PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

Bài giảng điện tử

Nguyễn Hồng Lộc

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2013.

Đặt vấn đề

Mục đích của chương này là tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

với $f(x)$ là hàm liên tục trên một khoảng đóng hay mở nào đó.

Những vấn đề khó khăn khi giải pt (1)

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$, với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một cách đơn giản. Với $n = 3, 4$ thì công thức tìm nghiệm cũng khá phức tạp. Còn với $n \geqslant 5$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Mặt khác, khi $f(x) = 0$ là phương trình siêu việt, ví dụ: $\cos x - 5x = 0$ thì không có công thức tìm nghiệm.
- Những hệ số của phương trình (1) ta chỉ biết một cách gần đúng.

Khi đó việc xác định chính xác nghiệm của phương trình (1) không có ý nghĩa. Do đó việc tìm những phương pháp giải gần đúng phương trình (1) cũng như đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng tìm được có một vai trò quan trọng.

Định nghĩa

Khoảng đóng $[a, b]$ *(hoặc khoảng mở* (a, b)*) mà trên đó tồn tại duy nhất 1 nghiệm của phương trình (1) được gọi là khoảng cách ly nghiệm.*

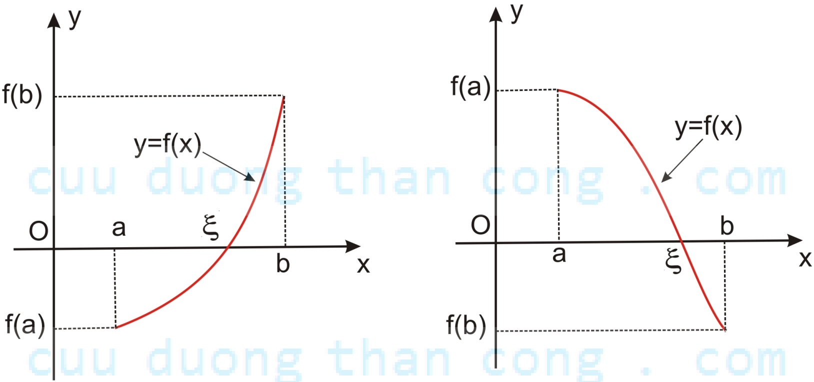
Việc tính nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) được tiến hành theo 2 bước sau:

1. Tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1).
2. Trong từng khoảng cách ly nghiệm, tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng một phương pháp nào đó với sai số cho trước.

Khoảng cách ly nghiệm

Định lý

Nếu hàm số $f(x)$ *liên tục trong* (a, b) *và* $f(a).f(b) < 0$, $f'(x)$ *tồn tại và giữ dấu không đổi trong* (a, b) *thì trong* (a, b) *chỉ có 1 nghiệm thực* ξ *duy nhất của phương trình (1).*


y
f(b)
y=f(x)
O
a
ξ
b
x
f(a)
y
f(a)
y=f(x)
O
b
a
ξ
x
f(b)

Phương pháp giải tích

Ví dụ

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$

Giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-1	3	-1	3	$+\infty$

Phương trình có nghiệm nằm trong các khoảng $[-2, -1]; [-1, 1]; [1, 2]$.

Ví dụ

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^5 + x - 12 = 0$

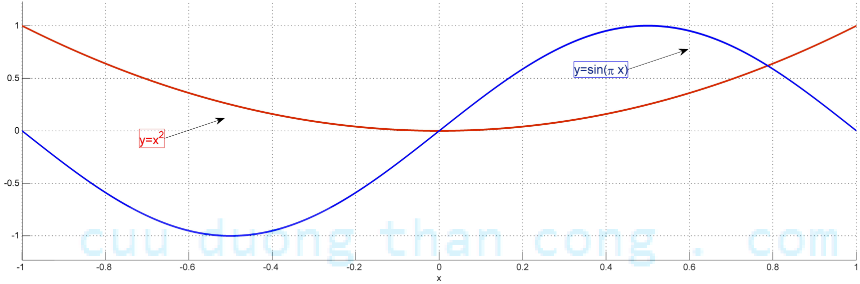
Giải. Ta có $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0, \forall x$ nên $f(x)$ đơn điệu tăng. Mặt khác, $f(0) < 0, f(2) > 0$ nên $f(x) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm trong $[0, 2]$.

