

III. Ngữ nghĩa của luận lý mệnh đề

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Gán thực trị^[*]

- Môi trường (Environments)

Gán thực trị là gán giá trị T (đúng) hoặc F (sai) cho mỗi biến mệnh đề.

Những nhà khoa học máy tính gọi việc gán giá trị cho các biến là một môi trường.

cuu duong than cong . com

[*] Sept. 10, 2007 Copyright © Albert R. Meyer, 2007. All rights reserved. lec 2M.17



Gán thực trị

Thí dụ :

công thức $P \rightarrow (Q \vee R)$

Môi trường ν gán các biến P, Q, R :

$$\nu(P) = T, \nu(Q) = T, \nu(R) = F.$$

Môi trường μ gán các biến P, Q, R :

$$\mu(P) = F, \mu(Q) = T, \mu(R) = F.$$



Diễn dịch

- *Diễn dịch* của *một* công thức là thế giới thực cùng với cách nhúng từng yếu tố của công thức vào thế giới thực đó.
- Nói cách khác diễn dịch là “gán” cho công thức một ý nghĩa của thế giới thực mà công thức được nhúng vào.

cuu duong than cong . com



Diễn dịch

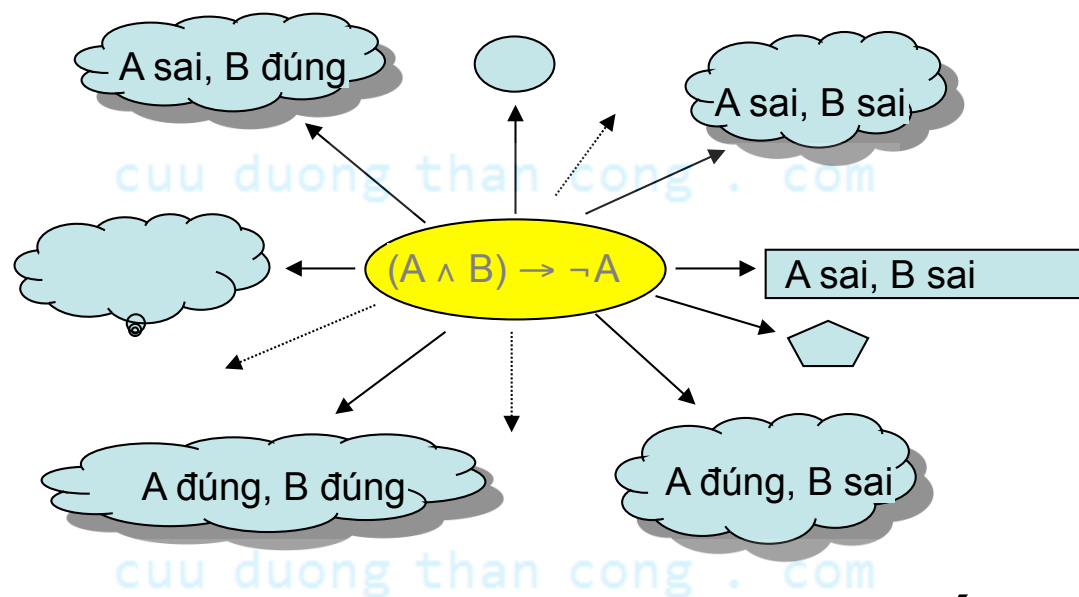
- Có tác giả định nghĩa diễn dịch là cách đánh giá công thức và được đặc trưng bằng hàm đánh giá.
- Một số tài liệu định nghĩa khái niệm diễn dịch của *một lớp* các công thức thay vì của *một* công thức.

cuu duong than cong . com



Diễn dịch

- Diễn dịch trong LLMĐ có hữu hạn trường hợp đánh giá.



- Số trường hợp tương ứng với với số dòng của bảng thực trị.

Diễn dịch

- Có thể đặc trưng diễn dịch của một CT bằng 1 **hàm đánh giá** v trên các CTN có trong công thức.

Thí dụ :

Qui ước CT đúng có giá trị 1 và sai là 0.

Công thức $(P \wedge Q) \rightarrow R$ có diễn dịch I được đặc trưng bằng hàm đánh giá v như sau :

$$v(P) = 1, v(Q) = 0, v(R) = 1.$$

- Để tiện cho việc trình bày, còn sử dụng ký hiệu vF thay cho $v(F)$.



Thực trị của một công thức

- Nếu $vA = 1$, $vB = 0$ và $vC = 0$ thì
 $v((A \rightarrow B) \wedge (C \vee \neg A))$ là đúng hay sai ?.
Nếu $vA = 0$, $vB = 1$ và $vC = 0$ thì
 $v((\neg A \vee B) \rightarrow \neg C)$ là đúng hay sai ?.
Nếu $vA = 0$, $vB = 1$, $vC = 0$ và $vD = 1$ thì
 $v(((A \vee C) \wedge B) \rightarrow \neg D)$ là đúng hay sai.
- ↳ Cần phải xác định qui tắc đánh giá của các toán tử : $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$.



Bảng thực trị

- P, Q là các công thức nguyên.

