HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài giảng điện tử

Nguyễn Hồng Lộc

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2013.

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Đặt vấn đề

Trong chương này, chúng ta sẽ học một số phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + \ldots + a_{in}x_n &= b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{ni}x_i + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases} \quad (1)$$

thường xuất hiện trong các bài toán kỹ thuật.

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ta chỉ xét hệ gồm n phương trình và n ẩn số, trong đó $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ và $detA \neq 0$. Do đó hệ sẽ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B$.

Tuy nhiên, việc tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} đôi khi còn khó khăn gấp nhiều lần so với việc giải trực tiếp hệ phương trình (1). Do đó cần phải có phương pháp để giải hệ (1) hiệu quả.

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Sử dụng phép biến đổi sơ cấp trên hàng để giải hệ

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình và n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Nếu thực hiện các phép biến đổi sơ cấp sau trên hệ (1):

1. Đổi chỗ các phương trình của hệ $(h_i \leftrightarrow h_j)$ hay $c_i \leftrightarrow c_j$ có đánh số lại các ẩn.
2. Nhân vào một phương trình của hệ một số $\lambda \neq 0 (h_i \rightarrow \lambda h_i)$.
3. Cộng vào một phương trình của hệ một phương trình khác đã được nhân với một số $(h_i \rightarrow h_i + \lambda h_j)$

thì ta sẽ được một hệ phương trình mới tương đương với hệ (1).

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{BĐ sơ cấp trên hàng}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{array}\right)$$ với

$c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n.$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Phương pháp Gauss

1. Viết ma trận mở rộng $A_B = (A|B)$ của hệ (1).
2. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng biến đổi ma trận mở rộng về ma trận bậc thang.
3. Viết hệ phương trình tương ứng với ma trận bậc thang.
4. Ta giải hệ phương trình ngược từ dưới lên, tìm biến x_n sau đó $x_{n-1}, \ldots, x_1$ ta được 1 nghiệm duy nhất.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 23 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 31 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Giải.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 9 & 23 \\ 3 & 7 & 8 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

Phương pháp Gauss-Jordan

Định nghĩa

Phần tử trội là phần tử có trị tuyệt đối lớn nhất, sao cho không cùng hàng và cột với những phần tử đã chọn trước.

cuu duong than cong . com

Phương pháp Gauss-Jordan

1. Chọn phần tử trội để biến đổi cho tất cả các phần tử trên cùng cột của phần tử trội bằng không.
2. Qua n bước ta sẽ tìm được nghiệm cần tìm.

cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

Giải.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Chọn phần tử trội là $a_{43} = 4$. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp

$$\xrightarrow[\substack{h_3 \to 4h_3 - h_4 \\ h_2 \to 4h_2 - 3h_4 \\ h_1 \to 2h_1 - h_4}]{}$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Chọn phần tử trội là $a_{43} = 4$. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp

$$\xrightarrow[h_1 \to 2h_1 - h_4]{\substack{h_3 \to 4h_3 - h_4 \\ h_2 \to 4h_2 - 3h_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 & -20 \\ 5 & -5 & 0 & -21 & -92 \\ 3 & 5 & 0 & -3 & -12 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Chọn phần tử trội không được nằm trên hàng 4 và cột 3 là phần tử $a_{24} = -21$. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp

$$\xrightarrow[h_4 \to 7h_4 + h_2]{\substack{h_1 \to 21h_1 - 5h_2 \\ h_3 \to 7h_3 - h_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 4 & 0 & 0 & 40 \\ 5 & -5 & 0 & -21 & -92 \\ 16 & 40 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & -12 & 28 & 0 & -64 \end{array}\right)$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Chọn phần tử trội không được nằm trên hàng 4,2 và cột 3,4 là phần tử $a_{32} = 40$. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp

$$\xrightarrow[h_4 \to 10h_4 + 3h_3]{\substack{h_1 \to 10h_1 - h_3 \\ h_2 \to 8h_2 + h_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} -56 & 0 & 0 & 0 & 392 \\ 56 & 0 & 0 & -168 & -728 \\ 16 & 40 & 0 & 0 & 8 \\ 168 & 0 & 280 & 0 & -616 \end{array}\right)$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Chọn phần tử trội không được nằm trên hàng 4,2,3 và cột 3,4,2 là phần tử $a_{11} = -56$. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp

