

Chương 3. Luận lý vị từ

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Nội dung

- I. Cấu trúc của luận lý vị từ
- II. Suy luận tự nhiên trong luận lý vị từ
- III. Ngữ nghĩa của luận lý vị từ
- IV. Phân giải

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



I. Cấu trúc của luận lý vị từ

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Hạn chế của LLMĐ

- Tam đoạn luận
Nếu là người thì phải chết. (P)
Socrates là người. (Q)
Vậy Socrates phải chết. (R)
- Biểu diễn bằng LLMĐ **không giữ được mối quan hệ** $((P \wedge Q) \rightarrow R)$ của 3 phát biểu trên.
↳ Thêm khái niệm **quan hệ** để duy trì được sự liên kết.



Biểu diễn bằng quan hệ

- Chọn các quan hệ từ các mệnh đề P, Q, R :
 - * qhệ người(x) (ie, x là người).
 - * qhệ chết(x) (ie, x chết).
- Khi đó các mệnh đề P, Q, R trở thành :
 - $P = \text{nếu người}(x) \text{ thì chết}(x).$
 - $Q = \text{người}(\text{Socrates}).$
 - $R = \text{chết}(\text{Socrates}).$ $\{\text{người}(x) \rightarrow \text{chết}(x), \text{người}(\text{Socrates})\}$
hệ thống kết luận được : $\text{chết}(\text{Socrates}).$



Hạn chế của LLMĐ

- Một phỏng đoán của Goldbach :
 $P =$ “ Mọi số nguyên chẵn ≥ 4 là tổng của hai số nguyên tố”.
- Đặt $P_n =$ “ n chẵn là tổng của hai số nguyên tố”.
Mệnh đề P có thể được phân rã thành vô hạn các mệnh đề : $P = P_4$ và P_6 và P_8 và ...
- Luận lý mệnh đề không chấp nhận **dạng giao vô hạn** $P_4 \wedge P_6 \wedge P_8 \wedge \dots$.
- ↳ Khái niệm **quan hệ** biểu diễn được giao vô hạn.



Lượng từ

- Logic “phục vụ” cho toán học.

Thí dụ :

$(G, *)$ là một nhóm.

Luật giao hoán được diễn tả bằng công thức

$$x * y = y * x, \text{ với mọi phần tử } x, y.$$

Luật phần tử đơn vị được diễn tả

$$\text{có phần tử } i, x * i = x, \text{ với mọi phần tử } x.$$

↳ Lý do xuất hiện khái niệm $\forall, \exists$.



Lượng từ

- Xây dựng các quan hệ : nhân (mp), bằng (eq)

- Luật giao hoán được diễn tả :

$$\forall x, \forall y \text{ eq}(\text{mp}(x, y), \text{mp}(y, x)).$$

- Luật phần tử đơn vị

$$\exists i, \forall x \text{ eq}(\text{mp}(x, i), x).$$

↳ Phân loại quan hệ : hàm, vị từ.



Cấu trúc của luận lý vị từ

- **Bảng ký tự** : Tập hợp *hữu hạn* các ký tự.

Thí dụ :

a, b, c, d, ..., z

- **Ký hiệu** : Chuỗi *hữu hạn* ký tự được dùng để đặt tên cho các khái niệm trong FOL.

Thí dụ :

tên biến : x, y, ...

tên hàm : cong, nhan, chia, ...

- **Miền đối tượng D** : là một tập hợp “trừu tượng”.



Cấu trúc của luận lý vị từ

- Tập hợp các ký hiệu biến.

- Lượng từ có 2 loại :

Phổ dụng $\forall$ (universal quantifier)

Hiện hữu $\exists$ (existential quantifier).

Hình thức sử dụng :

$(\forall x)$, $(\exists x)$: với x là biến.



Cấu trúc của luận lý vị từ

- **Hàm** là ánh xạ từ $D^n \rightarrow D$, $n \in \mathbb{N}$.