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1

- Tất cả diễn dịch của một công thức trong LLMĐ tương ứng với các dòng của bảng thực trị.



Bảng thực trị

- $P \rightarrow Q$, tại sao đ $\rightarrow$ đ là đ, đ $\rightarrow$ s là s,
s $\rightarrow$ đ là đ, s $\rightarrow$ s là đ ???.

Thí dụ :

P = Trời mưa, Q = Vũ mang dù.

Tình trạng 1 : Trời mưa và Vũ mang dù.

Tình trạng 2 : Trời mưa và Vũ không mang dù.

Tình trạng 3 : Trời không mưa và Vũ mang dù.

Tình trạng 4 : Trời khg mưa và Vũ khg mangdù.

Nguyên tắc không vi phạm.



Bảng thực trị

- Một cách định nghĩa khác, bảng thực trị là một hàm trên tập 2 phần tử đúng, sai ($\{đ, s\}$).
- Các toán tử luận lý là các hàm :

$$\neg : \{đ, s\} \rightarrow \{đ, s\}$$

$$\wedge : \{đ, s\} \times \{đ, s\} \rightarrow \{đ, s\}$$

$$\vee : \{đ, s\} \times \{đ, s\} \rightarrow \{đ, s\}$$

$$\rightarrow : \{đ, s\} \times \{đ, s\} \rightarrow \{đ, s\}$$



Thực trị của một công thức

Thí dụ :

Tính thực trị của công thức $(X \rightarrow (\neg Y \vee Z)) \wedge \neg X$

X	Y	Z	$\neg Y \vee Z$	$X \rightarrow (\neg Y \vee Z)$	CT
1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1



Thủ tục số học

- Chuyển công thức vào $\langle \mathbb{Z}_2, +, . \rangle$ để tính thực trị.

$$v(P \vee Q) = vP + vQ + vPvQ \quad \text{trong } \mathbb{Z}_2,$$

$$v(P \wedge Q) = vPvQ \quad \text{trong } \mathbb{Z}_2,$$

$$v\neg P = 1 + vP \quad \text{trong } \mathbb{Z}_2,$$

$$v(P \rightarrow Q) = 1 + vP + vPvQ \quad \text{trong } \mathbb{Z}_2.$$

- Hệ quả :

$$vP + vP = 0.$$

$$vP.vP = vP.$$

$$v\neg P.vP = 0.$$



Thực trị của một công thức

Thí dụ : tính thực trị của công thức $(X \rightarrow (\neg Y \vee Z)) \wedge \neg X$

$$v((X \rightarrow (\neg Y \vee Z)) \wedge \neg X)$$

$$= v(X \rightarrow (\neg Y \vee Z))v(\neg X)$$

$$= (1 + vX + vXv(\neg Y \vee Z))v(\neg X)$$

$$= (1 + vX + vX.(v(\neg Y) + vZ + v(\neg Y)vZ))v(\neg X)$$

$$= (1 + vX + vXv(\neg Y) + vXvZ + vXv(\neg Y)vZ)v(\neg X)$$

$$= v(\neg X) + v(\neg X)vX + v(\neg X)vXv(\neg Y) + v(\neg X)vXvZ + v(\neg X)vXv(\neg Y)vZ$$

$$= v(\neg X) + 0 + 0.v(\neg Y) + 0.vZ + 0.v(\neg Y)vZ$$

$$= v(\neg X) = 1 + vX.$$



Thủ tục số học

- Một phó sản của phương pháp số học là loại bỏ khỏi những công thức nguyên không ảnh hưởng đến việc tính thực trị.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

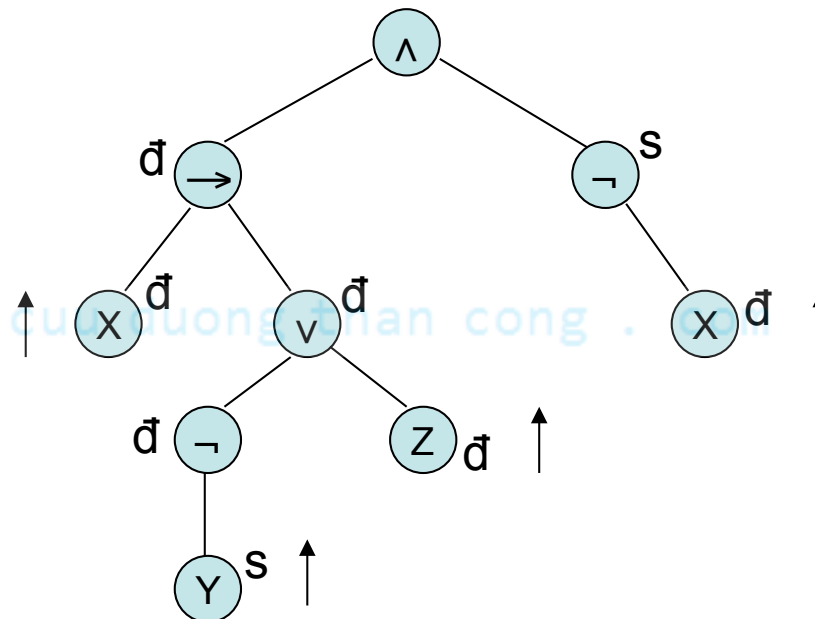


Cây phân tích

- Đánh giá công thức nhờ cây phân tích.