$$\xrightarrow[h_4 \to h_4 + 3h_1]{\substack{h_2 \to h_2 + h_1 \\ h_3 \to 7h_3 + 2h_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} -56 & 0 & 0 & 0 & 392 \\ 0 & 0 & 0 & -168 & -336 \\ 0 & 280 & 0 & 0 & 840 \\ 0 & 0 & 280 & 0 & 560 \end{array}\right)$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} -56x_1 &= 392 \\ -168x_4 &= -336 \\ 280x_2 &= 840 \\ 280x_3 &= 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= -7 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 2 \\ x_4 &= 2 \end{cases}$$

Suy ra hệ đã cho có 1 nghiệm duy nhất
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-7, 3, 2, 2)$

cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài tập

Bài 1. Sử dụng phương pháp phần tử trội giải hệ phương trình

cuu duong than cong . com

$$\begin{cases} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 &= 1 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

Đáp số $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Những khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Ma trận vuông $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ được gọi là *ma trận tam giác trên*.

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Ma trận vuông
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
được gọi là *ma trận tam giác dưới.*

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Nội dung phương pháp

Nội dung của phương pháp nhân tử LU là phân tích ma trận A thành tích của 2 ma trận L và U, trong đó L là ma trận tam giác dưới, còn U là ma trận tam giác trên.

cuu duong than cong . com

Khi đó việc giải hệ (1) sẽ trở thành giải 2 hệ phương trình $LY = B$ và $UX = Y$.

Có nhiều phương pháp phân tích $A = LU$, tuy nhiên ta thường xét trường hợp L có đường chéo chính bằng 1 và gọi là phương pháp Doolittle. Khi đó L và U có dạng

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

,

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Các phần tử của 2 ma trận L và U được xác định theo công thức

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} & (1 \leqslant j \leqslant n) \\ \ell_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}} & (2 \leqslant i \leqslant n) \\ u_{ij} = a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} & (1 < i \leqslant j) \\ \ell_{ij} = \dfrac{1}{u_{ij}} \left(a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) & (1 < j < i) \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

Giải.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 1h_1]{h_2 \to h_2 + 2h_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 + 1h_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com

https://fb.com/tailieudientucntt

Do đó $LY = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com   https://fb.com/tailieudientucntt

$$\Rightarrow Y = L^{-1}B = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = U^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com   https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

*Định thức con chính cấp **k** của ma trận **A** là định thức có được từ ma trận con chính cấp **k**(ma trận có được từ giao của **k** hàng đầu và **k** cột đầu của A), ký hiệu D_k*

cuu duong than cong . com

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$, $D_1(A) = 2$

cuu duong than cong . com

$D_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$, $D_3(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 8$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Từ tính chất của tích ma trận tam giác dưới và ma trận tam giác trên

$$D_k(L)D_k(U) = D_k(A) \Rightarrow U_{11}U_{22}\ldots U_{kk} = D_k(A)$$

$$\Rightarrow \{U_{11} = D_1(A); U_{kk} = \frac{D_k(A)}{D_{k-1}(A)}, k > 1\}$$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$D_1(A) = 2, D_2(A) = 2, D_3(A) = 6$$

$$\Rightarrow U_{11} = 2; U_{22} = \frac{D_2(A)}{D_1(A)} = 1; U_{33} = \frac{D_3(A)}{D_2(A)} = 3$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài tập

Bài 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = LU$ theo Doolite, tìm phần tử L_{32} của ma trận L.

Giải

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - \frac{4}{4} h_1]{h_2 \to h_2 - \frac{6}{4} h_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & ? \\ 0 & 3 & ? \end{pmatrix}$$

$$L_{32} = \frac{3}{3} = 1.0000$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài 2. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = LU$ theo Doolite, tính tổng các phần tử $tr(U) = U_{11} + U_{22} + U_{33}$ của ma trận U.