Phương pháp hình học

Ví dụ

Tìm những khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = x^2 - \sin \pi x = 0.$

Giải. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \sin \pi x$. Vẽ đồ thị 2 hàm $y = x^2$ và $y = \sin \pi x$.



Phương trình có 1 nghiệm $x = 0$ và 1 nghiệm nằm trong đoạn $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Vậy khoảng cách ly nghiệm của $f(x) = 0$ là $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; $[\frac{1}{2}, 1]$.

Sai số tổng quát

Định lý

Giả sử hàm $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$, *khả vi trong* (a, b). *Nếu* x^* *là nghiệm gần đúng của nghiệm chính xác* $\overline{x}$ *trong* $[a, b]$ *và* $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \geqslant m > 0$ *thì công thức đánh giá sai số tổng quát là*

$$|x^* - \overline{x}| \leqslant \frac{|f(x^*)|}{m}$$

Chứng minh:

Áp dụng định lý Lagrange:

$|f(x^*) - f(\overline{x})| = |f'(c)(x^* - \overline{x})|$

$\rightarrow |x^* - \overline{x}| = \frac{|f(x^*) - 0|}{|f'(c)|} \leqslant \frac{|f(x^*)|}{m}$

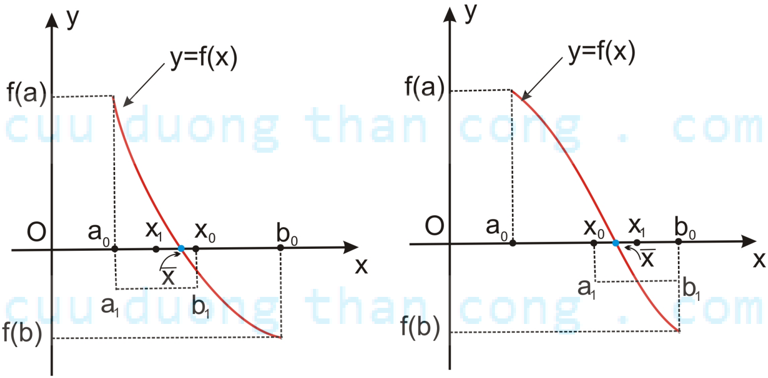
Ví dụ: Xét phương trình

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 12 = 0$ trong đoạn $[-2, -1]$ có nghiệm gần đúng $x^* = -1.37$. Khi đó

$$m = \min_{x\in[-2,-1]} |f'(x)| = \min_{x\in[-2,-1]} |3x^2 - 10x| = 13$$

Do đó $|x^* - \overline{x}| \leqslant \dfrac{|f(-1.37)|}{13} \approx 0.0034.$

Phương pháp chia đôi



Nội dung phương pháp

Giả sử (a, b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1). Nội dung của phương pháp chia đôi như sau:

- Giả sử phương trình (1) có nghiệm chính xác $\overline{x}$ trong khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Đặt $a_0 = a, b_0 = b$, $d_0 = b_0 - a_0 = b - a$ và $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ là điểm giữa của đoạn $[a, b]$.

- Nếu $f(x_0) = 0$ thì x_0 chính là nghiệm và dừng lại. Ngược lại nếu $f(x_0).f(a_0) < 0$ thì đặt $a_1 = a_0, b_1 = x_0$. Nếu $f(x_0)f(b_0) < 0$ thì đặt $a_1 = x_0, b_1 = b_0$. Như vậy, ta được $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ và
$$d_1 = b_1 - a_1 = \frac{d_0}{2} = \frac{b-a}{2}.$$
- Tiếp tục quá trình chia đôi đối với $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_{n-1}, b_{n-1}]$ n lần, ta được
$$\begin{cases} a_n \leqslant \overline{x} \leqslant b_n, \ a_n \leqslant x_n = \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n \\ f(a_n).f(b_n) < 0, \ d_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \end{cases}$$

Công thức đánh giá sai số

$$|x_n - \overline{x}| = \left|\frac{a_n + b_n}{2} - \overline{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Ưu, nhược điểm của phương pháp

- **Ưu điểm.** Đơn giản, dễ lập trình trên máy tính, vì mỗi lần áp dụng phương pháp chia đôi chỉ phải tính 1 giá trị của hàm số tại điểm giữa của khoảng.
- **Nhược điểm.** Tốc độ hội tụ chậm, độ chính xác không cao.