Thí dụ :

Đánh giá công thức $(X \rightarrow (\neg Y \vee Z)) \wedge \neg X$, với X, Y, Z lần lượt có giá trị đ, s, đ.



Phân loại công thức

- I là diễn dịch của công thức X .

$$X \text{ hằng đúng} \Leftrightarrow (\forall I) \nu X = 1.$$

$$X \text{ hằng sai} \Leftrightarrow (\forall I) \nu X = 0.$$

$$X \text{ khả đúng} \Leftrightarrow (\exists I) \nu X = 1.$$

$$X \text{ khả sai} \Leftrightarrow (\exists I) \nu X = 0.$$



Phân loại công thức

Nhận xét :

- Phủ định của một công thức hằng đúng là công thức hằng sai.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Công thức tương đương

- Công thức X và Y **tương đương** nếu đồng bộ trong việc đánh giá thực trị đối với mọi diễn dịch.

Lấy diễn dịch I của X và Y.

Nếu X đúng trong I thì Y cũng đúng trong I và ngược lại.

Nếu X sai trong I thì Y cũng sai trong I và ngược lại.

Ký hiệu $X = Y$.

- Hai CT tương đương có cùng số CTN hay không?



Mô hình

- **Mô hình I** của công thức F là
diễn dịch I của F và
 $vF = 1$ trong I.

Chú ý :

Diễn dịch = interpretation, valuation (tiếng Anh).

Mô hình = model (tiếng Anh).

Một số tài liệu dùng từ model cho khái niệm diễn dịch.



Các công thức tương đương

$$1. \neg(\neg F) = F$$

$$2. F \leftrightarrow G = (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

$$3. F \rightarrow G = \neg F \vee G$$

$$4. F \rightarrow G = \neg G \rightarrow \neg F$$

$$5. \neg(F \vee G) = (\neg F) \wedge (\neg G) \quad (\text{DeMorgan})$$

$$6. \neg(F \wedge G) = (\neg F) \vee (\neg G) \quad (\text{DeMorgan})$$



Hằng đúng

- Tất cả các công thức sau là hằng đúng ngoại trừ công thức 1 là hằng sai.

1. $(F \wedge \neg F)$ hằng sai

2. $(F \vee \neg F)$

3. $F \rightarrow (F \vee G)$

4. $(F \wedge G) \rightarrow F$

5. $((F \rightarrow G) \wedge F) \rightarrow G$

6. $((F \rightarrow G) \wedge \neg G) \rightarrow \neg F$



Hằng đúng

- 7. $((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (F \rightarrow H)$ (tính truyền)
- 8. $((F \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow \neg G)) \rightarrow \neg F$ (phản chứng)
- 9. $(F \rightarrow G) \rightarrow ((F \vee H) \rightarrow (G \vee H))$
- 10. $(F \rightarrow G) \rightarrow ((F \wedge H) \rightarrow (G \wedge H))$
- 11. ...

cuu duong than cong . com



Hằng đúng

- Chứng minh $((F \rightarrow G) \wedge F) \rightarrow G$ hằng đúng
Lấy diễn dịch I,
 nếu F đúng trong I,
 nếu G đúng trong I, CT đúng trong I,
 nếu G sai trong I, CT đúng trong I,
 nếu F sai trong I,
 nếu G đúng trong I, CT đúng trong I,
 nếu G sai trong I, CT đúng trong I,
Vậy CT hằng đúng.

Lưỡng nguyên

- **Lưỡng nguyên** (literal) là CTN hoặc phủ định CTN.

Thí dụ :

A, B, C là các công thức nguyên.

A, B, C, $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$ là các lưỡng nguyên.

cuu duong than cong . com



Diễn dịch

- Diễn dịch được cho dưới **dạng tập hợp** các lượng nguyên.

Thay vì viết $\vee F_1 = \delta, \dots, \vee F_n = \delta$

cuu duong than cong . ($\delta = 1$ hoặc $\delta = 0$)

thì viết là $\{\text{sign}F_1, \dots, \text{sign}F_n\}$.

Nếu δ là 1 thì $\text{sign}F_i$ là F_i .

Nếu δ là 0 thì $\text{sign}F_i$ là $\neg F_i$.

cuu duong than cong . com



Diễn dịch

Thí dụ :

$$F = (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \vee \neg C)$$

Diễn dịch $I = \{A, B, C\}$ nghĩa là

$$\nu A = 1, \nu B = 1, \nu C = 1.$$

Diễn dịch $J = \{A, \neg B, \neg C\}$ nghĩa là

$$\nu A = 1, \nu B = 0, \nu C = 0.$$

Diễn dịch $K = \{\neg A, \neg B, \neg C\}$ nghĩa là

$$\nu A = 0, \nu B = 0, \nu C = 0.$$



Dạng chuẩn giao - CNF

- Conjunctive normal form (CNF) có dạng :
 $(P_1 \vee \dots \vee P_n)_1 \wedge \dots \wedge (Q_1 \vee \dots \vee Q_m)_p$, với $n, m, p \geq 1$,
và P_i, Q_i là các lư^ợng nguyên.