Thí dụ :

nhân, cộng : $D \times D \rightarrow D$

- Ảnh của hàm được gọi là **biểu thức hàm**.

Thí dụ :

nhân(x, n), cộng(x, m),

cộng(nhân(y, z), x)



Cấu trúc của luận lý vị từ

- **Vị từ** là quan hệ trên tập D^n , nghĩa là tập con của tập D^n .

Thí dụ :

$D = \{\text{táo, đường, cam, bắp cải, chuối, mướp, ớt, tiêu sọ, khổ hoa, muối}\}$

$p = \{\text{táo, cam, chuối}\} \subseteq D$.

p là quan hệ “trái cây tráng miệng”.

$q = \{\text{đường, ớt, tiêu sọ, muối}\} \subseteq D$.

q là quan hệ “gia vị”.



Cấu trúc của luận lý vị từ

Thí dụ :

$$D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$r = \{2, 3, 5, 7\} (\subseteq D)$$

là quan hệ “nguyên tố”

$$s = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), \\ (3, 6), (3, 9), (4, 8), (5, 10)\} \subseteq D \times D$$

là quan hệ “chia chắn”.

$$t = \{4, 9\} (\subseteq D) \text{ là quan hệ chính phương.}$$



Cấu trúc của luận lý vị từ

- Một cách định nghĩa khác.
Hàm là vị từ nếu
 - Chỉ kết hợp với nhau qua các toán tử logic :
 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.
 - Khi sử dụng không được làm thông số của hàm khác.

cuu duong than cong . com



Cấu trúc của luận lý vị từ

- **Vị từ** được biểu diễn bằng hàm

$$D^n \rightarrow \{1, 0\}$$

Thí dụ :

$$p = \{\text{táo}, \text{cam}, \text{chuối}\} \subseteq D$$

$$p : D \rightarrow \{1, 0\},$$

$$p(\text{táo}) = p(\text{cam}) = p(\text{chuối}) = 1,$$

$$p(\text{đường}) = p(\text{bắp cải}) = p(\text{mướp}) = p(\text{ớt}) =$$

$$p(\text{tiêu sọ}) = p(\text{khổ hoa}) = p(\text{muối}) = 0.$$



Cấu trúc của luận lý vị từ

Thí dụ :

$$s = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), \\ (3, 6), (3, 9), (4, 8), (5, 10)\} \subseteq D \times D$$

là quan hệ “chia chẵn”.

$$s(2, 2) = s(2, 4) = s(2, 6) = s(2, 8) = s(2, 10) = s \\ (3, 6) = s(3, 9) = s(4, 8) = s(5, 10) = 1,$$

$$s(x, y) = 0 \text{ với } (x, y) \notin s.$$



Cấu trúc của luận lý vị từ

- Ảnh của vị từ được gọi là **biểu thức vị từ**.

Thí dụ :

$mẹ(x, y)$ là ảnh của vị từ mẹ,

$bạn(y, z)$ là ảnh của vị từ bạn.

$cha(Minh, Vũ)$ không phải là biểu thức vị từ vì Minh, Vũ là 2 giá trị trong thế giới thực, không phải là giá trị của miền D trừu tượng.



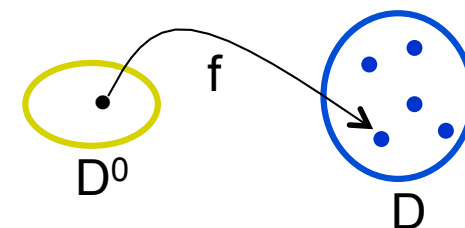
Các vị từ đặc biệt

- Trường hợp đặc biệt :

$$\text{card}(D^0) = \text{card}(\{f \mid f : \emptyset \rightarrow D\}) = 1.$$

Hàm $f : D^0 \rightarrow D$ được gọi là **hằng**.

cuu duong than cong . com



Có 2 vị từ từ $D^0 \rightarrow \{1, 0\}$ là p_1 (luôn lấy giá trị đúng) và p_0 (luôn lấy giá trị sai).