Giải

$D_1 = 1$; $D_2 = -1$; $D_3 = -4$

$tr(U) = U_{11} + U_{22} + U_{33} = D_1 + \frac{D_2}{D_1} + \frac{D_3}{D_2} = 4.0000$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài 3. Sử dụng phương pháp nhân tử LU giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Đáp số $(x_1, x_2, x_3) = (89/34, 2/17, -31/34)$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý

Ma trận vuông A xác đinh dương nếu các định thức con chính của nó đều dương

Ví dụ: Tìm α để ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ xác định dương

$D_1 = 3 > 0, D_2 = 3\alpha - 4 > 0 \to \alpha > \frac{4}{3},$

$D_3 = 3\alpha - 16 > 0 \to \alpha > \frac{16}{3} \Rightarrow \alpha > \frac{16}{3}$

Kết luận : $\alpha > 5.3333$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý

Một ma trận vuông A *đối xứng và xác định dương có thể phân tích duy nhất được dưới dạng* $A = BB^T$ *với* B *là ma trận tam giác dưới*

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ 0 & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_{nn} \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Các phần tử của ma trận B được xác định theo công thức

$$\begin{cases} B_{11} = \sqrt{a_{11}} & \\ B_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{B_{11}} & (2 \leqslant i \leqslant n) \\ B_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} B_{ik}^2} & (1 < i \leqslant n) \\ B_{ij} = \dfrac{1}{B_{jj}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} B_{ik} B_{jk} \right) & (1 < j < i) \end{cases}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ: Phân tích ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ thành BB^T theo Choleski

$B_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1; B_{21} = \frac{a_{21}}{B_{11}} = 1; B_{31} = \frac{a_{31}}{B_{11}} = -1$

$B_{22} = \sqrt{a_{22} - B_{21}^2} = 1; B_{32} = \frac{1}{B_{22}}(a_{32} - B_{31}b_{21}) = 1$

$B_{33} = \sqrt{a_{33} - B_{31}^2 - B_{32}^2} = \sqrt{2}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Từ tính chất của tích ma trận tam giác dưới và ma trận tam giác trên

$D_k(B)D_k(B^T) = D_k(A) \Rightarrow (B_{11}B_{22}...B_{kk})^2 = D_k(A)$

$\Rightarrow \{B_{11} = \sqrt{D_1(A)}; B_{kk} = \sqrt{\frac{D_k(A)}{D_{k-1}(A)}}, k > 1\}$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$D_1(A) = 1, D_2(A) = 1, D_3(A) = 2$

$B_{11} = 1; B_{22} = \sqrt{\frac{D_2(A)}{D_1(A)}} = 1; B_{33} = \sqrt{\frac{D_3(A)}{D_2(A)}} = \sqrt{2}$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Bài tập

Bài 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -4 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 25 \end{pmatrix}$. Phân tích $A = BB^T$ theo Choleski, tính tổng các phần tử $tr(B) = B_{11} + B_{22} + B_{33}$ của ma trận B.

Giải

$D_1 = 3;\ D_2 = 8;\ D_3 = 29$

$$tr(B) = \sqrt{D_1} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + \sqrt{\frac{D_3}{D_2}} = 5.2690$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Bài 2. Cho $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 2 \\ 4 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Với điều kiện nào của α thì ma trận A đối xứng và xác định dương.

Giải

$D_1 = 13 > 0$; $D_2 = 13\alpha - 16 > 0$;

$D_3 = 9\alpha - 36 > 0$

$\Rightarrow \alpha > 4.0000$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Trong không gian tuyến tính thực $\mathbb{R}^n$. Chuẩn của véctơ $X \in \mathbb{R}^n$ là một số thực, ký hiệu $||X||$ thỏa các điều kiện sau:

1. $\forall X \in \mathbb{R}^n, ||X|| \geqslant 0, ||X|| = 0 \Leftrightarrow X = 0$
2. $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda X|| = |\lambda|.||X||$
3. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, ||X + Y|| \leqslant ||X|| + ||Y||$.

