

II. Suy luận tự nhiên trong luận lý vị từ

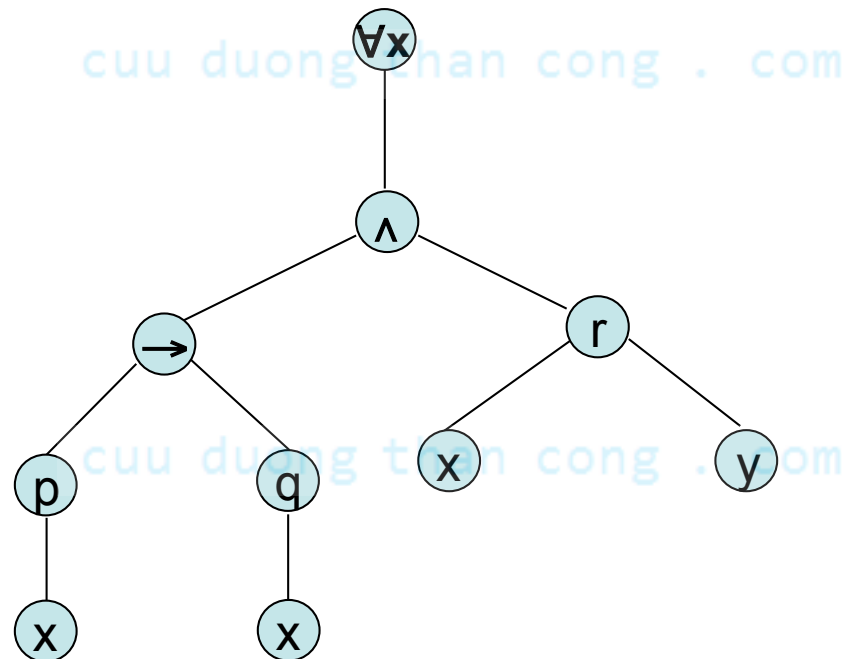
cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Cây phân tích^[3]

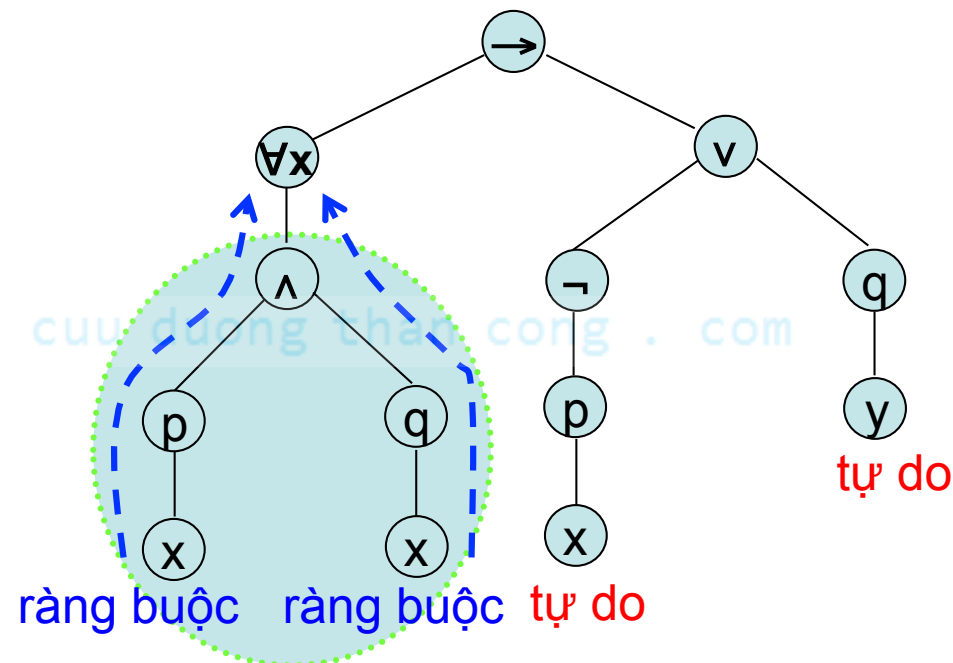
- Công thức $\forall x ((p(x) \rightarrow q(x)) \wedge r(x, y))$ có cây phân tích :