Nguyên tử

- Nguyên tử (term) :
 - (i) Ký hiệu hằng (constant) là nguyên tử.
 - (ii) Ký hiệu biến (variable) là nguyên tử.
 - (iii) Nếu $t_1, \dots, t_n$ là nguyên tử thì biểu thức hàm $f(t_1, \dots, t_n)$ là nguyên tử.
(với hàm f không là vị từ).
- * Điều kiện (i) không cần thiết vì đã được bao hàm trong điều kiện (iii).



Nguyên tử

Thí dụ :

Hằng a, b, c là nguyên tử.

Biến x, y, z là nguyên tử.

Biểu thức hàm $f(a, x)$ là nguyên tử.

Biểu thức hàm $h(g(y), a, x)$ là nguyên tử.

Biểu thức hàm $g(f(h(x, y, z), c))$ là nguyên tử.

Bởi các hàm $f(_, _)$, $g(_)$, và $h(_, _, _)$.



Công thức nguyên

- Nếu p là vị từ và $t_1, \dots, t_n$ là nguyên tử thì $p(t_1, \dots, t_n)$ là công thức nguyên.
- Biểu thức vị từ là công thức nguyên.

Thí dụ :

Vị từ : $mẹ_của(_, _)$, $nhỏ_hơn(_, _)$, $còn_sống(_)$.

$mẹ_của(x, f(y))$,

$nhỏ_hơn(cộng(x, a), y)$,

$còn_sống(z)$

là các công thức nguyên.



Công thức nguyên

Thí dụ :

Các nhà thơ : Văn Cao, Xuân Diệu, Hoàng Cầm, Phạm Thiên Thư.

Sử gia : Lê Văn Hưu. Vua : Quang Trung.

Đặt $D = \{x\text{Diệu}, h\text{Cầm}, v\text{Cao}, p\text{TThư}, l\text{VHưu}, q\text{Trung}\}$.

Đặt vị từ $nt(x) = x$ là nhà thơ, với $x \in D$.

↳ $nt(x)$ là công thức nguyên

↳ $nt(x\text{Diệu}), nt(p\text{TThư})$ không là CT nguyên.



Công thức nguyên

Công thức nguyên $nt(x)$ với $x \in D$ tương đương với 6 câu khai báo :

$nt(xDiệu)$: Xuân Diệu là nhà thơ.

$nt(hCầm)$: Hoàng Cầm là nhà thơ.

$nt(vCao)$: Văn Cao là nhà thơ.

$nt(pTThơ)$: Phạm Thiên Thơ là nhà thơ.

$nt(lvHữu)$: Lê Văn Hữu là nhà thơ.

$nt(qTrung)$: Quang Trung là nhà thơ.



Công thức nguyên

Nhận xét :

- Một công thức nguyên của LLVT tương ứng với một tập công thức nguyên của LLMĐ.
- LLMĐ là một trường hợp đặt biệt của LLVT.

cuu duong than cong . com



Công thức hoàn hảo

- Công thức hoàn hảo được gọi tắt là công thức.
 - Công thức :
 - (i) Công thức nguyên là CT.
 - (ii) $\perp$, $\top$ là CT.
 - (iii) CT kết hợp với $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ cũng là CT.
 - (vi) CT kết hợp với $(\forall x)$, $(\exists x)$ cũng là CT.
- Sự kết hợp các yếu tố trên chỉ gồm hữu hạn phần tử.



Một định nghĩa khác^[15]

- V là tập vô hạn đếm được các biến.
- R tập đếm được các ký hiệu quan hệ (vị từ).
Mỗi vị từ có arity là số nguyên không âm (non-negative). [cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)
- F tập đếm được các ký hiệu hàm. Mỗi vị từ có arity là số nguyên không âm (non-negative).
- C tập đếm được các ký hiệu hằng.
- $\Sigma = \langle R, F, C \rangle$ được gọi là first-order signature. [cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)



Một định nghĩa khác^[15]

- $\Sigma = \langle R, F, C \rangle$ là first-order signature, tập hợp Σ -term là tập nhỏ nhất thỏa :
 - Biến trong V là một term.
 - Hằng trong C là một term.
 - Nếu f là hàm n thông số và $t_1, \dots, t_n$ là term thì $f(t_1, \dots, t_n)$ cũng là term.