Ví dụ

Cho phương trình $f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$ *trong khoảng ly nghiệm* $[0, 1]$. *Bằng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm gần đúng* x_5 *và đánh giá sai số của nó.*

Giải.

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	+
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	-
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	+
4	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{32}$	-
5	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{27}{64}$	+

Vậy $x_5 = \dfrac{27}{64}$ và $\Delta_{x_5} = \dfrac{1-0}{2^6} = \dfrac{1}{64}$.

Bài 1. Cho phương trình $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 14x - 22 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[3, 4]$. Tìm nghiệm gần đúng x_5 của phương trình theo phương pháp chia đôi

Đáp số: $x_5 \approx 3.2656$

Bài 2. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng ở lần lặp thứ 5 (x_5) của phương trình $f(x) = \sqrt{x} - \cos x = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0, 1]$. Sử dụng công thức đánh giá sai số tổng quát, tính sai số của nó và so sánh với sai số tính theo công thức đánh giá sai số của phương pháp chia đôi.

Giải.

Giải. Ta có $f(0) < 0$ và $f(1) > 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0	1	$\frac{1}{2}$	-
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$+$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	-
3	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{16}$	$+$
4	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{21}{32}$	$+$
5	$\frac{5}{8}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{41}{64}$	-

Vậy $x_5 = \dfrac{41}{64}, \Delta_{x_5} = \dfrac{1}{64} = 0.015625.$

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x),$

$f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} + \cos x > 0, \forall x \in [\frac{5}{8}, \frac{21}{32}].$

Xét $\overline{x} \in [\frac{5}{8}, \frac{21}{32}], m = \min |f'(x)| = f'(\frac{5}{8}) = 1.2175,$

$|x^* - \overline{x}| \leqslant \Delta = \dfrac{|f(\frac{41}{64})|}{m} \approx 0.0011.$

Bài 3. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau

$x = \tan x$ trong khoảng cách ly nghiệm $[4, 4.5]$

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi

$\Delta_{x_n} = \dfrac{4.5 - 4}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 25$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 25$ là $n = 5$.

Đặt $f(x) = x - \tan x$. Ta có $f(4) > 0, f(4.5) < 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	4	4.5	4.25	+
1	4.25	4.5	4.375	+
2	4.375	4.5	4.4375	+
3	4.4375	4.5	4.46875	+
4	4.46875	4.5	4.484375	+
5	4.484375	4.5	4.4921875	+

Vậy $\overline{x} \approx 4.4921875$

Bài 4. Sử dụng phương pháp chia đôi tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-2} của phương trình sau
$2 + \cos(e^x - 2) - e^x = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[0.5, 1.5]$.

Giải. Sai số của phương pháp chia đôi
$\Delta_{x_n} = \dfrac{1.5 - 0.5}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 50$. Vậy n nhỏ nhất thỏa mãn $2^n > 50$ là $n = 6$.
Đặt $f(x) = 2 + \cos(e^x - 2) - e^x$. Ta có
$f(0.5) > 0, f(1.5) < 0$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	0.5	1.5	1	+
1	1	1.5	1.25	-
2	1	1.25	1.125	-
3	1	1.125	1.0625	-
4	1	1.0625	1.03125	-
5	1	1.03125	1.015625	-
6	1	1.015625	1.0078125	-

Vậy $\overline{x} \approx 1.0078125$

Định nghĩa

Hàm $g(x)$ *được gọi là hàm co trong đoạn* $[a, b]$ *nếu tồn tại một số* $q \in [0, 1)$, *gọi là hệ số co, sao cho*

$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leqslant q|x_1 - x_2|$.

Định lý

Nếu $g(x)$ *là hàm liên tục trên* $[a, b]$, *khả vi trong* (a, b) *và* $\exists q \in [0, 1)$ *sao cho*

$\forall x \in (a, b), |g'(x)| \leqslant q$ *thì* $g(x)$ *là hàm co trên* $[a, b]$ *với hệ số co là* q.