Hiện hữu^[3]

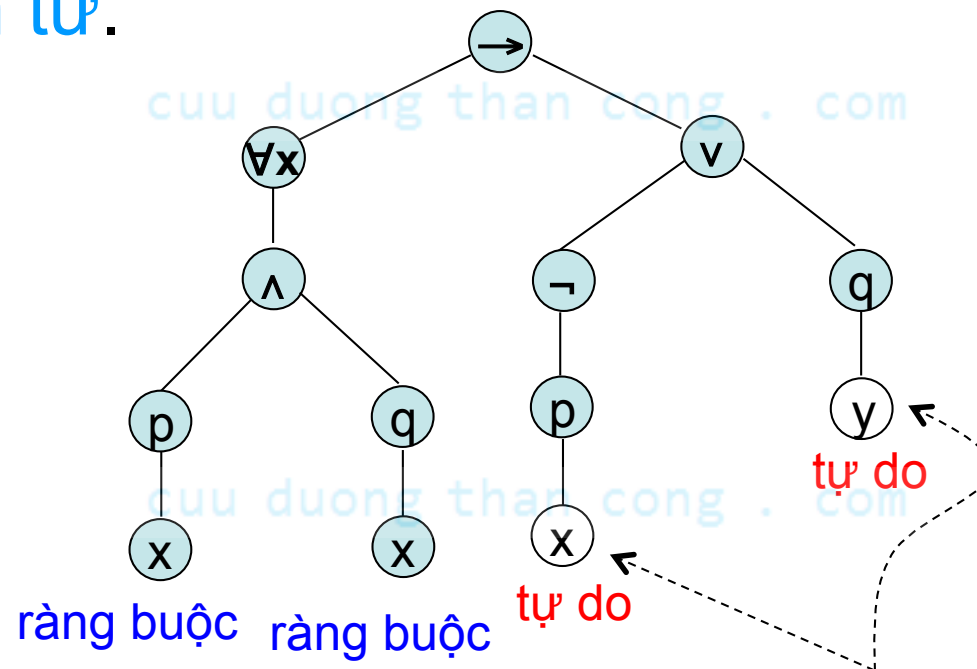
- Hiện hữu là ràng buộc nếu có một lượng từ cùng tên ở trên con đường từ nó hướng về gốc. Ngược lại là tự do.

Thí dụ : $(\forall x (p(x) \wedge q(x))) \rightarrow (\neg p(x) \vee q(y))$



Thay thế

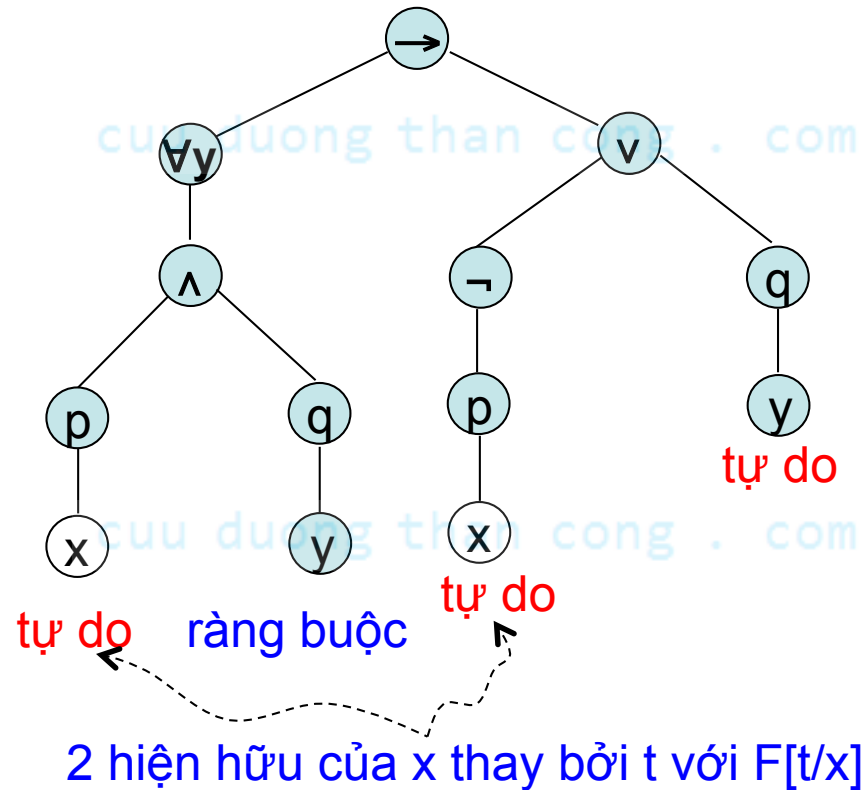
- Chỉ những hiện hữu tự do mới được thay thế
- Biến là nguyên tử phải được thay bởi một nguyên tử.