Một định nghĩa khác^[15]

Thí dụ :

“All men are mortal”.

Định nghĩa một signature $\Sigma = \langle R, F, C \rangle$ như sau :

$R = \{\text{man}(_), \text{mortal}(_)\}$, $F = \emptyset$, $C = \emptyset$.

Câu trên được biểu diễn như sau :

$\forall x(\text{man}(x) \rightarrow \text{mortal}(x))$.



Một định nghĩa khác^[15]

Thí dụ :

Một signature Σ :

$R = \{\text{equal}(_, _)\}$, $F = \{\text{plus}(_, _)\}$, $C = \emptyset$.

Tính giao hoán được biểu diễn như sau :

$\forall x \forall y \text{equal}(\text{plus}(x, y), \text{plus}(y, x))$.

Viết theo ngôn ngữ thông thường :

$\forall x \forall y (x + y = y + x)$.

cuu duong than cong . com



Phạm vi của lượng từ

- Trong công thức $(\forall x F)$, F thuộc phạm vi ảnh hưởng của $\forall x$.
- Trong công thức $(\exists x F)$, phạm vi ảnh hưởng của $\exists x$ là F .

Thí dụ :

$$(\exists y)(r(y)) \wedge (\forall x)(p(x) \rightarrow q(f(x), a)).$$

Phạm vi của $(\exists y)$ là $r(y)$,

phạm vi của $(\forall x)$ là $(p(x) \rightarrow q(f(x), a))$.



Hiện hữu

- Hiện hữu của một biến là sự xuất hiện của biến đó trong công thức.

Thí dụ :

$((\forall x) p(x,y) \wedge q(t,y)) \rightarrow (\exists y)(r(x,y,z))$ có 4 biến.

Biến x có 2 hiện hữu, biến y có 3 hiện hữu.

Biến z có 1 hiện hữu, biến t có 1 hiện hữu.

cuu duong than cong . com



Hiện hữu

- Hiện hữu ràng buộc là hiện hữu thuộc phạm vi của lượng từ có biến cùng tên với nó.
- Hiện hữu tự do là hiện hữu không ràng buộc.

Thí dụ :

$$((\forall x)(\forall y) p(x, y, z)) \wedge ((\forall z) q(y, z))$$

Hiện hữu ràng buộc

Hiện hữu tự do

$$(\forall z p(z, y)) \wedge (\forall x q(x, y, z))$$

Công thức đóng

- **Công thức đóng** : công thức không chứa hiện hữu tự do.
- **Công thức tự do** : công thức chứa ít nhất 1 hiện hữu tự do. [cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

Thí dụ :

$((\forall x)(\forall y) p(x, y)) \wedge ((\forall z) q(z)) :$ đóng.

$((\forall x)(\forall y) p(x, y, z)) \wedge ((\forall z) q(y, z)) :$ tự do.

$(\forall z p(z, x)) \wedge (\forall x q(x)) :$ tự do.



Dịch sang Luận lý vị từ

- Thí dụ :

Every student is younger than some instructor^[3'].

Chọn các vị từ : $sv(x) = x$ là SV,

$gv(x) = x$ là giảng viên,

$yg(x, y) = x$ trẻ hơn y .

For every x , if x is a student, then there is some y which is an instructor such that x is younger than y ^[3'].

$$\forall x (sv(x) \rightarrow \exists y (gv(y) \wedge yg(x,y)))$$



Dịch sang Luận lý vị từ

- Thí dụ :

Not all birds can fly^[3].

Chọn các vị từ : $ch(x)$ = x là chim,

$by(x)$ = x có thể bay.

$$\neg(\forall x (ch(x) \rightarrow by(x)))$$

Nói cách khác

$$\exists x (ch(x) \wedge \neg by(x))$$

Nhưng, “all birds can not fly” ?