Ví dụ

Xét hàm $g(x) = \sqrt[3]{4x+1}$ *trên đoạn* $[1, 2]$ *ta có* $|g'(x)| = \left|\dfrac{4}{3\sqrt[3]{(1+4x)^2}}\right| \leqslant \dfrac{4}{3\sqrt[3]{5^2}} < 1$. *Do đó* $g(x)$ *là hàm co trên* $[1, 2]$ *với hệ số co* $q = 0.46$

Ví dụ

Xét hàm $g(x) = \sqrt[3]{4x+1}$ *trên đoạn* $[0, 1]$ *ta có* $|g'(0)| = \dfrac{4}{3} > 1$. *Do đó* $g(x)$ *không là hàm co trên* $[0, 1]$

Nội dung phương pháp

Giả sử $[a, b]$ là khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Nội dung của phương pháp lặp đơn là đưa phương trình này về phương trình tương đương $x = g(x)$ sao cho $g(x)$ là hàm co trên $[a, b]$. Xây dựng dãy lặp $x_n = g(x_{n-1})$, khi đó với $x_0 \in [a, b]$ bất kỳ, dãy lặp sẽ hội tụ về nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý có nhiều cách đưa phương trình $f(x) = 0$ về dạng $x = g(x)$.

Ví dụ, đối với pt $x^3 - x - 1 = 0$ có thể viết

- $x = x^3 - 1$
- $x = \sqrt[3]{1 + x}$
- $x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

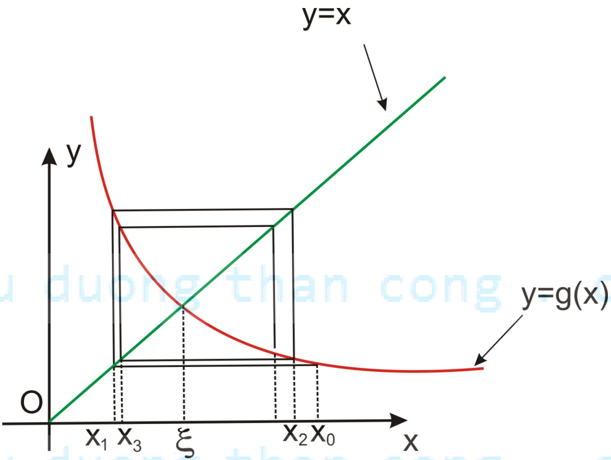
Điều quan trọng là phải chọn hàm $g(x)$ sao cho $g(x)$ co trên $[a, b]$

Nguyên lý ánh xạ co

Giả sử $g(x)$ là hàm co trên đoạn $[a, b]$ với hệ số co là q. Ngoài ra $g : [a, b] \to [a, b]$. Khi đó với mọi giá trị x_0 ban đầu trong $[a, b]$, dãy lặp (x_n) được xác định theo công thức $x_n = g(x_{n-1})$ sẽ hội tụ về nghiệm duy nhất $\overline{x}$ của phương trình $x = g(x)$ và ta có công thức đánh giá sai số

$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$: tiên nghiệm

$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$: hậu nghiệm



Chú ý. Từ công thức đánh giá sai số, ta thấy sự hội tụ của phương pháp lặp càng nhanh nếu q càng bé.

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$ bằng phương pháp lặp với độ chính xác 10^{-4}, biết khoảng cách ly nghiệm $(0, 1)$.

Giải. Có nhiều cách đưa về phương trình tương đương dạng $x = g(x)$.

- $x = 5x^3 - 19x + 3 = g_1(x)$

- $x = \sqrt[3]{\dfrac{(20x - 3)}{5}} = g_2(x)$
- $x = \dfrac{5x^3 + 3}{20} = g_3(x)$.

Theo nguyên lý ánh xạ co quá trình lặp hội tụ khi $|g'(x)| \leqslant q < 1$ trên $[0, 1]$. Ta có

- $|g_1'(x)| = |15x^2 - 19| > 1$ trên $[0, 1]$.
- $|g_2'(x)| = \left| \dfrac{4}{3\sqrt[3]{\left(\frac{20x-3}{5}\right)}} \right|$ không bé hơn 1 với mọi $x \in [0, 1]$
- $|g_3'(x)| = \left| \dfrac{3x^2}{4} \right| < 1$ trên $[0, 1]$.

