SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

Bài giảng điện tử

Nguyễn Hồng Lộc

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2013.

Những khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Độ sai lệch giữa giá trị gần đúng và giá trị chính xác được gọi là sai số.

Định nghĩa

Số $\mathbf{a}$ *được gọi là số gần đúng của số chính xác* A, *kí hiệu là* $\mathbf{a} \approx A$ *(đọc là* $\mathbf{a}$ *xấp xỉ* A*) nếu* $\mathbf{a}$ *khác* A *không đáng kể và được dùng thay cho* A *trong tính toán.*

Định nghĩa

Đại lượng $\Delta = |a - A|$ *được gọi là sai số thật sự của số gần đúng* $\boldsymbol{a}$.

Định nghĩa

Đại lượng $\Delta = |a - A|$ *được gọi là* *sai số thật sự* *của số gần đúng* a. *Trong thực tế, do không biết số chính xác* A*, ta ước lượng* *một đại lượng dương* Δ_a *càng bé càng tốt thỏa điều kiện* $|A - a| \leqslant \Delta_a$ *được gọi là* *sai số tuyệt đối* *của số gần đúng* a.

Chú ý. Trong thực tế ta sẽ ký hiệu $A = a \pm \Delta_a$.

Định nghĩa

*Sai số tương đối của số gần đúng **a** so với số chính xác A là đại lượng δ_a được tính theo công thức*

$$\delta_a = \frac{|A - a|}{|A|}.$$

Chú ý. Trong nhiều trường hợp, nếu không biết A ta có thể thay thế $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}100\%$

Ví dụ 1. Giả sử $A = \pi$; $a = 3.14$. Do $3.13 = 3.14 - 0.01 < \pi < 3.14 + 0.01 = 3.15$, nên ta có thể chọn $\Delta_a = 0.01$. Mặt khác, $3.138 = 3.14 - 0.002 < \pi < 3.14 + 0.002 = 3.142$, do đó ta cũng có thể chọn $\Delta_a = 0.002$. Như vậy, với cùng một giá trị gần đúng, có thể có nhiều sai số tuyệt đối khác nhau. Trong trường hợp này ta chọn giá trị nhỏ nhất của chúng.

Ví dụ 2. Vận tốc của một vật thể đo được là $v = 2.8m/s$ với sai số tương đối $\delta_v = 0.5\%$. Khi đó sai số tuyệt đối là

$$\Delta_v = v\delta_v = \frac{0.5}{100}.2.8m/s = 0.014m/s.$$

Ví dụ 3. Đo độ dài hai đoạn thẳng ta được $a = 10cm$ và $b = 1cm$ với $\Delta_a = \Delta_b = 0.01cm$. Khi đó $\delta_a = \frac{0.01}{10} = 0.1\%$, $\delta_b = \frac{0.01}{1} = 1\%$ hay $\delta_b = 10\delta_a$. Từ đó suy ra phép đo a chính xác hơn phép đo b mặc dù $\Delta_a = \Delta_b$. Như vậy, độ chính xác của một phép đo thể hiện qua sai số tương đối.

Chữ số có nghĩa

Mọi số thực a có thể được biểu diễn dưới dạng thập phân hữu hạn hoặc vô hạn

$$a = \pm(\alpha_m\alpha_{m-1}\ldots\alpha_1\alpha_0.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-n}) = \pm\sum_{k=-n}^{m}\alpha_k 10^k,\ m,n\in\mathbb{N},\ m\geqslant 0,\ n\geqslant 1,\ \alpha_m\neq 0,$$

$\alpha_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.

Ví dụ 1. $324.59 = 3\times 10^2 + 2\times 10^1 + 4\times 10^0 + 5\times 10^{-1} + 9\times 10^{-2}$.

Một số viết ở dạng thập phân có thể gồm nhiều chữ số. Ví dụ **20.25** có 4 chữ số, **0.03047** có 6 chữ số.