Dịch sang Luận lý vị từ

- Thí dụ :

Trẻ con nói chuyện không biết lý luận.

Không ai làm việc chăm chỉ lại bị chế nhạo.

Ai nói chuyện không biết lý luận thì bị chế nhạo.

Vì vậy trẻ con không thể làm việc chăm chỉ.

Chọn các vị từ :

$Lýluận(x) = x \text{ biết lý luận.}$

$Bịchếnhạo(x) = x \text{ bị chế nhạo.}$

$Chămchỉ(x) = x \text{ làm việc chăm chỉ.}$



Dịch sang Luận lý vị từ

- Trẻ con nói chuyện không biết lý luận
 $\neg \text{Lýluận}(\text{trẻcon})$ (1)
- Không ai làm việc chăm chỉ lại bị chế nhạo.
 $\forall x (\text{Chămchỉ}(x) \rightarrow \neg \text{Bịchếnhạo}(x))$ (2)
 $\forall x (\text{Bịchếnhạo}(x) \rightarrow \neg \text{Chămchỉ}(x))$ (2')
- Những người không biết lý luận thì bị chế nhạo.
 $\forall x (\neg \text{Lýluận}(x) \rightarrow \text{Bịchếnhạo}(x))$ (3)
- Vì vậy trẻ con không thể làm việc chăm chỉ.
 $\neg \text{Chămchỉ}(\text{trẻcon})$ (4)



Dịch sang Luận lý vị từ

Giải :

Phân tích hệ thống thành :

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \neg \text{Lýluận}(\text{trẻcon}) \\ G = \forall x (\text{Bịchêbai}(x) \rightarrow \neg \text{Chămchỉ}(x)) \\ H = \forall x (\neg \text{Lýluận}(x) \rightarrow \text{Bịchêbai}(x)) \end{array} \right\}$$

$$\vdash \neg \text{Chămchỉ}(\text{trẻcon})$$



Dịch sang Luận lý vị từ

- Sự mơ hồ của ngôn ngữ tự nhiên.

Thí dụ :

$P = \text{“Tất cả vật màu đỏ ở trong hộp”}.$

Vị từ $\text{red}(x) = x \text{ là vật màu đỏ,}$

$\text{box}(x) = x \text{ ở trong hộp}$

Biểu diễn P trong LLVT ?



Dịch sang Luận lý vị từ

P = “Tất cả vật màu đỏ ở trong hộp”.

Biểu diễn P trong LLVT :

(mã hóa lại $\text{red}(x)$ là red_x , $\text{box}(x)$ là box_x)

$$P_1 = \forall x (\text{red}_x \rightarrow \text{box}_x)$$

$$P_2 = \forall x (\text{red}_x \wedge \text{box}_x)$$

$$P_3 = \forall x ((\text{red}_x \rightarrow \text{box}_x) \wedge (\text{box}_x \rightarrow \text{red}_x))$$



Bài tập

Chương 3 : Luận lý vị từ

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Dịch sang Luận lý vị từ

1. Dùng các vị từ : $tp(x, y)$: x thán phục y.

$td(x, y)$: x tham dự y. $tg(x)$: x là thầy giáo.

$sv(x)$: x là sinh viên. $bg(x)$: x là bài giảng.

Dịch các câu sau thành luận lý vị từ :

1.1 Minh thán phục mọi thầy giáo.

1.2 Một số thầy thán phục Minh.

1.3 Minh thán phục chính mình.

1.4 Không SV nào tham dự mọi bài giảng.

1.5 Không bài giảng nào được tham dự bởi mọi SV.

1.6 Không bài giảng nào được tham dự bởi bất kỳ 1 SV.



Dịch sang Luận lý vị từ

2. Câu “Minh thán phục mọi thầy giáo” trong câu 1 ở trên được dịch thành $\forall x \text{tp}(\text{minh}, \text{tg}(x))$ sai vì lý do gì ?*. Có thể sửa lại để câu trên trở thành đúng ?.