Như vậy, ta có thể dùng $g_3(x)$ với
$|g_3'(x)| = \left|\frac{3x^2}{4}\right| \leqslant 0.75 = q < 1$ trên $[0, 1]$ và có công thức lặp

$$x_n = \frac{5x_{n-1}^3 + 3}{20}$$

Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-4}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-4}.(1-q)}{q} = \frac{10^{-4}.(1-0.75)}{0.75} = 0.00003$$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0.75	
1	0.25547	0.49453
2	0.15417	0.1013
3	0.15092	0.00325
4	0.15086	0.00006
5	0.15086	0

Vậy nghiệm gần đúng là 0.15086 ở lần lặp thứ 5.

Bài 1. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{2x+13}$ thỏa điều kiện lặp đơn trên $[2,3]$. Sử dụng phương pháp lặp đơn, chọn $x_0 = 2.6$, tính số lần lặp nhỏ nhất để được nghiệm với sai số nhỏ hơn 10^{-10}.

Giải. $g(x) = \sqrt[3]{2x+13} \to g'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+13)^2}} \to$
$q = \frac{2}{3\sqrt[3]{17^2}}$. Ta có:

$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq 10^{-10} \to n \geq \frac{\ln \frac{(1-q)10^{-10}}{|x_1-x_0|}}{\ln q} \approx 8.56$$

Đáp số $n = 9$

Bài 2. Cho phương trình $x = \sqrt[3]{5x + 10}$ thỏa điều kiện lặp đơn trên $[2, 3]$. Sử dụng phương pháp lặp đơn, chọn $x_0 = 2.9$, tìm nghiệm gần đúng x_2 và sai số của nó theo công thức tiên nghiệm.

Giải.

$X = g(X), x_2 = 2.9053$

$q = \max|g'(x)|, \Delta x_2 = \frac{q^2}{1-q}|g(x_0) - x_0|$

$\Delta x_2 = 0.0003$

Bài tập

Bài 3. Mỗi một hàm sau đây đều có cùng chung điểm bất động $\overline{x}$ là nghiệm của phương trình $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

1. $g_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$
2. $g_2(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3 - x^4}{2}}$
3. $g_3(x) = \sqrt{\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}}$
4. $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

Hãy thực hiện bốn lần lặp cho mỗi hàm $g_k(x), k = 1, 2, 3, 4$ xác định ở trên với cùng giá trị lặp ban đầu $x_0 = 1$ và so sánh kết quả với nhau. Hàm nào cho chúng ta dãy lặp hội tụ về nghiệm tốt hơn?

Giải. Với $x_0 = 1$ ta có

n	x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$	$g_3(x_n)$	$g_4(x_n)$
1	x_1	1.1892	1.2247	1.1547	1.1429
2	x_2	1.0801	0.9937	1.1164	1.1245
3	x_3	1.1497	1.2286	1.1261	1.1241
4	x_4	1.1078	0.9875	1.1236	1.1241

Như vậy, hàm $g_4(x)$ cho ta dãy lặp hội tụ về nghiệm tốt hơn.

Bài tập

Bài 4. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-3} cho phương trình sau $x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ trong đoạn $[3, 4]$, chọn $x_0 = 3.5$

Giải.

$x^3 - 3x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3 + \dfrac{5}{x^2} = g(x)$. Ta có

$|g'(x)| = |-\dfrac{10}{x^3}| \leqslant \dfrac{10}{27}$. Vậy hệ số co $q = \dfrac{10}{27}$.

Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-3}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-3}.(1-q)}{q} =$$

$$= \frac{10^{-3}.(1-\frac{10}{27})}{\frac{10}{27}} = 0.0017$$

Chọn $x_0 = 3.5 \in [3,4]$. Tính $x_n, n = 1,2,\ldots$ theo công thức $x_n = 3 + \dfrac{5}{x_{n-1}^2}$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	3.5	
1	3.4082	0.0918
2	3.4305	0.0222
3	3.4249	0.0056
4	3.4263	0.0014

Vậy nghiệm gần đúng là 3.4263 ở lần lặp thứ 4.

Bài tập

Bài 5. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-3} cho phương trình sau $x^3 - x - 1 = 0$ trong đoạn $[1, 2]$, chọn $x_0 = 1.5$

Giải.