Định nghĩa

Những chữ số có nghĩa của một số là những chữ số của số đó kể từ chữ số khác không đầu tiên tính từ trái sang phải.

Ví dụ 2. Số 20.25 có 4 chữ số có nghĩa. Số 0.03047 cũng có 4 chữ số có nghĩa.

Định nghĩa

Làm tròn một số thập phân $\boldsymbol{a}$ *là bỏ một số các chữ số bên phải* $\boldsymbol{a}$ *sau dấu chấm thập phân để được một số* $\tilde{\boldsymbol{a}}$ *ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với* $\boldsymbol{a}$.

Quy tắc. Để làm tròn đến chữ số thứ k sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ sau dấu chấm thập phân là α_{k+1}.

Định nghĩa

Làm tròn một số thập phân a *là bỏ một số các chữ số bên phải* a *sau dấu chấm thập phân để được một số* $\tilde{a}$ *ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với* a.

Quy tắc. Để làm tròn đến chữ số thứ k sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ sau dấu chấm thập phân là α_{k+1}. Nếu $\alpha_{k+1} \geqslant 5$, ta tăng α_k lên 1 đơn vị;

Định nghĩa

*Làm tròn một số thập phân **a** là bỏ một số các chữ số bên phải **a** sau dấu chấm thập phân để được một số $\tilde{a}$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất so với **a**.*

Quy tắc. Để làm tròn đến chữ số thứ k sau dấu chấm thập phân, ta xét chữ số thứ $k+1$ sau dấu chấm thập phân là α_{k+1}. Nếu $\alpha_{k+1} \geqslant 5$, ta tăng α_k lên 1 đơn vị; còn nếu $\alpha_{k+1} < 5$ ta giữ nguyên chữ số α_k. Sau đó bỏ phần đuôi từ chữ số α_{k+1} trở đi.

Ví dụ 3. Làm tròn số $\pi = 3.1415926535...$ đến chữ số thứ 4,3,2 sau dấu chấm thập phân nhận được các số gần đúng lần lượt là $3.1416; 3.142; 3.14$.

Định nghĩa

Sai số thực sự của $\widetilde{a}$ so với a được gọi là sai số làm tròn. Vậy $\theta_{\widetilde{a}} = |a - \widetilde{a}|$.

Sai số tuyệt đối của $\widetilde{a}$ so với A được đánh giá như sau: $|\widetilde{a} - A| = |(\widetilde{a} - a) + (a - A)| \leqslant |\widetilde{a} - a| + |a - A| \leqslant \theta_{\widetilde{a}} + \Delta_a = \Delta_{\widetilde{a}}$. Vì $\theta_{\widetilde{a}} \geqslant 0$ nên $\Delta_{\widetilde{a}} \geqslant \Delta_a$. Do đó sau khi làm tròn sai số tăng lên. Vì vậy, khi tính toán ta tránh làm tròn các phép toán trung gian, chỉ nên làm tròn kết quả cuối cùng.

Sự làm tròn số trong bất đẳng thức

Trường hợp làm tròn số trong bất đẳng thức, ta sử dụng khái niệm làm tròn lên và làm tròn xuống. Làm tròn lên hay làm tròn xuống cần lưu ý đến chiều bất đẳng thức.

Ví dụ 4. $a < 13.9236$ khi làm tròn lên đến 2 chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân ta được $a < 13.93$ và $b > 78.6789$ khi làm tròn xuống đến 2 chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân ta được $b > 78.67$.

Chữ số đáng tin

Định nghĩa

Cho $a \approx A$. *Chữ số* α_k *trong phép biểu diễn dưới dạng thập phân được gọi là* *đáng tin*, *nếu* $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2}.10^k$. *Trong trường hợp ngược lại, chữ số* α_k *được gọi là* *không đáng tin*.