3. Dịch các câu vị từ sau thành câu tự nhiên :

3.1 $\forall x \forall y (\text{td}(x, y) \wedge \text{sv}(x) \wedge \text{bg}(y))$

3.2 $\forall x \forall y (\neg \text{td}(x, y) \wedge \text{sv}(x) \wedge \text{bg}(y))$

3.3 $\forall x \forall y (\text{td}(x, y) \wedge \neg \text{sv}(x) \wedge \text{bg}(y))$

3.4 $\forall x \forall y (\text{td}(x, y) \wedge \text{sv}(x) \wedge \neg \text{bg}(y))$

3.5 $\forall x \forall y (\neg \text{td}(x, y) \wedge \neg \text{sv}(x) \wedge \text{bg}(y))$

3.6 $\forall x \forall y (\text{td}(x, y) \wedge \neg \text{sv}(x) \wedge \neg \text{bg}(y))$

3.7 $\forall x \forall y (\neg \text{td}(x, y) \wedge \neg \text{sv}(x) \wedge \neg \text{bg}(y))$

Tương tự thay $\forall \forall$ bằng $\forall \exists$ hay $\exists \forall$ hay $\exists \exists$.

*
(về phương diện cú pháp và ngữ nghĩa)



Dịch sang Luận lý vị từ

4. Dịch các câu vị từ sau thành câu tự nhiên :

4.1 $\forall x \forall y \text{ td}(x, y) \wedge \forall x \text{ sv}(x) \wedge \forall y \text{ bg}(y)$

4.2 $\forall x \forall y \text{ td}(x, y) \wedge \forall x \neg \text{sv}(x) \wedge \forall y \text{ bg}(y)$

4.3 $\forall x \forall y \neg \text{td}(x, y) \wedge \forall x \neg \text{sv}(x) \wedge \forall y \text{ bg}(y)$

4.4 $\forall x \forall y \neg \text{td}(x, y) \wedge \forall x \text{ sv}(x) \wedge \forall y \neg \text{bg}(y)$

4.5 $\forall x \forall y \neg \text{td}(x, y) \wedge \forall x \neg \text{sv}(x) \wedge \forall y \neg \text{bg}(y)$

4.6 $\neg (\forall x \forall y \text{ td}(x, y) \wedge \forall x \text{ sv}(x) \wedge \forall y \text{ bg}(y))$



Dịch sang Luận lý vị từ

5. Dịch các câu sau thành luận lý vị từ :

5.1 Tất cả vật màu đỏ ở trong hộp.

5.2 Chỉ những vật màu đỏ ở trong hộp.

5.3 Không có con vật nào vừa là mèo và vừa là chó.

5.4 Mọi giải thưởng được giật bởi 1 đứa con trai.

5.5 Một đứa con trai giật mọi giải thưởng.



Dịch sang Luận lý vị từ

6. Dùng các vị từ sau để dịch các câu.

$b(x, y)$: x đánh bại y .

$f(x)$: x là một đội bóng đá.

$q(x, y)$: x là tiền vệ của đội bóng y .

$l(x, y)$: x thua y .

6.1 mọi đội bóng có một tiền vệ.

6.2 Nếu MU đánh bại Chelsi thì MU không thua mọi đội bóng (khác).

6.3 Chelsi đánh bại một số đội bóng mà nó đánh bại MU.



Dịch sang Luận lý vị từ

7. Chỉ dùng các vị từ $\text{cha}(x, y)$, $\text{me}(x, y)$, $\text{chồng}(x, y)$, $\text{anh}(x, y)$, $\text{chị}(x, y)$ để dịch các câu sau :

7.1 Mọi người có một mẹ.

7.2 Mọi người có một cha và một mẹ.

7.3 Bất cứ ai có một mẹ thì có một cha.

7.4 Minh đã là ông nội.

7.5 Câu không phải là dì.



Hết slide

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