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Trong $\mathbb{R}^n$ có rất nhiều chuẩn, tuy nhiên ta chỉ xét chủ yếu 2 chuẩn thường dùng sau:
$\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

- $||X||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$
- $||X||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|.$

cuu duong than cong . com

Ví dụ

cuu duong than cong . com

Cho $X = (1, 2, 3, -5)^T$.
$||X||_1 = 1 + 2 + 3 + 5 = 11$ *và*
$||X||_\infty = \max\{1, 2, 3, 5\} = 5$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Chuẩn của ma trận

Định nghĩa

Chuẩn của ma trận tương ứng với chuẩn véctơ được xác định theo công thức

$$||A|| = \max_{||X||=1} ||AX|| = \max_{||X||\neq 0} \frac{||AX||}{||X||}$$

cuu duong than cong . com

Từ định nghĩa chuẩn của ma trận, ta có

$||AX|| \leqslant ||A||.||X||$

ng.com

https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Xác định chuẩn của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *tương ứng với chuẩn* $||X||_1$. *Với mọi* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *thỏa* $||X||_1 = |x_1| + |x_2| = 1$, *ta có*

$||AX||_1 = |x_1 + 2x_2| + |3x_1 + 4x_2| \leqslant 4|x_1| + 6|x_2| = 4 + 2|x_2| \leqslant 6.$

Do đó $||A|| = 6$.

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý

Chuẩn của ma trận $A = (a_{ij})$ được xác định như sau:

- $||A||_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ – *chuẩn cột*
- $||A||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ – *chuẩn hàng*

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com

https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

$$Cho\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}. Lúc\ này$$

$$||A||_1 = \max\{2+5+6, 1+3+7, 4+2+3\} = 13,$$

$$||A||_\infty = \max\{2+1+4, 5+3+2, 6+7+3\} = 16.$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Những khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Xét dãy các véctơ $(X^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ *với* $X^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. *Dãy các véctơ này được gọi là* *hội tụ* *về véctơ* $\overline{X}$ *khi* $m \to +\infty$ *nếu và chỉ nếu* $||X^{(m)} - \overline{X}|| \to 0$ *khi* $m \to +\infty$ *(hội tụ theo chuẩn).*

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý

Để dãy các véctơ $(X^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ *hội tụ về véctơ* $\overline{X}$ *khi* $m \to +\infty$ *thì điều kiện cần và đủ là những dãy* $(x_k^{(m)})$ *hội tụ về* $\overline{x_k}, \forall k = 1, 2, \ldots, n$. *(hội tụ theo tọa độ).*

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Xét hệ phương trình $AX = B(det(A) \neq 0)$ có nghiệm $x = A^{-1}.B$. Cho B một số gia ΔB, khi đó nghiệm X tương ứng sẽ có số gia ΔX và $A.\Delta X = \Delta B \Leftrightarrow \Delta X = A^{-1}.\Delta B$. Như vậy, ta có

$$||\Delta X|| = ||A^{-1}.\Delta B|| \leqslant ||A^{-1}||.||\Delta B||$$

và

$$||B|| = ||AX|| \leqslant ||A||.||X||$$

Từ đây ta được

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leqslant ||A||.||A^{-1}||.\frac{||\Delta B||}{||B||}$$

cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Số $k(A) = Cond(A) = ||A||.||A^{-1}||$ được gọi là số điều kiện của ma trận A.

Số điều kiện $k(A)$ thỏa $1 \leqslant k(A) \leqslant +\infty$

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} & \frac{-1}{17} \\ \frac{-19}{17} & \frac{11}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{33}{17} & \frac{-20}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

$$||A||_1 = 10; ||A^{-1}||_1 = \frac{53}{17} \Rightarrow k_1(A) = 31.1765$$

$$||A||_\infty = 12; ||A^{-1}||_\infty = \frac{54}{17} \Rightarrow k_\infty(A) = 38.1177$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Trong thực hành tính toán, ta có thể gặp những hệ phương trình tuyến tính mà những thay đổi nhỏ trên các hệ số tự do của hệ sẽ gây ra những thay đổi rất lớn về nghiệm. Hệ phương trình tuyến tính như vậy được gọi là hệ phương trình không ổn định trong tính toán. Nếu ngược lại, hệ được gọi là hệ phương trình ổn định trong tính toán

cuuduongthancong.com

Chú ý. Người ta chứng minh được rằng, số điều kiện của ma trận đặc trưng cho tính ổn định của hệ phương trình tuyến tính. Giá trị $k(A)$ càng gần với 1 thì hệ càng ổn định. Số điều kiện $k(A)$ càng lớn thì hệ càng mất ổn định.