Thí dụ :

$$F = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q.$$

$$G = P \wedge Q \wedge (\neg R)$$

$$H = (P \vee R \vee \neg S)$$



Dạng chuẩn giao - CNF

- Các bước chuyển về dạng CNF

Thí dụ :

$$\begin{aligned} F &= (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \vee \neg A) \\ &= \neg(A \rightarrow \neg B) \vee (B \vee \neg A) \\ &= \neg(\neg A \vee \neg B) \vee (B \vee \neg A) \\ &= (A \wedge B) \vee (B \vee \neg A) \\ &= (A \vee (B \vee \neg A)) \wedge (B \vee (B \vee \neg A)) \\ &= (A \vee B \vee \neg A) \wedge (B \vee B \vee \neg A) \\ &= (B \vee \neg A) \end{aligned}$$



Dạng chuẩn giao - CNF

- CNF có thể được xây dựng từ bảng thực trị.

Thí dụ :

$$F = (A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$$

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

-----> $(\neg A \vee B)$

-----> $(A \vee \neg B)$

có CNF là $F = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

Dạng chuẩn giao - CNF

Thí dụ :

Công thức F có bảng thực trị :

A	B	C	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

→ $(\neg A \vee \neg B \vee C)$

→ $(\neg A \vee B \vee C)$

→ $(A \vee \neg B \vee C)$

có CNF là

$$F = (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$$



Dạng chuẩn giao - CNF

- Nhận xét :
 - ❖ Mọi công thức có thể chuyển về dạng CNF.
 - ❖ Dạng CNF không duy nhất.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Dạng chuẩn giao - CNF

- Nhận xét :

- ❖ $A, B, C, \dots$ là các CTN. Các F_i tương đương :

$$F_1 = A,$$

$$F_2 = A \wedge (A \vee B),$$

$$F_3 = A \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee C),$$

$$F_4 = A \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (A \vee D). \dots$$

- ❖ $\nu(F_1) = \nu(F_2) = \nu(F_3) = \nu(F_4).$

$$\nu(F_2) = \nu A (\nu A + \nu B + \nu A \nu B) = \nu A.$$



Mệnh đề

- Mỗi khối $(P_1 \vee \dots \vee P_n)_i$ của CNF được gọi là 1 mệnh đề.

Thí dụ :

$$F = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q$$

F có 3 mệnh đề : $(\neg P \vee R)$, $(Q \vee \neg S \vee T)$ và mệnh đề Q.

$H = (P \vee R \vee \neg S)$ có 1 mệnh đề là chính nó.



Mệnh đề

- Mệnh đề có 1 lượng nguyên được gọi là mệnh đề **đơn vị**.

Thí dụ :

$$F = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q$$

F có Q là mệnh đề đơn vị Q .

cuu duong than cong . com



Mệnh đề

- Mệnh đề **rỗng** là mệnh đề không có lượng nguyên nào.
- Nhận xét :
Với mọi công thức X ,
 $X \wedge \text{hđ} = X$ (hđ, công thức hằng đúng).
 $X \vee \text{hs} = X$ (hs, công thức hằng sai).
↳ Mệnh đề rỗng là công thức hằng sai.



Clausal form^[15]

- Dùng tập hợp để biểu diễn CNF.
- Một mệnh đề được biểu diễn thành tập hợp các literal nguyên.

Thí dụ : mệnh đề $(Q \vee \neg S \vee T)$ được biểu diễn là $\{Q, \neg S, T\}$

- CNF được biểu diễn như tập hợp các mệnh đề.

Thí dụ : $F = (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg S \vee T) \wedge Q$ được biểu diễn là $\{\{\neg P, R\}, \{Q, \neg S, T\}, \{Q\}\}$

Biểu diễn này được gọi là clausal form.



Dạng chuẩn hội - DNF

- Disjunctive normal form (DNF) đối ngẫu với CNF.

Thí dụ :

$$F = (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge \neg S \wedge T) \vee Q.$$

$$G = (P \wedge Q \wedge (\neg R))$$

$$H = P \vee R \vee \neg S$$



Bài toán SAT

- Một vấn đề quan trọng trong logic nói chung là diễn dịch nào làm cho công thức có giá trị đúng.
- Bài toán SAT (satisfiability problem) của luận lý mệnh đề được phát biểu một cách đơn giản theo ngôn ngữ bảng thực trị :
Làm thế nào gán giá trị cho CTN trong công thức để công thức có giá trị đúng. ^[15]
- Nói cách khác là công thức có khả năng đúng hay không.