Ví dụ 5. Cho số gần đúng $a = 3.7284$ với sai số tuyệt đối là $\Delta_a = 0.0047$ có 3 chữ số đáng tin là $3, 7, 2$ và 2 chữ số không đáng tin là $8, 4$

Cách viết số gần đúng

Chúng ta viết số gần đúng a của số chính xác A với sai số tuyệt đối Δ_a theo quy tắc sau:

1. Viết số gần đúng a kèm theo sai số tuyệt đối Δ_a dưới dạng $a \pm \Delta_a$. Ví dụ 17.358 ± 0.003. Cách này thường được dùng để biểu diễn các kết quả tính toán hoặc phép đo.
2. Viết số gần đúng theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin. Điều này có nghĩa là sai số tuyệt đối Δ_a không lớn hơn một nửa đơn vị của chữ số cuối cùng bên phải.

Ví dụ $a = 23.54$ thì sai số tuyệt đối $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2}.10^{-2} = 0.005$, trong khi nếu viết $a = 23.5400$ thì sai số tuyệt đối $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2}.10^{-4} = 0.00005$. Cách này thường dùng để trình bày các bảng số.

Công thức tổng quát của sai số

Cho hàm số khả vi liên tục $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và giả sử biết sai số tuyệt đối Δ_{x_i} của các đối số x_i $(i = \overline{1..n})$. Gọi X_i, Y và x_i, y $(i = \overline{1..n})$ là các giá trị chính xác và các giá trị gần đúng của đối số và hàm số. Khi đó $|Y - y| = |f(X_1, X_2, \ldots, X_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| . |X_i - x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| . \Delta_{x_i}$. Vậy sai số tuyệt đối của hàm số y là $\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| . \Delta_{x_i}$

Sai số tương đối của hàm số y là

$$\delta_y = \frac{\Delta_y}{|y|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| .\Delta_{x_i}}{|f|}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right| .\Delta_{x_i}$$

Công thức tổng quát của sai số

Ví dụ 6. Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích hình cầu $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, biết đường kính $d = 3.70cm \pm 0.05cm$ và $\pi = 3.14 \pm 0.0016$.

Xem π và d là những đối số của hàm số V, ta có

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6}d^3 = \frac{1}{6} \times (3.70)^3 \text{ và}$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2 = \frac{1}{2} \times (3.14) \times (3.70)^2.$$

Vậy $\Delta_V = \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right|.\Delta_\pi + \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right|.\Delta_d = \frac{1}{6} \times (3.70)^3 \times 0.0016 + \frac{1}{2} \times (3.14) \times (3.70)^2 \times 0.05 = 1.0882.$

Do đó $V = \frac{1}{6}\pi.d^3 = 26.5084cm^3 \pm 1.0882cm^3$ và

$\delta_V = \frac{1.0882}{26.5084} = 0.0411.$

Sai số của tổng đại số

Xét hàm số $y = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$. Khi đó $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right| = 1, (i = \overline{1..n})$. Do đó, sai số tuyệt đối của y là $\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \ldots + \Delta_{x_n}$ và sai số tương đối của y là $\delta_y = \dfrac{\Delta_y}{|y|}$.

Ví dụ 7. Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của $y = a + b + c$ với $a = 47.132 \pm 0.003$; $b = 47.111 \pm 0.02$; $c = 45.234 \pm 0.5$.

Sai số tuyệt đối của y là

$$\Delta_y = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = 0.003 + 0.02 + 0.5 = 0.523.$$

Do $Y = y \pm \Delta_y = 139.477 \pm 0.523$ nên sai số tương đối của y là $\delta_y = \dfrac{\Delta_y}{|y|} = 0.0037$.

Sai số của tích

Xét hàm số $y = x_1.x_2 \dots x_n$. Khi đó $\left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln y\right| = \frac{1}{|x_i|}$, $(i = \overline{1..n})$. Do đó, sai số tương đối của y là $\delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \dots + \delta_{x_n}$ và sai số tuyệt đối của y là $\Delta_y = \delta_y.|y|$.