2 hiện hữu này có thể được thay thế

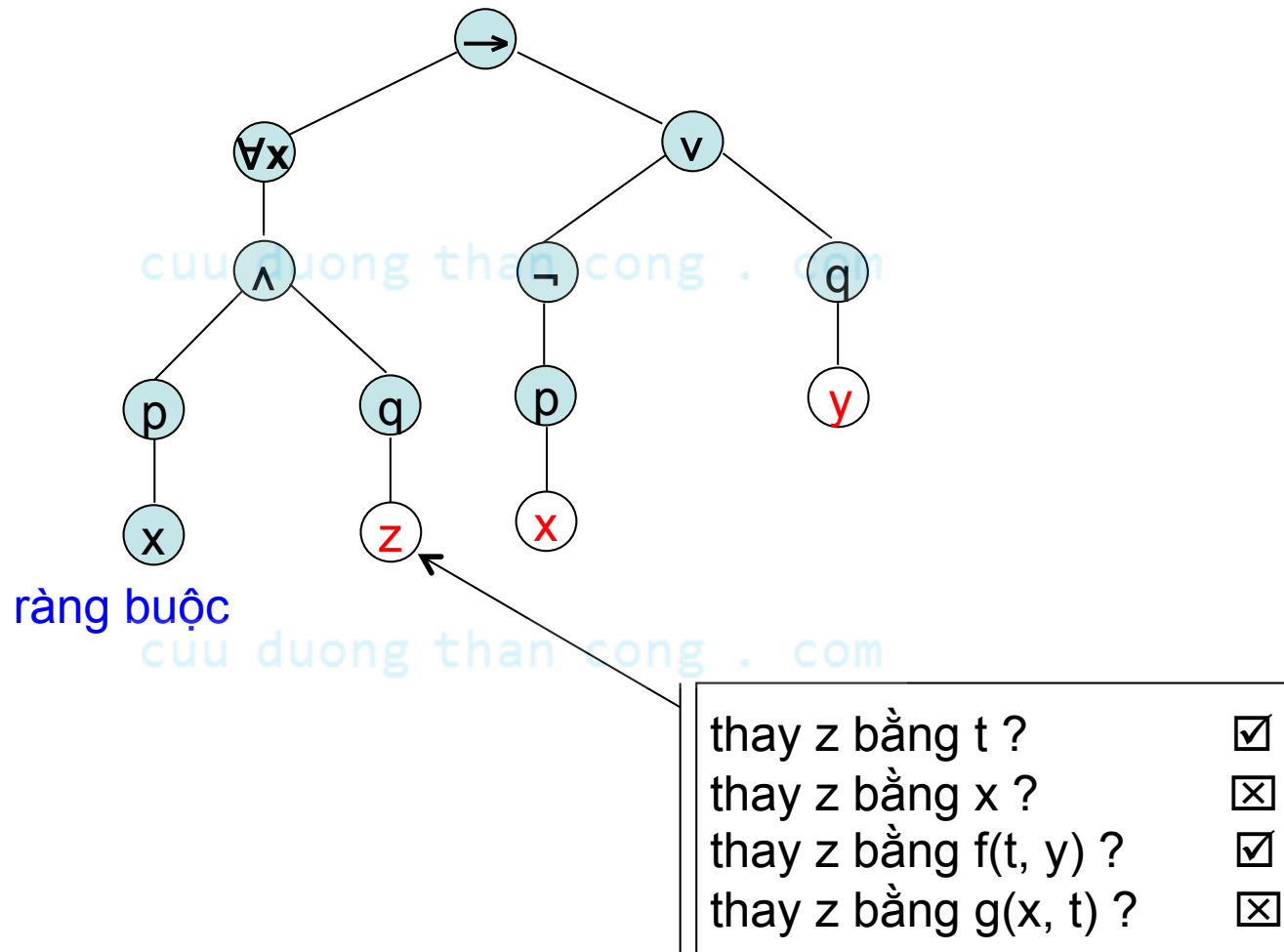
Thay thế

- Ký hiệu $F[t/x]$ nghĩa là tất cả hiện hữu tự do của x trong F được thay bởi t .