Bài toán SAT

- Vì “ X khả đúng $\Leftrightarrow \neg X$ không hằng đúng” nên bài toán SAT trở thành bài toán kiểm tra $\neg X$ không hằng đúng.
- Nếu $\neg X$ ở dạng chuẩn giao thì $\neg X$ hằng đúng khi các mệnh đề của CNF phải hằng đúng.
- Một mệnh đề hằng đúng khi có 2 lượng nguyên trái dấu.

cuu duong than cong . com



Bài toán SAT

- Tóm lại bài toán SAT (X khả đúng) gồm các bước :
 1. Chuyển $\neg X$ thành dạng chuẩn giao.
 2. Kiểm tra mỗi mệnh đề không chứa 2 lượng nguyên trái dấu :
 - a) Nếu có mệnh đề không chứa 2 lượng nguyên trái dấu thì X khả đúng.
 - b) Ngược lại X hằng đúng.



Dạng chuẩn giao - CNF

- CT (dạng CNF) là hằng đúng nếu tất cả mệnh đề chứa $\neg$ hoặc có 1 cặp lượng nguyên đổi dấu. Ngược lại, là khả sai (falsiable).
- CT (dạng DNF) là hằng sai nếu tất cả thành phần giao chứa $\perp$ hoặc có 1 cặp lượng nguyên đổi dấu. Ngược lại, là khả đúng (SATisfiable).

Nhận xét :

Biến đổi về dạng DNF (CNF) tốn kém cả về thời gian và không gian.

Dạng NNF^[*]

- Công thức ở dạng NNF(negation normal form) khi công thức không chứa toán tử $\rightarrow$:

1. Thay “ $\rightarrow$ ”

dùng $(X \rightarrow Y) = (\neg X \vee Y)$.

2. Khai triển toán tử $\neg$

dùng $\neg \neg X = X$,

dùng $\neg(X \vee Y) = (\neg X \wedge \neg Y)$

dùng $\neg(X \wedge Y) = (\neg X \vee \neg Y)$.

[*] Logic and Proof - Computer Science Tripos Part IB Michaelmas Term
Lawrence C Paulson - Computer Laboratory University of Cambridge lcp@cl.cam.ac.uk
@Nguyễn Thanh Sơn



Dạng NNF

Thí dụ :

$$F = (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \vee \neg A)$$

$$F = \neg(A \rightarrow \neg B) \vee (B \vee \neg A) \quad (\text{thay } \rightarrow)$$

$$F = \neg(\neg A \vee \neg B) \vee (B \vee \neg A) \quad (\text{thay } \rightarrow)$$

$$F = (A \wedge B) \vee (B \vee \neg A) \quad (\text{khai triển } \neg)$$

cuu duong than cong . com



Từ NNF đến CNF^[*]

- Đẩy $\vee$ vào trong, dùng
$$F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$
- Đơn giản hóa :
 - Xóa mệnh đề chứa 2 lượng nguyên trái dấu.
eg : $(F \vee G \vee \neg F) \wedge (H \vee K) = H \vee K$.
 - Xóa mệnh đề chứa mệnh đề khác.
eg : $(H \vee K \vee \neg F) \wedge (H \vee K) = H \vee K$.
 - Thay $(F \vee G) \wedge (\neg F \vee G)$ bằng G .

[*] Logic and Proof - Computer Science Tripos Part IB Michaelmas Term
Lawrence C Paulson - Computer Laboratory University of Cambridge lcp@cl.cam.ac.uk
@Nguyễn Thanh Sơn



Thuật toán CNF

- Function CNF (F)

Begin

case

F là nguyên tử : return F

$F = F_1 \wedge F_2$: return $\text{CNF}(F_1) \wedge \text{CNF}(F_2)$

$F = F_1 \vee F_2$: return $\text{Phb}(\text{CNF}(F_1), \text{CNF}(F_2))$

endcase

End



Thuật toán CNF

- Function PhB (F_1, F_2)

Begin

case

$F_1 = F_{11} \wedge F_{12} : \text{return PhB}(F_{11}, F_2) \wedge \text{Phb}(F_{12}, F_2)$

$F_2 = F_{21} \wedge F_{22} : \text{return PhB}(F_1, F_{21}) \wedge \text{Phb}(F_1, F_{22})$

otherwise (không có toán tử $\wedge$) : return $F_1 \vee F_2$

endcase

End

Thuật toán NNF

- Function NNF (F)

Begin

case

F là nguyên tử : return F

$F = \neg \neg F_1$: return NNF (F_1)

$F = F_1 \wedge F_2$: return NNF (F_1) $\wedge$ NNF (F_2)

$F = F_1 \vee F_2$: return NNF (F_1) $\vee$ NNF (F_2)

$F = \neg (F_1 \wedge F_2)$: return NNF ($\neg F_1$) $\wedge$ NNF ($\neg F_2$)

$F = \neg (F_1 \vee F_2)$: return NNF ($\neg F_1$) $\vee$ NNF ($\neg F_2$)

endcase

End



Thuật toán NO_ARROW

- Function NO_ARROW (F)