Ví dụ 8. Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của $y = a.b.c$ với $a = 47.132 \pm 0.003; b = 47.111 \pm 0.02; c = 45.234 \pm 0.5$.

Ta có $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}, \delta_b = \dfrac{\Delta_b}{|b|}, \delta_c = \dfrac{\Delta_c}{|c|}$,

Sai số tương đối của y là $\delta_y = \delta_a + \delta_b + \delta_c = \dfrac{0.003}{47.132} + \dfrac{0.02}{47.111} + \dfrac{0.5}{45.234} = 0.0115.$

Do đó sai số tuyệt đối của y là

$$\Delta_y = \delta_y.|y| = \left(\frac{0.003}{47.132} + \frac{0.02}{47.111} + \frac{0.5}{45.234}\right) \times (47.132 \times 47.111 \times 45.234) = 1159.2503.$$

Bài tập

Bài 1. Biết A có giá trị gần đúng là $a = 3.5833$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.28\%$. Ta làm tròn a thành $a^* = 3.58$. Tính sai số tuyệt đối của a^*

Giải. Ta có

$$\Delta_{a^*} = \Delta_a + |a - a^*| = |a|\delta_a + |a - a^*| = 0.0134$$

Bài 2. Làm tròn đến hai chữ số lẻ sau dấu chấm thập phân của các số trong các biểu thức sau: $a = 12.6724$; $b = 1.5476$; $c \leqslant 12.8713$; $d \geqslant 1.2354$.

Giải.

- $a = 12.6724 \Rightarrow a \approx 12.67$.
- $b = 1.5476 \Rightarrow b \approx 1.55$.
- $c \leqslant 12.8713 \Rightarrow c \leqslant 12.88$.
- $d \geqslant 1.2354 \Rightarrow d \geqslant 1.23$.

Bài tập

Bài 3. Cho $a = 7.1696$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.83\%$. Tìm số chữ số đáng tin trong cách viết thập phân của a

Giải.

Chữ số đáng tin ở vị trí k thỏa : $\Delta_a \leqslant \frac{1}{2}10^k$

$\Rightarrow k \geqslant log(2\Delta_a) = log(2|a|\delta_a) = -0.92$

$k_{min} = 0$. Có một chữ số đáng tin

Bài tập

Bài 4. Cho biểu thức $f = x^3 + xy + y^3$. Biết $x = 1.9501 \pm 0.0050$ và $y = 3.4740 \pm 0.0083$. Tính sai số tuyệt đối của f

Giải.

$\Delta_f = |f'_x|\Delta_x + |f'_y|\Delta_y = |3x^2 + y|\Delta_x + |x + 3y^2|\Delta_y = |3 * 1.9501^2 + 3.4740| * 0.0050 + |1.9501 + 3 * 3.4740^2| * 0.0083 = 0.3912$

Bài tập

Bài 5. Cho

$a = 15.00 \pm 0.02$, $b = 0.123 \pm 0.001$, $c = 137 \pm 0.5$.

Hãy tính sai số tuyệt đối của

- $A = a + b + c$
- $B = 20a - 100b + c$
- $C = a + bc$.

Giải.

- $A = a + b + c \Rightarrow \Delta_A = \Delta_a + \Delta_b + \Delta_c = 0.521.$
- $B = 20a - 100b + c \Rightarrow \Delta_B = 20.\Delta_a + 100.\Delta_b + \Delta_c = 1.$
- $C = a + bc \Rightarrow \Delta_C = \Delta_a + |c|.\Delta_b + |b|.\Delta_c = 0.2185.$

Bài 6. Cho hàm $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 7$ và $x = 1.234 \pm 0.00015$. Tính Δ_f.

Giải. Ta có $f'(x) = 15x^4 - 4x$ và $\Delta_f = |f'(x)|.\Delta_x$ nên

$\Delta_f = |15 \times (1.234)^4 - 4 \times 1.234| \times 0.00015 = 0.0045$