Thay thế

Thí dụ :



Điều kiện thay thế^[3']

- Nguyên từ t tự do đối với biến x trong công thức F nếu không có hiện hữu tự do của x xuất hiện trong phạm vi của $\forall y$ hoặc $\exists y$ với mọi biến y có trong t.

cuu duong than cong . com

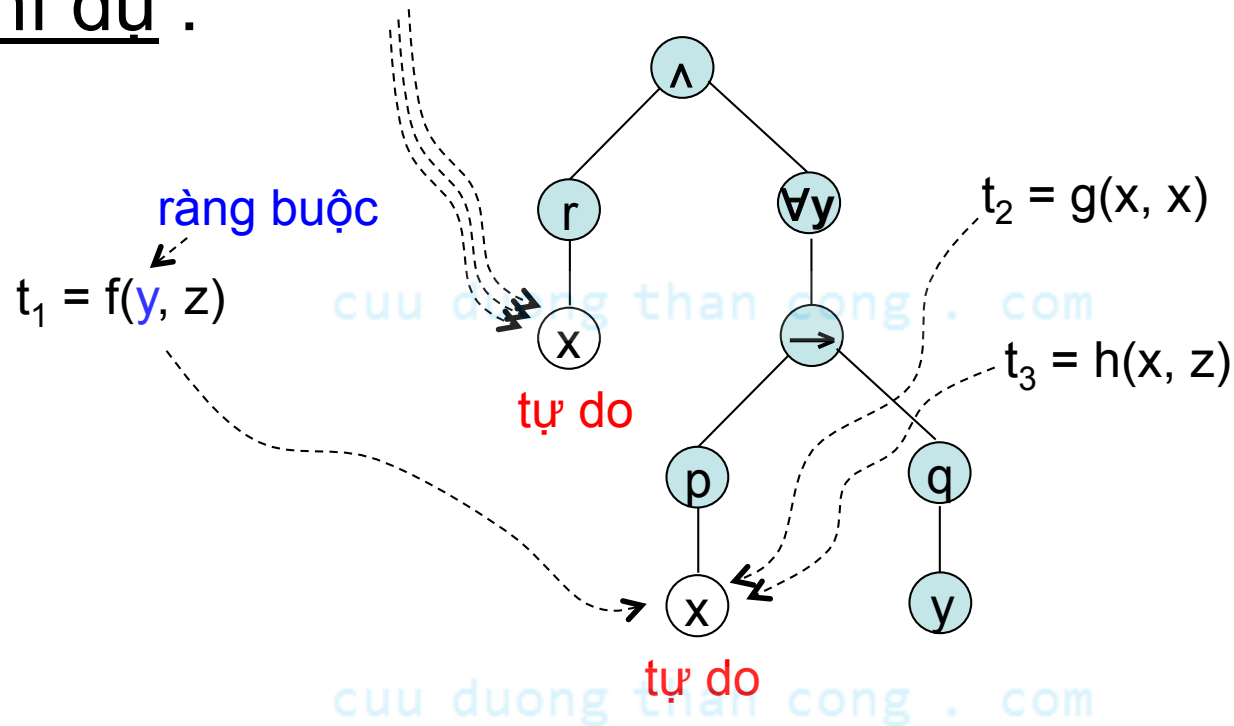
Nói cách khác, hiện hữu của các biến trong t không trở thành ràng buộc khi thế t vào tất cả những hiện hữu tự do của x.

cuu duong than cong . com



Điều kiện thay thế

- Thí dụ :



$t_1 = f(y, z)$ không tự do đối với x vì y trở thành ràng buộc.
 $t_2 = g(x, x)$ tự do đối với x .
 $t_3 = h(x, z)$ tự do đối với x .