Begin

case

F là nguyên tử : return F

$F = \neg F_1$: return $\neg(\text{NO_ARROW}(F_1))$

$F = F_1 \wedge F_2$: return $\text{NO_ARROW}(F_1) \wedge \text{NO_ARROW}(F_2)$

$F = F_1 \vee F_2$: return $\text{NO_ARROW}(F_1) \vee \text{NO_ARROW}(F_2)$

$F = F_1 \rightarrow F_2$: return $\neg \text{NO_ARROW}(F_1) \vee \text{NO_ARROW}(F_2)$

endcase

End



Dạng CNF

Thí dụ :

$$F = (\neg A \wedge B \rightarrow A \wedge (C \rightarrow B))$$

$$F_1 = \text{NO_ARROW}(F)$$

$$= \neg(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg C \vee B))$$

$$F_2 = \text{NNF}(F_1)$$

$$= (A \vee \neg B) \vee (A \wedge (\neg C \vee B))$$

$$F_3 = \text{CNF}(F_2)$$

$$= (A \vee \neg B \vee A) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C \vee B)$$

$$F_3 = \text{CNF}(\text{NNF}(\text{NO_ARROW}(F)))$$



Dạng CNF

Thí dụ :

$$F = (\neg A \wedge B \rightarrow A \wedge (C \rightarrow B))$$

$$\text{CNF}(\text{NNF}(\text{NO_ARROW}(F)))$$

$$= (A \vee \neg B \vee A) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C \vee B)$$

Tuy nhiên, $(A \vee \neg B)$ cũng là một dạng CNF của F .

Kết quả của $\text{CNF}(\text{NNF}(\text{NO_ARROW}(F)))$ không chắc là tối ưu cho việc giải bài toán SAT.



Horn clause

- Mệnh đề Horn là mệnh đề chỉ có 1 literal dương (positive literal).

Thí dụ :

(A)

cuu duong than cong . com

$(A \vee \neg B)$

$(\neg C \vee D \vee \neg E)$

- Dạng Horn : giao của các mệnh đề Horn.

Thí dụ :

cuu duong than cong . com

$(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee D \vee \neg E)$



Horn clause

- Dạng Horn là giao các cấu trúc điều kiện (có hậu quả là một công thức nguyên và nguyên nhân là giao các công thức nguyên).

Thí dụ :

$$(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee D \vee \neg E)$$

thường được viết dưới dạng

$$(B \rightarrow A) \wedge ((C \wedge E) \rightarrow D)$$



Horn clause

- Dạng Horn được định nghĩa bằng văn phạm Backus Naur form :

$$F ::= \perp \mid \text{True} \mid A$$

$$G ::= F \mid F \wedge G$$

$$H ::= G \rightarrow F$$

$$K ::= H \mid H \wedge K$$

Chú thích :

$\perp$ là công thức hằng sai

True là công thức hằng đúng

A là công thức nguyên



Horn clause

Thí dụ :

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \perp) \wedge ((C \wedge E) \rightarrow D)$$

$$((A \wedge B \wedge C \wedge E) \rightarrow D) \wedge (\text{True} \rightarrow A)$$

Có thể loại trừ 2 dạng sau :

$\perp \rightarrow A$ và $(A \wedge B) \rightarrow \text{True}$ vì luôn luôn đúng,

cuu duong than cong . com



Horn clause & SAT

- Function HORN (F)

Begin

Đánh dấu (đd) tất cả $\neg$ có trong F.

while

có $((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow A)$ của F sao cho các A_i bị đd và A chưa bị đd, khi đó đd **mọi** A của F

endwhile

if $\perp$ bị đd then F hằng sai else F khả đúng

End



Horn clause & SAT

- Thí dụ :

HORN $((A \rightarrow \perp) \wedge (\check{T} \rightarrow A))$

Begin

$$(A \rightarrow \perp) \wedge (\check{T}^* \rightarrow A)$$

$$(\check{T}^* \rightarrow A) : (A^* \rightarrow \perp) \wedge (\check{T}^* \rightarrow A^*)$$

$$(A^* \rightarrow \perp) : (A^* \rightarrow \perp^*) \wedge (\check{T}^* \rightarrow A^*)$$

End

$\perp$ bị đánh dấu. Vậy công thức F hằng sai.



Horn clause & SAT

- Thí dụ :

$$F = ((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow A) \wedge ((A \wedge B \wedge C) \rightarrow D))$$

HORN (F)

Begin

cuuduongthancong.com

$$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A^* \rightarrow A) \wedge ((A \wedge B \wedge C) \rightarrow D)$$

$$(A^* \rightarrow B) \wedge (\neg A^* \rightarrow A^*) \wedge ((A^* \wedge B \wedge C) \rightarrow D)$$

$$(A^* \rightarrow B^*) \wedge (\neg A^* \rightarrow A^*) \wedge ((A^* \wedge B^* \wedge C) \rightarrow D)$$

cuuduongthancong.com

End

vậy công thức F khả đúng.