cuuduongthancong.com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Xét hệ phương trình $AX = B$ *với* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix}$ *và* $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.01 \end{pmatrix}$. *Dễ dàng thấy được hệ có nghiệm* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Bây giờ xét hệ* $A\widetilde{X} = \widetilde{B}$ *với* $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.1 \end{pmatrix}$.

Nghiệm bây giờ của hệ là $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} -17 \\ 10 \end{pmatrix}$. *Ta thấy* $k_\infty(A) = 1207.01 >> 1$. *Do đó* $B \approx \widetilde{B}$ *nhưng* X *và* $\widetilde{X}$ *khác nhau rất xa.*

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài tập

Bài 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm số điều kiện theo chuẩn một của A

Giải. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

$k_1(A) = ||A||_1||A^{-1}||_1 = 16.\frac{7}{36} = 3.1111$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài 2. Cho $A = \begin{pmatrix} -8 & 5 & -8 \\ 3 & -4 & 6 \\ -7 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.Tìm số điều kiện theo chuẩn vô cùng của A

cuu duong than cong . com

Giải. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{70} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{70} \\ \frac{9}{35} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{35} \\ \frac{43}{140} & \frac{15}{28} & -\frac{17}{140} \end{pmatrix}$.

cuu duong than cong . com

$k_\infty(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty = 21.\frac{27}{28} = 20.2500$

Ý tưởng chính

Từ hệ $AX = b$, ta phân tích $A = M - N$, với M là ma trận "dễ" khả nghịch,khi đó ta có:
$(M - N)X = b \Leftrightarrow MX = NX + b$
$\Leftrightarrow X = M^{-1}NX + M^{-1}b$
Đặt $T = M^{-1}N, c = M^{-1}b \to X = TX + c$
Xuất phát từ véctơ ban đầu $X^{(0)}$ ta xây dựng dãy $(X^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ theo công thức

$$X^{(m)} = TX^{(m-1)} + c, \quad m = 1, 2, \ldots . \qquad (2)$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý

Nếu $||T|| < 1$ *thì dãy các véctơ* $(X^{(m)})_{m=0}^{\infty}$ *xác định theo công thức lặp (2) sẽ hội tụ về véctơ nghiệm* $\overline{X}$ *của hệ với mọi véctơ lặp ban đầu* $X^{(0)}$*. Khi đó công thức đánh giá sai số như sau:*

cuu duong than cong . com

$$||X^{(m)} - \overline{X}|| \leqslant \frac{||T||^m}{1 - ||T||}.||X^{(1)} - X^{(0)}||$$

cuu duong than cong . com

hoặc

$$||X^{(m)} - \overline{X}|| \leqslant \frac{||T||}{1 - ||T||}.||X^{(m)} - X^{(m-1)}||$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Phương pháp lặp Jacobi

Xét hệ phương trình $AX = b$. Ta phân tích ma trận A theo dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= D - L - U.$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Do $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ nên $detD \neq 0$. Như vậy

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Nội dung phương pháp Jacobi

Ta có $AX = B \Leftrightarrow (D - L - U)X = B \Leftrightarrow$
$(D)X = (L + U)X + B$
$\Leftrightarrow X = D^{-1}(L + U)X + D^{-1}B.$
Ký hiệu $T_j = D^{-1}(L + U)$ và $C_j = D^{-1}B$. Khi đó công thức lặp có dạng

$$X^{(m)} = T_j X^{(m-1)} + C_j, \quad m = 1, 2, \ldots$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Dạng tường minh của công thức lặp Jacobi là

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{m-1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{m-1} + b_i\right).$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 7 \end{cases}$