Thay thế

Nhận xét :

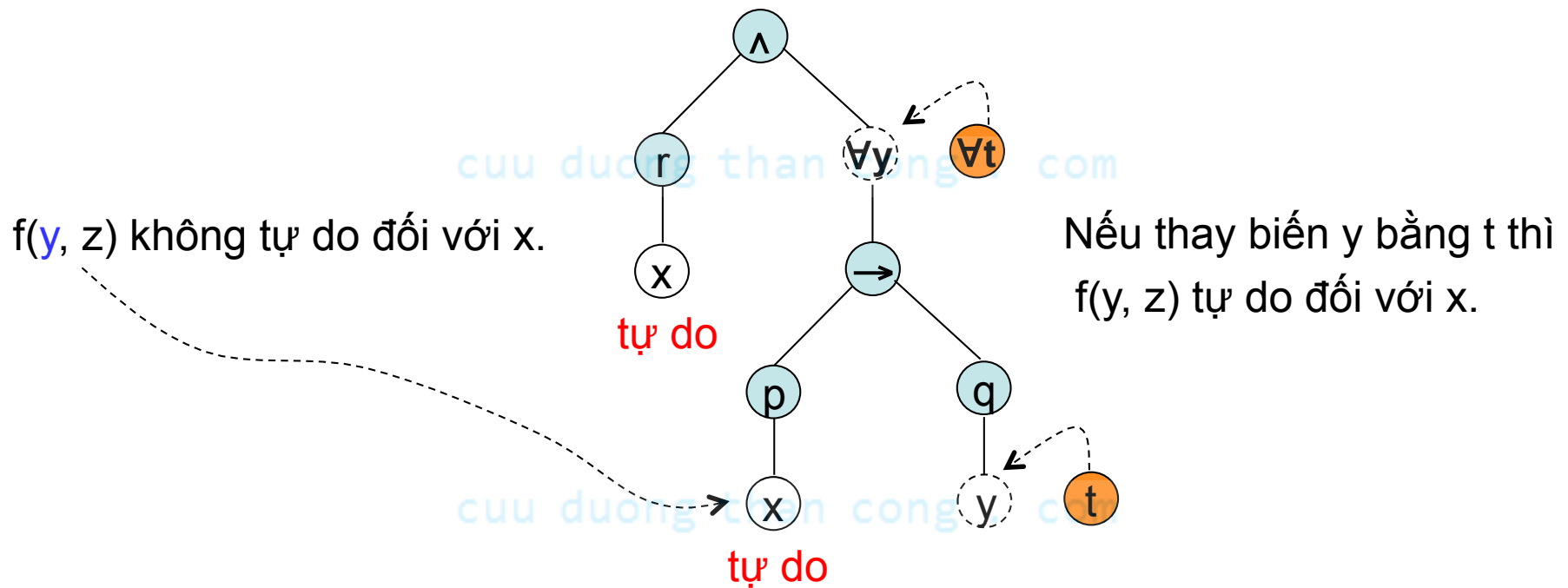
- Một số biến cần được đổi tên để thoả mãn điều kiện thay thế.
- Để $F[t/x]$ luôn luôn được thực hiện, trước tiên đổi tên tất cả các biến có hiện hữu ràng buộc trong F xuất hiện trong t . Lúc này t tự do đối với x .

cuu duong than cong . com



Thay thế

Thí dụ :



Suy luận tự nhiên

- Suy luận tự nhiên trong LLVT cũng tương tự như trong LLMĐ, ngoại trừ các qui tắc liên quan đến lượng từ.
- Ký hiệu bằng nhau $t = s$ với t và s là nguyên từ là vị từ $eq(t, s)$.
- $eq(t, s)$ có giá trị đúng khi t và s :
 - cùng là một ký hiệu hằng
 - là biểu thức hàm cùng giá trị trên miền đối tượng.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc bằng nhau i (=i)

dòng m : $eq(t, t)$, với t là nguyên tử.

Đương nhiên viết được dòng m.

Chú thích : [cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

qui tắc (=i) còn được viết là $t = t$.