Horn clause & SAT

- Thí dụ :

HORN $((A \rightarrow B) \wedge ((C \wedge E) \rightarrow D) \wedge (\check{T} \rightarrow A) \wedge ((A \wedge B \wedge C \wedge E) \rightarrow D))$

Begin

$(A \rightarrow B) \wedge ((C \wedge E) \rightarrow D) \wedge (\check{T}^* \rightarrow A) \wedge ((A \wedge B \wedge C \wedge E) \rightarrow D)$

$(A^* \rightarrow B^*) \wedge ((C \wedge E) \rightarrow D) \wedge (\check{T}^* \rightarrow A^*) \wedge ((A^* \wedge B^* \wedge C \wedge E) \rightarrow D)$

End

vậy công thức khả đúng.



Hệ quả luận lý

- Nếu mọi mô hình của F cũng là mô hình của H thì H được gọi là hệ quả luận lý của F .

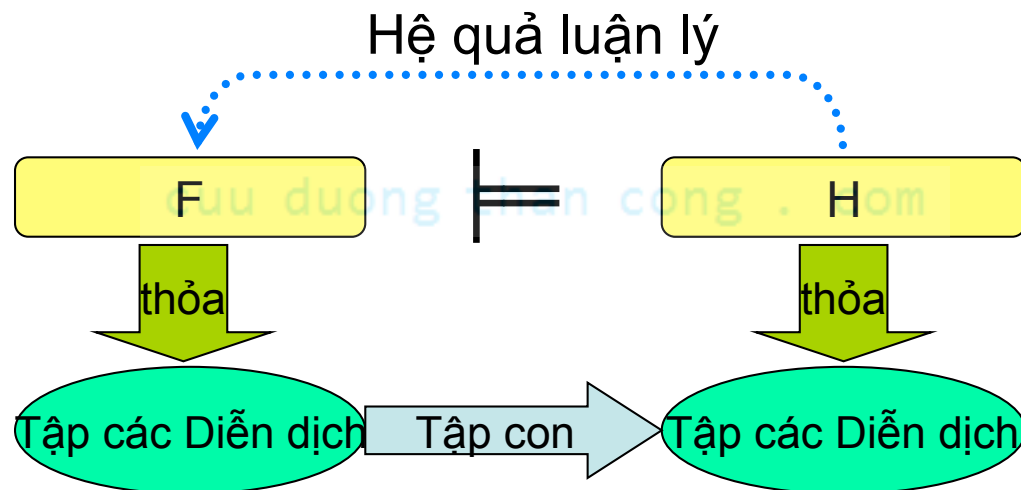
Ký hiệu $F \models H$.

- F là KB, được gọi là tiền đề và H được gọi là kết luận.
- Logical Consequence = Entailment
= Hệ quả luận lý (HQLL).



Hệ quả luận lý

- Để chứng minh H là hệ quả luận lý của F :
 - Liệt kê tất cả diễn dịch.
 - Chọn các diễn dịch là mô hình của F.
 - Kiểm tra xem các mô hình này có còn là mô hình của H hay không.



Hệ quả luận lý

Thí dụ :

$\{A, B\}$	$\models$	$A \vee B$
$\{A, B\}$	$\models$	$A \wedge B$
$\{A, B\}$	$\models$	$A \rightarrow B$
$\{A, A \vee B\}$	$\not\models$	$A \rightarrow B$
$\{A \vee B, A \wedge B\}$	$\models$	A
$\{A \vee B, A \wedge B\}$	$\models$	B
$\{A \vee B, A \wedge B\}$	$\models$	$A \rightarrow B$
$\{B, A \rightarrow B\}$	$\models$	$A \vee B$



Hệ quả luận lý

- Kiểm tra $X \rightarrow Y, X \models Y$.

X	Y	$X \rightarrow Y$	X	$\models$ Y
1	1	1	1	1
1	0	0	1	Không là mô hình của KB
0	1	1	0	Không là mô hình của KB
0	0	1	0	Không là mô hình của KB



Ký hiệu hằng đúng

- Ký hiệu công thức H là hằng đúng :

$$\models H$$

Ký hiệu $\models H$ có nghĩa là $\emptyset \models H$.

Hệ thống $\{F_1, \dots, F_n\} \models H$

$$\Leftrightarrow \{F_1, \dots, F_n\} \cup \{\text{CTHằng đúng}\} \models H$$

$$\Leftrightarrow F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \text{CTHằng đúng} \models H$$

Do đó khi $\{F_1, \dots, F_n\} = \emptyset$ thì

$$\text{CTHằng đúng} \models H.$$

Công thức hằng đúng

- Nếu $F \models H$ thì công thức $(F \rightarrow H)$ hằng đúng.
- Một công thức hằng đúng :

$$F \models H \quad \Leftrightarrow \quad \models (F \rightarrow H)$$

$$F \models H \quad \Leftrightarrow \quad \models \neg (F \wedge \neg H)$$

$$(F_1, \dots, F_n \models H) \Leftrightarrow (F_2, \dots, F_n \models F_1 \rightarrow H)$$

$$(F \models H \text{ và } H \models K) \rightarrow (F \models K) \quad (\text{truyền})$$

Ký hiệu $\models$

- Một số tác giả ký hiệu $M \models F$, trong đó F là một công thức và M là một mô hình của F .