$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+1} = g(x)$. Ta có $|g'(x)| = |\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}| \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$. Vậy hệ số co $q = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$.

Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-3}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-3}.(1-q)}{q} =$$

$$= \frac{10^{-3}.(1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{4}})}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}} = 0.0038.$$

Chọn $x_0 = 1.5 \in [1, 2]$. Tính $x_n, n = 1, 2, \ldots$ theo công thức $x_n = \sqrt[3]{x_{n-1} + 1}$

n	x_n	$\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
0	1.5	
1	1.3572	0.1428
2	1.3309	0.0263
3	1.3259	0.0050
4	1.3249	0.001

Vậy nghiệm gần đúng là 1.3249 ở lần lặp thứ 4.

Bài 6. Sử dụng phương pháp lặp, tìm nghiệm gần đúng với sai số nhỏ hơn 10^{-3} cho phương trình sau $x = \dfrac{x^2 - e^x + 2}{3}$ trong đoạn $[0, 1]$, chọn $x_0 = 0.5$

Giải. $x = \dfrac{x^2 - e^x + 2}{3} = g(x)$. Ta có

$g'(x) = \dfrac{2x - e^x}{3}$, $g''(x) = \dfrac{2 - e^x}{3}$,

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$, $|g'(x)| = |\dfrac{2x - e^x}{3}| \leqslant$

$\max\{|g'(\ln 2)|, |g'(0)|, |g'(1)|\}$

$= \max\{0.2046, \dfrac{1}{3}, 0.2394\} = \dfrac{1}{3}$. Hệ số co $q = \dfrac{1}{3}$.

Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-3}$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{10^{-3}.(1-q)}{q} =$$

$$= \frac{10^{-3}.(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}} = 0.002.$$

Chọn $x_0 = 0.5 \in [0,1]$. Tính $x_n, n = 1, 2, \ldots$ theo công thức $x_n = \dfrac{x_{n-1}^2 - e^{x_{n-1}} + 2}{3}$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0.5	
1	0.2004	0.2996
2	0.2727	0.0724
3	0.2536	0.0191
4	0.2586	0.005
5	0.2573	0.0013

Vậy nghiệm gần đúng là **0.2573** ở lần lặp thứ 5.

Bài 7. Với phương trình $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = \dfrac{5}{x^2} + 2 = g(x)$. Ta có $g'(x) = -\dfrac{10}{x^3}$,
$|g'(x)| = |-\dfrac{10}{x^3}| < 1 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{10} \approx 2.15$. Do đó ta chọn $a = 2.5, b = 3$. Lúc này
$|g'(x)| = |-\dfrac{10}{x^3}| \leqslant \max\{|g'(2.5)|, |g'(3)|\} = 0.64$.
Vậy hệ số co $q = 0.64$.

Chọn $x_0 = 2.5 \Rightarrow x_1 = 2.8$ Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leqslant 10^{-4}$$

$$\Rightarrow (0.64)^n \leqslant \frac{10^{-4}.(1-0.64)}{0.3}$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(\frac{10^{-4}.(1-0.64)}{0.3})}{\ln 0.64} \approx 20.23 \Rightarrow n = 21$$

Bài 8. Với phương trình $x = 6^{-x}$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = 6^{-x} = g(x)$. Ta có $g'(x) = -6^{-x}\ln 6$, $|g'(x)| = |-6^{-x}\ln 6| < 1 \Leftrightarrow -x\ln 6 < \ln\frac{1}{\ln 6} \Leftrightarrow$ $x > \dfrac{\ln\ln 6}{\ln 6} \approx 0.3255$. Do đó ta chọn $a = 0.5, b = 1$. Lúc này $|g'(x)| = |-6^{-x}\ln 6| \leqslant \max\{|g'(0.5)|, |g'(1)|\} = 0.73$. Vậy hệ số co $q = 0.73$.

Chọn $x_0 = 0.5 \Rightarrow x_1 = 0.4082$ Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leqslant 10^{-4}$$

$$\Rightarrow (0.73)^n \leqslant \frac{10^{-4}.(1-0.73)}{0.0918}$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(\frac{10^{-4}.(1-0.73)}{0.0918})}{\ln 0.73} \approx 25.84 \Rightarrow n = 26$$

Bài 9. Với phương trình $x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, hãy xác định khoảng $[a, b]$ mà trong đó phương pháp lặp hội tụ. Đánh giá số lần lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác 10^{-4}

Giải. $x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) = g(x)$. Ta có

$$g'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{2},$$

$|g'(x)| = |\frac{\cos x - \sin x}{2}| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó ta chọn $a = 0, b = 1$.