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)



Suy luận tự nhiên^[3']

- Qui tắc bằng nhau e (=e)

dòng m : $eq(t_1, t_2)$ với t_1, t_2 là nguyên tử

dòng k : $F[t_1/x]$

dòng k+1 : $F[t_2/x]$

với t_1, t_2 tự do đối với x trong F .

Nếu có dòng m và k thì viết được dòng k+1.

Chú thích :

qui tắc (=e) còn được viết là $t_1 = t_2$.



Suy luận tự nhiên^[3']

- Chứng minh : $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$.

Viết lại :

$$\text{eq}(t_1, t_2) \vdash \text{eq}(t_2, t_1).$$

Đặt $F = \text{eq}(x, t_1)$.

1	$\text{eq}(t_1, t_2)$	tiền đề	
2	$\text{eq}(t_1, t_1)$	(=i)	(= $F[t_1/x]$)
3	$\text{eq}(t_2, t_1)$	(=e) 1, 2	(= $F[t_2/x]$)



Suy luận tự nhiên^[3']

- Chứng minh : $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$
 $F = \text{eq}(x, t_3)$.
 - 1 $t_2 = t_3$ tiên đề ($F[t_2/x]$)
 - 2 $t_1 = t_2$ tiên đề
 - 3 $t_1 = t_3$ =e 1, 2 ($F[t_1/x]$)



Suy luận tự nhiên^[3']

- Qui tắc lượng từ phổ dụng e ($\forall e$)

dòng m : $\forall x F$

dòng k : $F[t/x]$

với nguyên tử t tự do đối với x trong $F^{(*)}$.

Nếu có dòng m thì viết được dòng k.

(*)Nhận xét :

t tự do đối với x trong F , không phải trong $(\forall x F)$, nghĩa là công thức đã được “gỡ bỏ” lượng từ.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Thí dụ :

$p(t), \forall x (p(x) \rightarrow \neg q(x)) \vdash \neg q(t)$
với mọi t (tự do đối với x)

1	$\forall x (p(x) \rightarrow \neg q(x))$	tiền đề
2	$p(t) \rightarrow \neg q(t)$	$\forall e$ 1
3	$p(t)$	tiền đề
4	$\neg q(t)$	$\rightarrow e$ 2, 3

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên^[3]

- Từ $\forall x F$ tới $F[y/x]$ không thể thiếu điều kiện “tự do đối với biến”.

Thí dụ :

$F = (\exists y (x < y))$ với x, y là số nguyên và quan hệ nhỏ hơn ($<$) thông thường.

$\forall x F$ có nghĩa là mọi số nguyên x có số nguyên y lớn hơn.

Nhưng, $F[y/x]$ là $(\exists y (y < y))$, nghĩa là có số y lớn hơn chính nó.

Kết quả sai này là do điều kiện “tự do đối với biến” bị vi phạm.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc lượng từ phổ dụng i ($\forall i$)

dòng m : if x_0 ...

dòng ... : ...

dòng k : nif $F[x_0/x]$

dòng k+1 : $\forall x F$

với **biến** x_0 là bất kỳ và không xuất hiện ở ngoài
cấu trúc if...nif.

khi đó viết được dòng k+1.

Cấu trúc if...nif chỉ là qui định phạm vi của x_0 .

Suy luận tự nhiên^[3]

- Thí dụ : $\forall x (p(x) \rightarrow q(x)), \forall x p(x) \vdash \forall x q(x)$

1		$\forall x (p(x) \rightarrow q(x))$	tiền đề
2		$\forall x p(x)$	tiền đề
3	if x_0	(x_0 không xuất hiện ở 1,2,6)	
		$p(x_0) \rightarrow q(x_0)$	$\forall e$ 1
4		$p(x_0)$	$\forall e$ 2
5	nif	$q(x_0)$	$\rightarrow e$ 3, 4
6		$\forall x q(x)$	$\forall i$ 3-5



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc $\forall$ i dẫn từ $F[x_0/x]$ đến $\forall x F$ “có vẻ” như từ một trường hợp đặc biệt tổng quát hóa lên. Điều kiện biến x_0 chưa xuất hiện ở ngoài cấu trúc $\text{if} \dots \text{nif}$ cho phép khái quát được trường hợp tổng quát.