Sử dụng phương pháp Jacobi, với vectơ lặp ban đầu $x^{(0)} = (0.1; 0.2; 0.3)^T$*, hãy tính vectơ lặp* $x^{(3)}$ *và đánh giá sai số của nó theo công thức hậu nghiệm, sử dụng chuẩn vô cùng.*

cuu duong than cong . com

$$T_j = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{-2}{7} & 0 & \frac{-3}{7} \\ \frac{-3}{8} & \frac{-1}{4} & 0 \end{pmatrix}; \ c_j = \left(\frac{4}{3}; \frac{9}{7}; \frac{7}{8}\right)^T$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 &= 8 - 2x_2 + 3x_3 \\ 7x_2 &= 9 - 2x_1 - 3x_3 \\ 8x_3 &= 7 - 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(m)} &= (8 - 2x_2^{(m-1)} + 3x_3^{(m-1)})/6 \\ x_2^{(m)} &= (9 - 2x_1^{(m-1)} - 3x_3^{(m-1)})/7 \\ x_3^{(m)} &= (7 - 3x_1^{(m-1)} - 2x_2^{(m-1)})/8 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$
0	0.1	0.2	0.3
1	$\frac{17}{12}$	$\frac{79}{70}$	$\frac{63}{80}$
2	$\frac{1513}{1120}$	$\frac{913}{1680}$	$\frac{69}{1120}$
3	$\frac{3407}{2880}$	$\frac{6847}{7840}$	$\frac{893}{3840}$

$$x^{(3)} = (1.1830; 0.8733; 0.2326)^T$$

$$x^{(3)} - x^{(2)} = \left(-\frac{677}{4032}; \frac{7759}{23520}; \frac{919}{5376}\right)^T$$

$$||x^{(3)} - x^{(2)}||_\infty = \frac{7759}{23520}; \ ||T_j||_\infty = \frac{5}{6}$$

$$\Delta x^{(3)} \leq \frac{||T_j||_\infty}{1 - ||T_j||_\infty} ||x^{(3)} - x^{(2)}||_\infty = 1.6495$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài tập

Bài 1. Bằng phương pháp lăp Jacobi, tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình với sai số 10^{-3}, chọn chuẩn vô cùng

cuu duong than cong . com

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

Đáp số $(x_1, x_2, x_3) = (0.1115, -0.1442, 0.4099), \Delta x^{(7)} = 3.94.10^{-4}$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Nội dung phương pháp Gauss-Seidel

Phân tích $A = D - L - U$,ta có:$AX = B$
$\Leftrightarrow (D - L - U)X = B$
$\Leftrightarrow (D - L)X = UX + B$
$\Leftrightarrow X = (D - L)^{-1}UX + (D - L)^{-1}B.$
Ký hiệu $T_g = (D - L)^{-1}U$ và $C_g = (D - L)^{-1}B.$
Khi đó công thức lặp có dạng

$$X^{(m)} = T_g X^{(m-1)} + C_g, \quad m = 1, 2, \ldots$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

Dạng tường minh của công thức lặp Gauss-Seidel

$$x_1^{(m)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(m-1)}\right),$$

cuu duong than cong . com

$$x_2^{(m)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(m)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j^{m-1}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

cuu duong than cong . com

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{m-1}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Phương pháp Gauss-Seidel có thể xem là 1 biến dạng của phương pháp lặp Jacobi, nhưng khác phương pháp Jacobi ở chỗ: khi tính thành phần thứ i của véctơ lặp $X^{(m)}$ thì ta sử dụng ngay những thành phần $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_{i-1}^{(m)}$ vừa tính được.

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 7 \end{cases}$

Sử dụng phương pháp Gauss-seidel, với $x^{(0)} = (0.1; 0.2; 0.3)^T$, *hãy tính vectơ lặp* $x^{(3)}$ *và đánh giá sai số của nó theo công thức tiên nghiệm, sử dụng chuẩn vô cùng.*