Lúc này $|g'(x)| = |\dfrac{\cos x - \sin x}{2}| = |\dfrac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}}| \leqslant \max\{|g'(0)|, |g'(1)|\} = 0.5$. Vậy hệ số co $q = 0.5$.

Chọn $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.5$. Theo công thức đánh giá sai số ta có

$$|x_n - \overline{x}| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leqslant 10^{-4}$$

$$\Rightarrow (0.5)^n \leqslant \frac{10^{-4}.(1-0.5)}{0.5}$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(\frac{10^{-4}.(1-0.5)}{0.5})}{\ln 0.5} \approx 13.29 \Rightarrow n = 14.$$

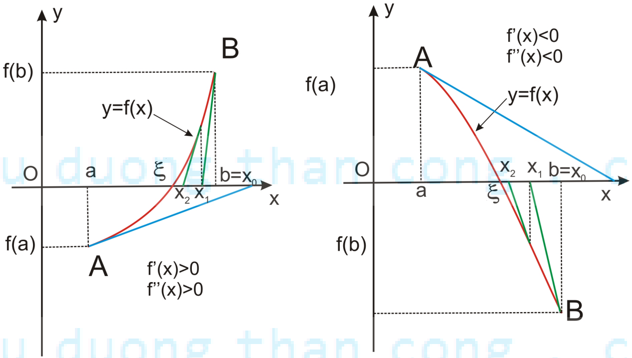
Cho phương trình $f(x) = 0, x \in (a, b)$
Gọi x^* là nghiệm gần đúng, $\overline{x}$ là nghiệm chính xác.
Áp dụng công thức Taylor:
$f(\overline{x}) = f(x^*) + f'(x^*)(\overline{x} - x^*) + o(\overline{x} - x^*)$
$\to 0 = f(\overline{x}) \approx f(x^*) + f'(x^*)(\overline{x} - x^*)$
$\to \overline{x} \approx x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$
Xây dựng dãy lặp Newton: $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

Từ công thức Newton suy ra

$$0 - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

Từ đây ta có thể suy ra cách xác định x_n từ x_{n-1} như sau: từ điểm $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ trên đồ thị, ta vẽ tiếp tuyến với đồ thị tại điểm này, x_n là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành.

Phương pháp Newton còn gọi là phương pháp tiếp tuyến


y
f(b)
B
y=f(x)
O
a
ξ
b=x_0
x_2
x_1
x
f(a)
A
f'(x)>0
f''(x)>0
y
f'(x)<0
f''(x)<0
A
f(a)
y=f(x)
O
x_2
x_1
b=x_0
a
ξ
x
f(b)
B

Phương pháp Newton sử dụng công thức sai số tổng quát: $\Delta x_n = |x_n - \overline{x}| \leq \frac{f(x_n)}{m}$

Với $m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

Nếu xem phương pháp Newton như lặp đơn, khi đó: $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \to g'(x) = \frac{f'(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

Nhận thấy $g'(\overline{x}) = 0$, nếu chọn x_0 thích hợp thì phương pháp Newton sẽ hội tụ nhanh(nhờ hệ số co nhỏ), nhưng nếu chọn x_0 không phù hợp phương pháp Newton có thể không hội tụ $(g'(x) > 1)$

Điều kiện Fourier

Định lý

Giả sử $f(x)$ *có đạo hàm liên tục đến cấp 2 và các đạo hàm* $f'(x), f"(x)$ *không đổi dấu trên đoạn* $[a, b]$*.Khi đó nếu chọn* x_0 *thỏa* $f(x_0)f"(x_0) > 0$ *thì phương pháp lặp Newton hội tụ*

Chú ý:

Điều kiện Fourier chỉ là điều kiện cần không đủ

$f'(x) \neq 0$ là điều kiện tiên quyết

Nếu $f(a)f"(a) > 0$, chọn $x_0 = a$

Nếu $f(a)f"(a) < 0$, chọn $x_0 = b$

Nếu $f"(a) = 0$, xét $f(b)f"(b)$

Ưu nhược điểm của phương pháp Newton

Ưu điểm của phương pháp tiếp tuyến là tốc độ hội tụ nhanh.

