm{arcsinh}z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$
5. $\mathrm{arctanh}z = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + z}{1 - z}$

1.2.5.6 Hàm đa trị và đạo hàm hàm đa trị

Xét một số phức khác $z = re^{i\varphi}$, $\varphi = \arg(z)$ là một trong các giá trị $\varphi = \phi(z) + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ với $\phi = \mathrm{Arg}(z)$. Do đó,

$$\log z = \log r + i(\phi + 2n\pi) = \log r + i\varphi.$$

Xét α là số thực bất kỳ và giới hạn giá trị của φ sao cho $\alpha < \varphi < \alpha + 2\pi$, khi đó

$$\log z = u + iv = \log r + i\varphi \quad \text{với } r > 0, \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi$$

là một hàm đơn trị, liên tục. Ta dễ dàng kiểm tra được điều kiện Cauchy - Riemann trong toạ độ cực

$$ru_r = v_\varphi \quad u_\varphi = -rv_r$$

Do đó $\log z$ chỉnh hình

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log z = e^{-i\varphi}(u_r + iu_r) = e^{-i\varphi}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{z}$$

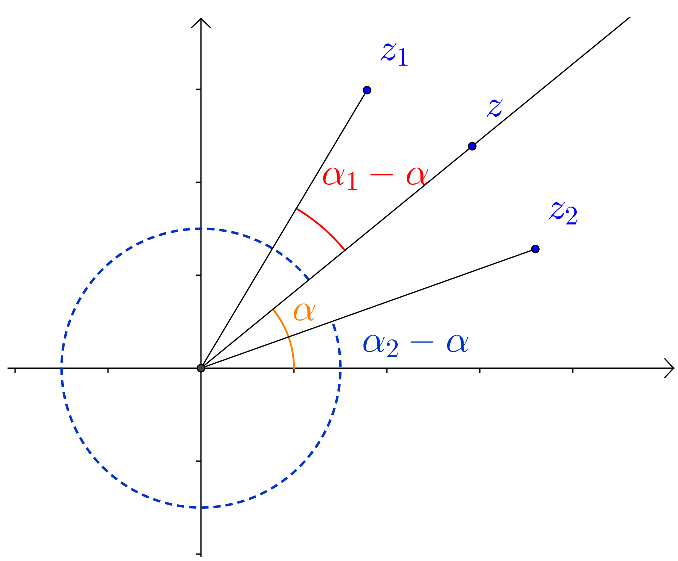
Vậy ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log z = \frac{1}{z} \qquad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi)$$

và đặc biệt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Log} z = \frac{1}{z} \qquad (|z| > 0, -\pi < \arg z < \pi)$$

Tại $\arg z = \alpha$ (một tia trong mặt phẳng phức), $\log z$ không liên tục tại đây. Thật vậy, xét điểm z nằm trên tia này, các điểm tuỳ ý quanh z, có những điểm z_1 để $v(z_1)$ gần α, và có những điểm z_2 để $v(z_2)$ gần $\alpha + 2\pi$, do đó $\log(z)$ không liên tục trên tia $\arg z = \alpha$. Do đó *log*(z) không có đạo hàm phức tại đây.



Định nghĩa 1.2.2. Một nhánh của hàm đa trị f là hàm đơn trị F sao cho nó khả tích trong một miền xác định của z và $F(z)$ là một giá trị của f.

Ví dụ 1.2.6. $F(z) = \text{Log}z = \log r + i\phi$, $-\pi < \phi < \pi$ là một nhánh của của hàm $f = \log z$ và được gọi là nhánh chính của $\log z$.

Khi xét nhánh chính Log$z$, ta có

$$\text{Log}(i^3) = \text{Log}(-i) = \log 1 - i\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}i$$

và

$$3\text{Log}i = 3\left(\log 1 + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}i$$

do đó

$$\text{Log}(i^3) \neq 3\text{Log}i$$

1.2.5.7 Đạo hàm phức các hàm sơ cấp

1. $(z^s)' = sz^{s-1}$, với s là số phức bất kỳ;
2. $(e^z)' = e^z$
3. $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$
4. $(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z$
5. $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$

Chương 2

Tích phân

2.1 Tích phân đường

Đường cong tham số C là hàm $z(t)$ từ một đoạn đóng $[a, b] \subset \mathbb{R}$ vào mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Ta nói rằng, đường cong là trơn nếu $z'(t)$ tồn tại và liên tục trên $[a, b]$, đồng thời $z'(t) \neq 0$ với $t \in (a, b)$. Tương tự, đường cong được gọi là trơn từng khúc nếu $z(t)$ liên tục trên $[a, b]$ và tồn tại