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Bài tập

Chương 2 : Luận lý mệnh đề

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Lập bảng thực trị

Cho các công thức sau :

1. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$

2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

3. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

4. $P \vee (P \rightarrow Q)$

5. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow P$

6. $P \vee (Q \rightarrow \neg P)$

7. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$



Tương quan giữa các toán tử

So sánh các công thức sau :

1. $\neg(P \rightarrow (\neg Q))$ và $(P \wedge Q)$

2. $(\neg P \rightarrow Q)$ và $(P \vee Q)$

Nhận xét gì về sự liên hệ của các toán tử ?

cuu duong than cong . com



Tương quan giữa các toán tử

Viết ra các công thức sau chỉ dùng $\rightarrow$ và $\neg$:

1. $(P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

2. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$

3. $P \vee (P \rightarrow Q)$

4. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow P$

5. $P \vee (Q \rightarrow \neg P)$

6. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$



Dùng thủ tục số học

Tính các công thức :

1. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge \neg Q))$

2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

3. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

4. $P \vee (P \rightarrow Q)$

5. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow P$

6. $P \vee (Q \rightarrow \neg P)$

7. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$



Sự tương đương

Chứng minh sự tương đương của các công thức :

$$1. (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q) = (\neg P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$2. P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg Q) = \neg P \wedge \neg Q \wedge (P \vee Q)$$

$$3. (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) = (P \rightarrow (Q \wedge R))$$

$$4. P \wedge (P \rightarrow (P \wedge Q)) = \neg P \vee \neg Q \vee (P \wedge Q)$$

cuu duong than cong . com



Hằng đúng - Hằng sai

Xác định tính hằng đúng, hằng sai của các công thức :

1. $\neg(\neg S) \rightarrow S$

2. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$

3. $(S \rightarrow T) \rightarrow (\neg T \rightarrow \neg S)$

4. $P \vee (P \rightarrow Q)$

5. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow P$

6. $\neg P \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$

7. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C).$



Mô hình

Tìm một mô hình cho mỗi công thức :

1. $\neg(\neg S) \rightarrow S$

2. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$

3. $(S \rightarrow T) \rightarrow (\neg T \rightarrow \neg S)$

4. $P \vee (P \rightarrow Q)$

5. $(P \wedge (Q \rightarrow P)) \rightarrow P$

6. $\neg P \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$

7. $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C).$



Mô hình

Diễn dịch nào :

$$I_1 = \{S\}$$

$$I_2 = \{S, \neg T\}$$

$$I_3 = \{A, \neg B, C\}$$

$$I_4 = \{S, \neg T, A, \neg B, C, P, \neg Q\}$$

là mô hình của các công thức sau :

$$1. \neg(\neg S) \rightarrow S$$

$$2. \neg(S \vee T) \vee \neg T$$

$$3. P \vee (P \rightarrow Q)$$

$$4. (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

$$5. ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \rightarrow (B \vee C).$$



Dạng chuẩn CNF

Chuyển thành dạng CNF

1. $\neg(P \rightarrow Q)$
2. $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$
3. $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$
4. $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$
5. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
6. $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S)$
7. $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$
8. $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$
9. $(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q).$

cuu duong than cong . com



Hằng đúng - Hằng sai

Chứng minh các công thức sau đây là hằng đúng, hằng sai, hay khả đúng khả sai :

1. $\neg(\neg S) \rightarrow S$

2. $\neg(S \vee T) \vee \neg T$

3. $(S \rightarrow T) \rightarrow (\neg T \rightarrow \neg S)$

cuu duong than cong . com



Mô hình

Tìm một mô hình I cho công thức F.

$$F = ((A \vee B) \wedge \neg B) \rightarrow A$$

Mở rộng I để nó cũng là mô hình của G.

$$G = ((A \wedge C) \vee \neg C) \rightarrow A.$$

cuu duong than cong . com



Hệ quả luận lý

Chứng minh $\neg K$ là hệ quả luận lý của hệ thống

$\{F_1, F_2, F_3, F_4\} :$

$$F_1 = J \rightarrow P \vee T,$$

$$F_2 = K \vee Q \Rightarrow J,$$

$$F_3 = T \rightarrow A,$$

$$F_4 = \neg P \wedge \neg A.$$

cuu duong than cong . com



Hệ quả luận lý

Công thức nào là hệ quả luận lý của hệ thống
 $\{A, B, A \rightarrow C\}$

1. $A \vee B$.

2. $A \wedge B$. [cuu duong than cong . com](https://fb.com/tailieudientucntt)

3. $B \rightarrow C$.

4. $(A \wedge B) \vee C$.

[cuu duong than cong . com](https://fb.com/tailieudientucntt)



Hằng đúng

Công thức nào sau đây là hằng đúng :

1. $(x \rightarrow x)$

2. $\neg(x \leftrightarrow x)$

3. $((P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$

4. $(\neg A \rightarrow (B \rightarrow A))$

5. $((A \vee B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A))$

6. $((\neg P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow P))$

7. $((X \rightarrow Y) \rightarrow X) \rightarrow Y$.



Hết slide

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