Nhược điểm của phương pháp tiếp tuyến là biết x_{n-1}, để tính x_n ta phải tính giá trị của hàm f và giá trị của đạo hàm f' tại điểm x_{n-1}.

Ví dụ

Giải phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ *trong khoảng cách ly nghiệm* $[0, 0.5]$ *bằng phương pháp Newton.*

Giải.

Ta có $f(0) > 0, f(0.5) < 0$,
$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0, \forall x \in [0, 0.5]$ và
$f''(x) = 6x \geqslant 0, f(0.5)f''(0.5) < 0$ nên chọn
$x_0 = 0$.

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3} =$$

$$= \frac{2x_{n-1}^3 - 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(0)|, |f'(0.5)|\} = \frac{9}{4} = m.$

Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|x_n^3 - 3x_n + 1|}{9/4} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	0	
1	$1/3 = 0.3333333333$	0.0165
2	$25/72 = 0.3472222222$	$8.6924.10^{-5}$
3	0.3472963532	$2.5.10^{-9}$

Bài tập

Bài 1. Cho phương trình $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 10x - 7 = 0$. Cho $x_0 = 6.8$ tìm nghiệm gần đúng x_1 theo phương pháp Newton.

Giải.

$$X = X - \frac{f(X)}{f'(X)}, \; x_1 = 6.8448$$

Bài 2. Cho phương trình $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + 13x + 17 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[-2.6; -2.5]$. Sử dụng phương pháp Newton,chọn x_0 theo điều kiện Fourier, tính sai số của nghiệm gần đúng x_1 theo công thức sai số tổng quát.

Giải.

$f(-2.6)f''(-2.6) > 0$, chọn $x_0 = -2.6$

$m = \min |f'(x)| = 19.25$

$X = X - \frac{f(X)}{f'(X)} : \frac{f(X)}{m}, \; \Delta x_1 = 0.0054$

Bài 3. Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình
$f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1, 2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Giải.

Ta có $f(1) < 0, f(2) > 0$,
$f'(x) = e^x - 2^{-x}\ln 2 - 2\sin x > 0, \forall x \in [1, 2]$ và
$f''(x) = e^x + 2^{-x}\ln^2(2) - \cos x > 0, \forall x \in [1, 2]$
nên chọn $x_0 = 2$.

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} + 2^{-x_{n-1}} + 2\cos x_{n-1} - 6}{e^{x_{n-1}} - 2^{-x_{n-1}}\ln 2 - 2\sin x_{n-1}}.$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\} = 0.688 = m$. Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|e^{x_n} + 2^{-x_n} + 2\cos x_n - 6|}{0.688} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	2	
1	1.850521336	0.1283
2	1.829751202	$2.19.10^{-3}$
3	1.829383715	$6.7.10^{-7}$

Bài 4. Sử dụng phương pháp Newton tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = \ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ trong khoảng cách ly nghiệm $[1.3, 2]$ với độ chính xác 10^{-5}.

Giải.

Ta có $f(1.3) < 0, f(2) > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \sin(x-1) > 0, \forall x \in [1.3, 2] \text{ và}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \cos(x-1) < 0, \forall x \in [1.3, 2]$$

nên chọn $x_0 = 1.3$.

Ta xây dựng dãy (x_n) theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)}{\frac{1}{x_{n-1}-1} - \sin(x_{n-1}-1)}.$$

Ta có $|f'(x)| \geqslant \min\{|f'(1.3)|, |f'(2)|\} = 0.158 = m$. Do đó nghiệm gần đúng x_n được đánh giá sai số so với nghiệm chính xác $\overline{x}$ như sau

$$|\overline{x} - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|\ln(x_{n-1}-1) + \cos(x_{n-1}-1)|}{0.158} = \Delta_{x_n}$$

n	x_n	Δ_{x_n}
0	1.3	
1	1.38184714	0.21998
2	1.397320733	$5.76.10^{-3}$
3	1.397748164	$4.199.10^{-6}$