

ỨNG DỤNG CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng



Xét phương trình vi phân với hàm phải tìm là $y(t)$ cùng với các điều kiện ban đầu. Lấy phép biến đổi Laplace cả 2 vế của phương trình đã cho.

Phương trình mới chứa hàm cần tìm là $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ **không phải** là phương trình vi phân. Giải phương trình này tìm $Y(s)$, sau đó dùng phép biến đổi Laplace ngược tìm lại hàm $y(t)$.

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

Ví dụ

Giải phương trình $y'(t) + 2y(t) = 1$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 4$

Dùng phép biến đổi Laplace lên 2 vế của phương trình, ta được

$$\mathcal{L}\{y'(t) + 2y(t)\} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$\Rightarrow [sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{s} + 4}{s + 2} = \frac{4s + 1}{s(s + 2)} = \frac{1}{2s} + \frac{7}{2(s + 2)}$$

Dùng phép biến đổi Laplace ngược tìm lại nghiệm $y(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}e^{-2t}$$

Ví dụ

Giải phương trình $y''(t) + 4y(t) = 9t$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 0, y'(0) = 7$

Dùng phép biến đổi Laplace lên 2 vế của phương trình, ta được

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 4y(t)\} = \mathcal{L}\{9t\}$$

$$\Rightarrow [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 4Y(s) = \frac{9}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{9 + 7s^2}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{9}{4s^2} + \frac{19}{4(s^2 + 2^2)}$$

Dùng phép biến đổi Laplace ngược tìm lại nghiệm $y(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{9}{4}t + \frac{19}{8}\sin(2t)$$

Bài 1

Giải phương trình vi phân sau bằng phép biến đổi Laplace

$$y''(t) + 4y(t) = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2$$

Đáp số.

$$Y(s) = \frac{2s + 2}{s^2 + 4} \Rightarrow y(t) = \sin(2t) + 2 \cos(2t)$$

Bài 2

Giải phương trình vi phân sau bằng phép biến đổi Laplace

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + 12e^{-t},$$

$$y(0) = 6, y'(0) = -1$$

Đáp số.

$$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s-2} \Rightarrow$$
$$y(t) = 3 + 2t + 2e^{-t} + 3e^t - 2e^{2t}$$

Ví dụ

Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'(t) - 2x(t) + 3y(t) = 0 \\ y'(t) + 2x(t) - y(t) = 0 \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 8, y(0) = 3$

Dùng phép biến đổi Laplace lên 2 vế của phương trình, ta được

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'(t) - 2x(t) + 3y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \\ \mathcal{L}\{y'(t) + 2x(t) - y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (sX(s) - x(0)) - 2X(s) + 3Y(s) = 0 \\ (sY(s) - y(0)) + 2X(s) - Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{8s - 17}{s^2 - 3s - 4} = \frac{5}{s + 1} + \frac{3}{s - 4} \\ Y(s) = \frac{3s - 22}{s^2 - 3s - 4} = \frac{5}{s + 1} - \frac{2}{s - 4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{cases}$$

Bài 1

Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'(t) - 2y(t) = 1 \\ y'(t) + 2x(t) = t \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 0, y(0) = 0$

Đáp số.

$$X(s) = \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2(s^2 + 4)} \Rightarrow x(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4},$$

$$Y(s) = -\frac{1}{4s} + \frac{s}{4(s^2 + 4)} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4},$$

THANK YOU FOR ATTENTION