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

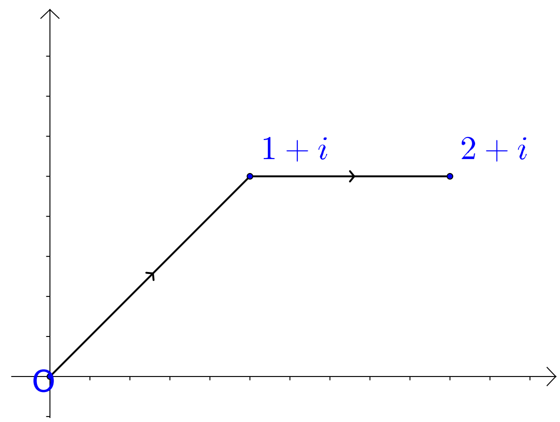
với $z(t)$ trơn trên $[a_k, a_{k+1}]$.

Đường cong C được gọi là đường cong đơn nếu nó không tự cắt, tức là $z(t_1) \neq z(t_2)$ với $z_1 \neq z_2$. Nếu đường cong C là đơn trừ điểm đầu và cuối z_a, z_b thì ta nói C là đường cong đơn đóng. Trên đường cong C đơn đóng (bao quanh miền Ω), ta xét chiều dương trên đường cong C là chiều mà khi di chuyển trên đó, miền Ω luôn nằm bên trái (di chuyển theo chiều ngược chiều kim đồng hồ).

Ví dụ 2.1.1. Đường gấp khúc

$$z = \begin{cases} x + ix & 0 \leq x \leq 1 \\ x + i & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

chứa các đoạn thẳng từ 0 tới $1 + i$, sau đó từ $1 + i$ tới $2 + i$. Đây là một đường cong đơn

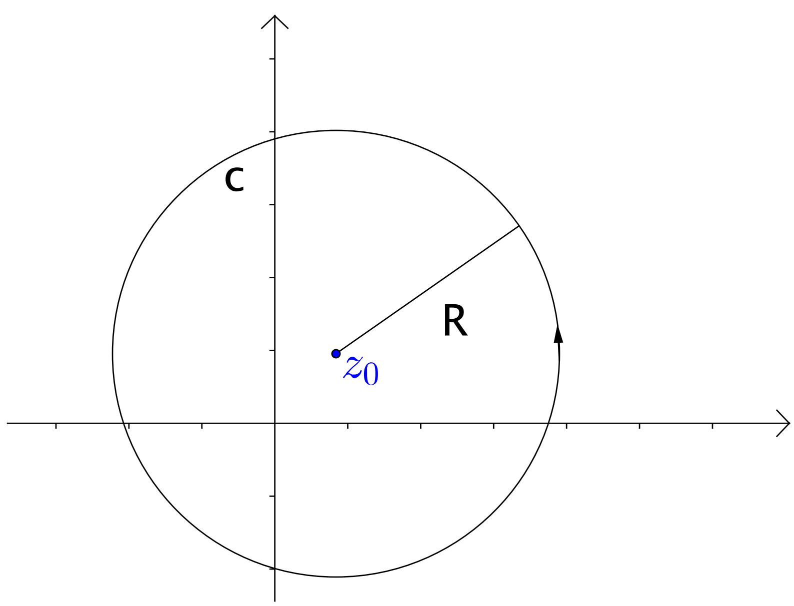


Ví dụ 2.1.2. Hình tròn tâm z_0, bán kính R theo chiều dương

$$z = z_0 + Re^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

và theo chiều âm

$$z = z_0 + Re^{-i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$



Cho đường cong $C \subset \mathbb{C}$ được tham số bởi $z : [a, b] \to \mathbb{C}$, và f là hàm số liên tục trên C, ta định nghĩa **tích phân của hàm f trên C** bởi

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Nếu C là đường cong trơn từng khúc, khi đó tích phân f trên C là tổng của tích phân hàm f trên các đoạn trơn C

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+i}} f(z(t))z'(t)dt$$

Từ công thức trên, ta có **độ dài** của đường cong C nối hai điểm A, B cho bởi công thức

$$l_C = \int_a^b |z'(t)|dt$$

Bổ đề 2.1.1. Tích phân của hàm liên tục trên một đường cong C có các tính chất sau

1. Tính tuyến tính, với $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\int_C (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz = \alpha \int_C f(z)dz + \beta \int_C g(z)dz$$

2. Nếu C^- là đường cong C với chiều ngược lại, thì

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

3. Ta có bất đẳng thức sau

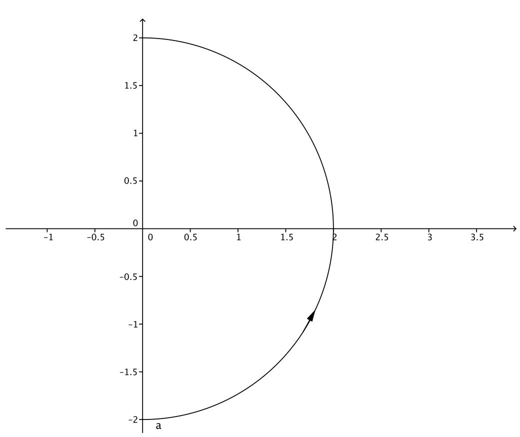
$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \sup_{z \in C} |f(z)|.l_C$$

với l_C là chiều dài của đường cong C

Ví dụ 2.1.3. Tính tích phân

$$I = \int_C \bar{z} dz$$

trên đường cong C là nửa phải của đường tròn tâm tại gốc toạ độ, bán kính 2 từ $z_1 = -2i$ đến $z_2 = 2i$.



Phương trình tham số của đường cong C

$$z = 2e^{i\varphi} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{2e^{i\varphi}}(2e^{i\varphi})' d\varphi \\ &= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\varphi}(ie^{i\varphi}) d\varphi \\ &= 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \boxed{4\pi i}. \end{aligned}$$

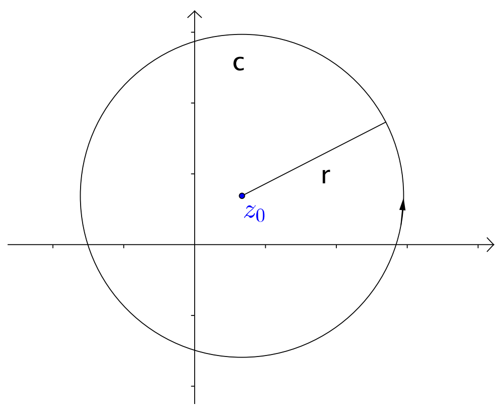
Từ tích phân trên, chú ý rằng $z\bar{z} = |z|^2 = 4$, do đó

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi i.$$

Ví dụ 2.1.4. Tính tích phân

$$I_n = \int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$$

trên đường cong C là đường tròn tâm tại z_0, bán kính r theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.



Phương trình tham số của đường cong C

$$z = z_0 + re^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Do đó

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} r^{-n} e^{-in\varphi} (re^{i\varphi})' d\varphi \\ &= ir^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{-i(1-n)\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Với $n = 1$, ta có

$$\boxed{I_1 = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.}$$

Với $n \neq 1$, ta có

$$I_n = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} \mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi} (\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) d\varphi = \boxed{0}.$$

vì $(\int_0^{2\pi} cos(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0)$.
Vậy ta có

$$\boxed{\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}}$$

Định nghĩa 2.1.1. Xét f là hàm số liên tục trên miền Ω, một **nguyên hàm** của f trên Ω là hàm chỉnh hình $F(z)$ sao cho $F'(z) = f(z)$ với $z \in \Omega$.

Định lý 2.1.1. *Cho hàm liên tục f trên Ω có nguyên hàm F, C là một đường cong trong Ω có điểm đầu là z_1, điểm cuối là z_2, khi đó*

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Chứng minh. Xét C là một đường cong trơn có phương trình tham số $z(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ với $z(a) = z_1$, $z(b)$, do đó

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\
&= \int_a^b F'(z(t))z'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))dt \\
&= F(z(b)) - F(z(a)).
\end{aligned}$$

Tương tự với C là đường cong trơn từng khúc, ta cũng có

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \sum_{k=0}^{n-1} F(z(a_{k+1})) - F(z(a_k)) \\
&= F(z(a_n)) - F(z(a_0)) \\
&= F(z(b)) - F(z(a)).
\end{aligned}$$

□

Bổ đề 2.1.2. Nếu C là đường cong đóng trong tập mở Ω và f là hàm liên tục có nguyên hàm F trên Ω, khi đó

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Ví dụ 2.1.5.

1. Hàm $f(z) = z^2$ có nguyên hàm $F(z) = z^3/3$ trên $\mathbb{C}$, do đó

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{2}{3}(-1+i)$$

   với mọi đường cong từ $z = 0$ đến $z = 1 + i$.

2. Hàm $f(z) = 1/z^2$ liên tục trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, có nguyên hàm $F(z) = -1/z$ trên miền $|z| > 0$. Do đó

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0;$$

   với C là đường tròn theo hướng dương $z = 2e^{i\varphi}$, $(0 \le \varphi \le \pi)$.

3. Hàm $f(z) = 1/z$ liên tục trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Xét C là đường tròn như trong ví dụ 2. Ta có, trên mỗi nhánh $\alpha < \varphi < \alpha + 2\pi$, hàm $F = \log z$ có đạo hàm phức là $1/z$. Tuy nhiên xét trên giao điểm $\varphi = \alpha$ và đường tròn C, tại đây $\log z$ không liên tục do đó F không chỉnh hình trên C.

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Hệ quả 2.1.1. Nếu f là hàm chỉnh hình trên miền liên thông Ω và $f' = 0$ thì f là hàm hằng.

2.2 Lý thuyết Cauchy về tích phân hàm chỉnh hình

Xét hàm f có nguyên hàm trên một tập mở Ω trong $\mathbb{C}$, khi đó tích phân hàm f trên đường cong đóng bằng 0.

Xét C là đương cong đơn, đóng tham số bởi $z = z(t), \quad (a \leq t \leq b)$, theo chiều dương. Giả sử f chỉnh hình tại mọi điểm trên C. Khi đó

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt.$$

Với $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ và $z(t) = x(t) + iv(t)$,

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (ux' - vy')dt + i\int_a^b (vx' + uy')dt.$$

Theo tích phân hàm thực hai biến, ta có

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \tag{*}$$

(trong biểu diễn trên, C không cần là đường cong đóng.)

Ta thấy, phần thực và phần ảo của tích phân trên là các tích phân đường loại hai.

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Giả sử P và Q có các đạo hàm riêng bậc 1 và C là đường cong đơn đóng bao quanh miền D, khi đó theo định lý Green

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dA.$$

Áp dụng định lý Green vào $(*)$

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)\\ &= \iint_\Omega (-v_x - u_x)dA + i\iint_\Omega (u_x - v_y)dA.\end{aligned}$$

Vì f chỉnh hình trên Ω, theo điều kiện Cauchy - Riemann

$$u_x = v_y \quad \text{và} \quad u_y = -v_x;$$

do đó ta có: nếu f chỉnh hình trên Ω và f' **liên tục trên miền này**, khi đó

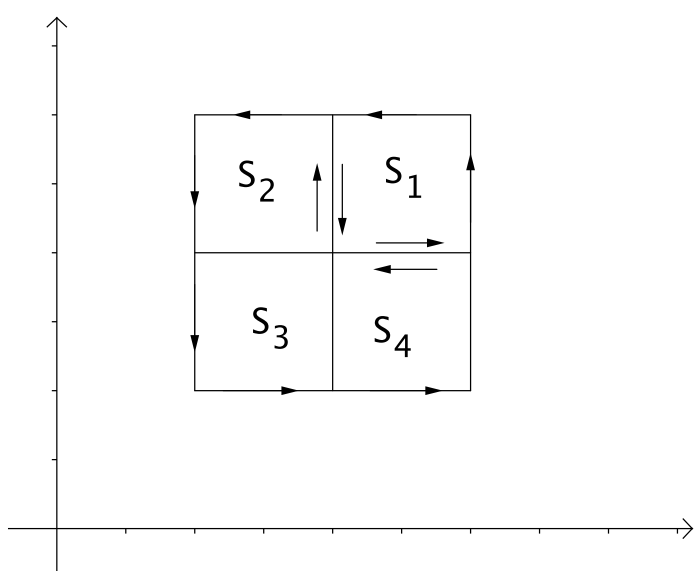
$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Trong định lý sau, chúng ta bỏ qua điều kiện liên tục của f' trên miền Ω.

Định lý 2.2.1 (Cauchy - Gaursat)**.** *Nếu f là hàm chỉnh hình tại mọi điểm trong miền giới hạn bởi đường cong đơn đóng C thì*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Chứng minh. Ta chứng mình định lý trên trong trường hợp đơn giản, với C là cạnh của hình vuông S^0 có độ dài cạnh là d_0.



Đầu tiên, ta chia hình vuông S^0 thành 4 hình vuông bằng nhau $S_1^1, \ldots, S_4^1$ và thêm các đường tích phân theo các hướng ngược chiều nhau trên các cạnh như hình trên. Khi đó ta có

$$\int_{S^0} f(z)dz = \int_{S_i^1} f(z)dz + \int_{S_2^1} f(z)dz + \int_{S_3^1} f(z)dz + \int_{S_4^1} f(z)dz$$

Sẽ tồn tại một hình vuông S_j^1 sao cho

$$\left|\int_{S_0} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{S_j^1} f(z)dz\right|.$$

Ta chọn hình vuông S_j^1 thoả bất đẳng thức trên, và đổi tên thành S^1. Ta lặp lại bước trên đối với hình vuông S^1, sau n bước ta tìm được chuỗi hình vuông $S^0, S^1, \ldots, S^n$ có tính chất

$$\left|\int_{S^0} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{T^n} f(z)dz\right|$$

đồng thời cạnh của các hình vuông trên thoả

$$d_n = 2^{-n} d_0.$$

Ta thấy chuỗi hình vuông $S^1 \supset S^2 \supset \ldots \supset S^n \supset \ldots$ có bán kính dần tới 0. Tồn tại duy nhất một điểm z_0 sao cho nó nằm trong tất cả các hình vuông trên. Do f là chỉnh hình (nên nó khả vi), ta có

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$$

□