Vì x_0 là “bất kỳ”, không phải là phần tử đã được “chuẩn bị sẵn”.

Nhắc lại :

Tất cả các dòng - từ dòng có từ khóa if đến dòng có từ khóa nif - đều thuộc cấu trúc $\text{if} \dots \text{nif}$



Suy luận tự nhiên^[3']

- Qui tắc lượng từ hiện hữu i ($\exists i$)

dòng m : $F[t/x]$

dòng k : $\exists x F$

Nếu có dòng m thì viết được dòng k.

Nhận xét :

qui tắc này là đối ngẫu của $\forall e$.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Thí dụ : $\forall x F \vdash \exists x F$

1	$\forall x F$	tiền đề
2	$F[x/x]$	$\forall e$ 1
3	$\exists x F$	$\exists i$ 2

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên^[3']

- Qui tắc lượng từ hiện hữu e ($\exists e$)

dòng m : $\exists x F$

dòng m+1 : if $x_0 F[x_0/x]$ (thế x_0 vào dòng m)

...

dòng k : nif G

dòng k+1 : G

với x_0 là bất kỳ và không xuất hiện ở ngoài cấu trúc if...nif.

Nếu có dòng m và cấu trúc if...nif thì viết được dòng k+1.



Suy luận tự nhiên^[3]

- Qui tắc lượng từ hiện hữu e ($\exists e$) (tt)

Khi có $\exists x F$ thì “có ít nhất một” giá trị của x để bảo đảm sự hiện hữu của $\exists x F$, x_0 là đại diện cho tất cả các giá trị này của x .

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên^[3]

- Thí dụ : $\forall x (p(x) \rightarrow q(x)), \exists x p(x) \vdash \exists x q(x)$

1	$\forall x (p(x) \rightarrow q(x))$	tiền đề
2	$\exists x p(x)$	tiền đề
3	if x_0 $p(x_0)^{(*)}$	2 $[x_0/x]$
4	$p(x_0) \rightarrow q(x_0)$	$\forall e$ 1
5	$q(x_0)$	$\rightarrow e$ 3,4
6	nif $\exists x q(x)$	$\exists i$ 5
7	$\exists x q(x)$	$\exists e$ 2, 3-6

(^(*)) Lý do để có dòng 3 là do qui định của qui tắc lượng từ hiện hữu $\exists e$)



Suy luận tự nhiên^[3']

•	<u>Thí dụ</u> :	$\forall x (p(x) \rightarrow q(x)), \exists x p(x) \vdash \exists x q(x)$
1	$\forall x (p(x) \rightarrow q(x))$	tiền đề
2	$\exists x p(x)$	tiền đề
3	if x_0 $p(x_0)$	2 $[x_0/x]$
4	$p(x_0) \rightarrow q(x_0)$	$\forall e$ 1
5	nif $q(x_0)$	$\rightarrow e$ 3,4
6	$q(x_0)$	$\exists e$ 2, 3-5
7	$\exists x \bar{q}(x)$	$\exists i$ 6

* Dòng 6 không hợp lệ vì x_0 thoát ra ngoài cấu trúc if...nif.

Suy luận tự nhiên^[3']

- Thí dụ : $\forall x (q(x) \rightarrow r(x)), \exists x (p(x) \wedge q(x)) \vdash \exists x (p(x) \wedge r(x))$

1		$\forall x (q(x) \rightarrow r(x))$	tiền đề
2		$\exists x (p(x) \wedge q(x))$	tiền đề
3	if x_0	$p(x_0) \wedge q(x_0)$	2[x ₀ /x]
4		$p(x_0)$	$\wedge e$ 3
5		$q(x_0)$	$\wedge e$ 3
6		$q(x_0) \rightarrow r(x_0)$	$\forall e$ 1
7		$r(x_0)$	$\rightarrow e$ 5,6
8		$p(x_0) \wedge r(x_0)$	$\wedge i$ 4,7
9	nif	$\exists x (p(x) \wedge r(x))$	$\exists i$ 8
10		$\exists x (p(x) \wedge r(x))$	$\exists e$ 2, 3-9



Suy luận tự nhiên^[3']

- Thí dụ : $\exists x p(x), \forall x \forall y (p(x) \rightarrow q(y)) \vdash \forall y q(y)$

1	$\forall x \forall y (p(x) \rightarrow q(y))$	tiền đề
2	$\exists x p(x)$	tiền đề
3	if y_0	
4	if x_0 $p(x_0)$	2 $[x_0/x]$
5	$p(x_0) \rightarrow q(y_0)$	$\forall x \forall y \in 1$
6	nif $q(y_0)$	$\rightarrow e$ 4,5
7	nif $q(y_0)$	$\exists x \in 2,4-6$
8	$\forall y q(y)$	$\forall y i$ 3-7



Suy luận tự nhiên^[3']

- Định lý :

(a) $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$

(b) $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên

- Hiện hữu tự do (của 1 biến) đối với 1 công thức.

Thí dụ :

$G = p(x) \wedge (\exists x)q(x)$, x (trong $p(x)$) là hiện hữu tự do (đối với G) của biến x .

$F = (\forall x)(r(x) \vee G)$, không có hiện hữu tự do (đối với F) của biến x .

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)



Suy luận tự nhiên^[3']

- Định lý :

G không chứa hiện hữu tự do của x (trong G).

$$(a) \quad \forall x F \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G)$$

$$(b) \quad \forall x F \vee G \equiv \forall x (F \vee G)$$

$$(c) \quad \exists x F \wedge G \equiv \exists x (F \wedge G)$$

$$(d) \quad \exists x F \vee G \equiv \exists x (F \vee G)$$

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên^[3']

- Định lý :

G không chứa hiện hữu tự do của x (trong G).

$$(e) \quad \forall x (G \rightarrow F) \equiv G \rightarrow \forall x F$$

$$(f) \quad \exists x (F \rightarrow G) \equiv \forall x F \rightarrow G$$

$$(g) \quad \forall x (F \rightarrow G) \equiv \exists x F \rightarrow G$$

$$(h) \quad \exists x (G \rightarrow F) \equiv G \rightarrow \exists x F$$

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên^[3]

- Định lý :

$$(a) \quad \forall x F \wedge \forall x G \quad \equiv \quad \forall x (F \wedge G)$$

$$(b) \quad \exists x F \vee \exists x G \quad \equiv \quad \exists x (F \vee G)$$

$$(c) \quad \forall x \forall y F \quad \equiv \quad \forall y \forall x F$$

$$(d) \quad \exists x \exists y F \quad \equiv \quad \exists y \exists x F$$

cuu duong than cong . com



Bài tập

Chương 3 : Luận lý vị từ

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com



Suy luận tự nhiên^[3]

0. Chứng minh các định lý trong phần giáo khoa.

1. Chứng minh :

a. $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

b. $t_1 = t_2 \vdash (t + t_2) = (t + t_1)$

c. $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash$
 $(y = (x + x)) \rightarrow ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

2. Dịch $\exists x \exists y (\neg(x = y) \wedge \forall z ((z = x) \vee (z = y)))$ ra ngôn ngữ tự nhiên.



Suy luận tự nhiên^[3']

3. Dịch ra LLVT :

- a. Có đúng 3 phần tử phân biệt.
- b. Có nhiều nhất 3 phần tử phân biệt.
- c. Chỉ một số hữu hạn các phần tử phân biệt.

4. Chứng minh :

$F \rightarrow (q_1 \wedge q_2) \vdash (F \rightarrow q_1) \wedge (F \rightarrow q_2)$ (trong LLMĐ)

$F \rightarrow \forall x q(x) \vdash \forall x (F \rightarrow q(x))$ (trong LLVT) với x không tự do trong F .

$\forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash \forall x p(x) \rightarrow \forall x q(x).$



Suy luận tự nhiên^[3]

5. Chứng minh :

a. $\forall x p(x) \vdash \forall y p(y)$

b. $\forall x (p(x) \rightarrow q(x)) \vdash (\forall x \neg q(x)) \rightarrow (\forall x \neg p(x))$

c. $\forall x (p(x) \rightarrow \neg q(x)) \vdash \neg(\exists x (p(x) \wedge q(x)))$

cuu duong than cong . com



Hết slide

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