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$T_g = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_g = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{21} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{17}{168} & \frac{-29}{112} \end{pmatrix}$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6x_1^{(m)} &= 8 - 2x_2^{(m-1)} + 3x_3^{(m-1)} \\ 2x_1^{(m)} + 7x_2^{(m)} &= 9 - 3x_3^{(m-1)} \\ 3x_1^{(m)} + 2x_2^{(m)} + 8x_3^{(m)} &= 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(m)} &= (8 - 2x_2^{(m-1)} + 3x_3^{(m-1)})/6 \\ x_2^{(m)} &= (9 - 2x_1^{(m)} - 3x_3^{(m-1)})/7 \\ x_3^{(m)} &= (7 - 3x_1^{(m)} - 2x_2^{(m)})/8 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com
https://fb.com/tailieudientucntt

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$
0	0.1	0.2	0.3
1	$\frac{17}{12}$	$\frac{79}{105}$	$\frac{523}{3360}$
2	1.1604	0.8875	0.2180
3	1.1465	0.8647	0.2289

$$x^{(3)} = (1.1465; 0.8647; 0.2289)^T$$

$$x^{(1)} - x^{(0)} = \left(\frac{79}{60}; \frac{58}{105}; -\frac{97}{672}\right)^T$$

$$||x^{(1)} - x^{(0)}||_\infty = \frac{79}{60}; \; ||T_g||_\infty = \frac{5}{6}$$

$$\Delta x^{(3)} \leq \frac{||T_g||_\infty^3}{1 - ||T_g||_\infty} ||x^{(1)} - x^{(0)}||_\infty = 4.5718$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Ma trận A được gọi là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt nếu nó thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

cuu duong than cong . com

Định lý

cuu duong than cong . com

Các phương pháp lặp Jacobi, Gauss-Seidel cho hệ phương trình $AX = b$ sẽ hội tụ nếu A là ma trận có đường chéo trội nghiêm ngặt.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài tập

Bài 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 15x_2 &= 4 \end{cases}$
Với $x^{(0)} = [0.7; 1.0]^T$, tìm sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ lặp $x^{(2)}$ theo phương pháp Jacobi,sử dụng công thức hậu nghiệm và chuẩn vô cùng

Giải. $||T_j||_\infty = \frac{1}{3};$
$x^{(1)} = [\frac{10}{13}; \frac{1}{30}]^T; x^{(2)} = [\frac{92}{195}; \frac{2}{195}]^T$
$\Delta x^{(2)} = \frac{||T_j||_\infty}{1-||T_j||_\infty}||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = \frac{1/3}{1-1/3}\frac{58}{195} =$
0.1488

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài 2. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 11x_1 + 5x_2 = 2 \\ -3x_1 + 11x_2 = 4 \end{cases}$$
Với $x^{(0)} = [0.9; 0.2]^T$, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$ theo phương pháp Jacobi.

Giải. $x^{(3)} = [0.005; 0.338]^T$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 15x_1 - 4x_2 = 2 \\ -4x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$

Với $x^{(0)} = [0.2; 0.5]^T$, tìm sai số $\Delta x^{(2)}$ của vectơ lặp $x^{(2)}$ theo phương pháp Gauss-Seidel,sử dụng công thức tiên nghiệm và chuẩn vô cùng

Giải. $||T_g||_\infty = \frac{4}{15}$; $x^{(1)} = [\frac{4}{15}; \frac{13}{15}]^T$;

$\Delta x^{(2)} = \frac{||T_g||_\infty^2}{1-||T_g||_\infty}||x^{(1)} - x^{(0)}||_\infty = \frac{(\frac{4}{15})^2}{1-\frac{4}{15}}\frac{11}{30} = 0.0356$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài 4. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 = 4 \\ -6x_1 + 11x_2 = 6 \end{cases}$$
Với $x^{(0)} = [0.2; 0.8]^T$, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$ theo phương pháp Gauss-Seidel.

Giải. $x^{(3)} = [0.808; 0.986]^T$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bài 5. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 38x_1 + 2.73x_2 - 1.85x_3 = 12.89 \\ 1.34x_1 + 37x_2 - 3.24x_3 = 15.73 \\ 1.18x_1 - 4.87x_2 + 34x_3 = 18.42 \end{cases}$$

Với $x^{(0)} = [0.5; 2.3; 3.4]^T$, tìm vectơ lặp $x^{(3)}$ theo phương pháp Gauss-Seidel.

Giải. $x^{(3)} = [0.3346; 0.4654; 0.5968]^T$.

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt