NỘI SUY VÀ XẤP XỈ HÀM

Bài giảng điện tử

Nguyễn Hồng Lộc

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

cuu duong than cong . com

TP. HCM — 2013.

Đặt vấn đề

Trong thực hành, thường gặp những hàm số $y = f(x)$ mà không biết biểu thức giải tích cụ thể f của chúng. Thông thường, ta chỉ biết các giá trị $y_0, y_1, \ldots, y_n$ của hàm số tại các điểm khác nhau $x_0, x_1, \ldots, x_n$ trên đoạn $[a, b]$. Các giá trị này có thể nhận được thông qua thí nghiệm, đo đạc,...Khi sử dụng những hàm trên, nhiều khi ta cần biết các giá trị của chúng tại những điểm không trùng với $x_i (i = 0, 1, \ldots, n)$.
Để làm được điều đó, ta phải xây dựng một đa thức

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

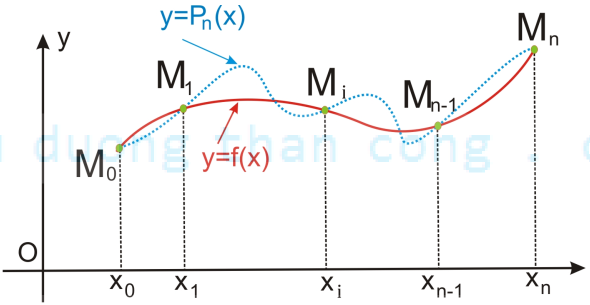
thỏa mãn

$$P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Định nghĩa

$P_n(x)$ được gọi là đa thức nội suy của hàm $f(x)$, còn các điểm $x_i, i = 0, 1, 2, \ldots, n$ được gọi là các nút nội suy

Về mặt hình học, có nghĩa là tìm đường cong $y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ đi qua các điểm $M_i(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$ đã biết trước của đường cong $y = f(x)$.



Định lý

Tồn tại duy nhất một đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n đi qua $n+1$ điểm phân biệt cho trước.

Chứng minh: Giả sử ta có đa thức bậc n:
$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, đa thức này đi qua $n+1$ điểm $(x_i, y_i), i = 0, 1, .., n$. Do đó:

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n = y_i, \quad i = 0, 1, .., n$$

Xem $a_0, a_1, .., a_n$ là biến, ta được một hệ gồm $n+1$ phương trình $n+1$ biến, với định thức của ma trận hệ số:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_0^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Vì các điểm là phân biệt nên $x_i \neq x_j \Rightarrow det(A) \neq 0$, vậy hệ có nghiệm duy nhất

Kết luận: Mọi phương pháp nội suy đa thức đều có cùng một kết quả.

Ví dụ

Xây dựng đa thức nội suy của hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi

x	0	1	3
y	1	-1	2

Giải.

Đa thức nội suy có dạng $y = P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Thay các điểm $(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3)$ vào đa thức này ta được hệ

$$\begin{cases} 0.a_2 + 0.a_1 + a_0 &= 1 \\ 1.a_2 + 1.a_1 + a_0 &= -1 \\ 9.a_2 + 3.a_1 + a_0 &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -\frac{19}{6} \\ a_2 &= \frac{7}{6} \end{cases}$$

Vậy đa thức nội suy $P(x) = \dfrac{7}{6}x^2 - \dfrac{19}{6}x + 1$

Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định như sau:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Ta sẽ xây dựng đa thức nội suy của hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_0, x_n], n \geqslant 1$.

Đa thức nội suy Lagrange có dạng sau $\mathcal{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n^k(x).y_k$, trong đó

$$p_n^k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}$$

Lagrange xây dựng một đa thức bậc n với cơ sở là n đa thức bậc n: $p_n^k(x)$ và y_k là tọa độ tương ứng.

Chú ý: $p_n^k(x_k) = 1; p_n^k(x_i) = 0, i \neq k \Rightarrow \mathcal{L}_n(x_k) = y_k$. Đa thức đi qua các điểm (x_k, y_k)

Ví dụ

Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = \sin(\pi x)$ *tại các nút nội suy* $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$

Giải.

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$y = \sin(\pi x)$	0	$\frac{1}{2}$	$1.$

Công thức nội suy Lagrange của hàm số y

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})}.0 + \frac{x(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}.\frac{1}{2} + \frac{x(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}.1 = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Đặt $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)$.

Khi đó $p_n^k(x) = \dfrac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}$

Đa thức nội suy Lagrange trở thành

$\mathcal{L}_n(x) = \omega(x).\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{y_k}{\omega'(x_k)(x - x_k)} = \omega(x).\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{y_k}{D_k}$, với

$D_k = \omega'(x_k)(x - x_k)$

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n	
x_0	$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$\ldots$	$x_0 - x_n$	D_0
x_1	$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$\ldots$	$x_1 - x_n$	D_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$\ldots$	$x - x_n$	D_n
					$\omega(x)$

Ví dụ

Cho hàm số y được xác định bởi

x	0	1	3	4
y	1	1	2	-1

Sử dụng đa thức Lagrange tính gần đúng giá trị của hàm số y tại $x = 2$.

Giải.

$x=2$	0	1	3	4	
0	$2-0$	$0-1$	$0-3$	$0-4$	$D_0 = (2-0)(0-1)(0-3)(0-4) = -24$
1	$1-0$	$2-1$	$1-3$	$1-4$	$D_1 = (1-0)(2-1)(1-3)(1-4) = 6$
3	$3-0$	$3-1$	$2-3$	$3-4$	$D_2 = (3-0)(3-1)(2-3)(3-4) = 6$
4	$4-0$	$4-1$	$4-3$	$2-4$	$D_3 = (4-0)(4-1)(4-3)(2-4) = -24$
					$\omega(x) = (2-0)(2-1)(2-3)(2-4) = 4$

Do đó $y(2) \approx L_3(2) = 4\left(\frac{1}{-24} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{-1}{-24}\right) = 2.$

Cho hàm số $f(x)$ xác định như sau

x	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

trên đoạn $[a, b] = [x_0, x_n]$.

Định nghĩa

Trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$ ta định nghĩa đại lượng

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_k - y_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} = f[x_{k+1}, x_k]$$

được gọi là tỉ sai phân cấp 1 của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+1}]$

Tương tự ta có tỉ sai phân cấp 2 của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+2}]$ là

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

Quy nạp ta có tỉ sai phân cấp p của hàm trên đoạn $[x_k, x_{k+p}]$ là

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+p}] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p-1}]}{x_{k+p} - x_k}$$

Ví dụ

Lập bảng tỉ sai phân của hàm cho bởi

x	1.0	1.3	1.6	1.9
y	0.76	0.62	0.45	0.28

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
1.0	0.76			
		$\frac{0.62-0.76}{1.3-1} = -\frac{7}{15}$		
1.3	0.62		$\frac{\frac{-17}{30}-\frac{-7}{15}}{1.6-1} = -\frac{1}{6}$	
		$\frac{0.45-0.62}{1.6-1.3} = -\frac{17}{30}$		$\frac{0-\frac{-1}{6}}{1.9-1} = \frac{5}{27}$
1.6	0.45		$\frac{\frac{-17}{30}-\frac{-17}{30}}{1.9-1.3} = 0$	
		$\frac{0.28-0.45}{1.9-1.6} = -\frac{17}{30}$		
1.9	0.28			

Theo định nghĩa tỉ sai phân cấp 1 của $f(x)$ trên đoạn $[x, x_0]$ là $f[x, x_0] = \dfrac{f(x) - y_0}{x - x_0} \Rightarrow f(x) = y_0 + f[x, x_0](x - x_0)$. Lại áp dụng định nghĩa tỉ sai phân cấp 2 của $f(x)$ ta có $f[x, x_0, x_1] = \dfrac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$

$\Rightarrow f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1)f[x, x_0, x_1]$.

Thay vào công thức trên ta được

$f(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)$. Quá trình trên tiếp diễn đến bước thứ n ta được

$$f(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) +$$

$$+ f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Đặt $\mathcal{N}_n^{(1)}(x) = y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$ và

$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$ ta được

$f(x) = \mathcal{N}_n^{(1)} + R_n(x)$.

Định nghĩa

Công thức $\mathcal{N}_n^{(1)}(x)$ được gọi là công thức Newton tiến xuất phát từ điểm nút x_0 của hàm số $f(x)$ và $R_n(x)$ được gọi là sai số của đa thức nội suy Newton.

Tương tự, ta có thể xây dựng công thức Newton lùi xuất phát từ điểm nút x_n của hàm số $f(x)$ như sau
$\mathcal{N}_n^{(2)}(x) = y_n + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_{n-1})(x - x_n) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$
Do tính duy nhất của đa thức nội suy, ta có với cùng 1 bảng số thì

$$\mathcal{L}_n(x) = \mathcal{N}_n^{(1)}(x) = \mathcal{N}_n^{(2)}(x)$$

Ví dụ

Xây dựng đa thức nội suy Newton

x	1.0	1.3	1.6	1.9
y	0.76	0.62	0.45	0.28

x_k	$f(x_k)$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
1.0	0.76			
		$\frac{0.62-0.76}{1.3-1} = -\frac{7}{15}$		
1.3	0.62		$\frac{\frac{-17}{30} - \frac{-7}{15}}{1.6-1} = -\frac{1}{6}$	
		$\frac{0.45-0.62}{1.6-1.3} = -\frac{17}{30}$		$\frac{0 - \frac{-1}{6}}{1.9-1} = \frac{5}{27}$
1.6	0.45		$\frac{\frac{-17}{30} - \frac{-17}{30}}{1.9-1.3} = 0$	
		$\frac{0.28-0.45}{1.9-1.6} = -\frac{17}{30}$		
1.9	0.28			

$$\mathcal{N}_3^{(1)}(x) = 0.76 - \frac{7}{15}(x-1) - \frac{1}{6}(x-1)(x-1.3) + \frac{5}{27}(x-1)(x-1.3)(x-1.6)$$

$$\mathcal{N}_3^{(2)}(x) =$$

$$0.28 - \frac{17}{30}(x-1.9) + 0(x-1.9)(x-1.6) + \frac{5}{27}(x-1.9)(x-1.6)(x-1.3)$$

Ví dụ

Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$

x	0	2	3	5	6
y	1	3	2	5	6

1. *Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút* x_0 *của hàm số* $y = f(x)$
2. *Dùng đa thức nội suy nhận được tính gần đúng* $f(1.25)$

Giải.

x_k	$f(x_k)$	Tỉ sai phân I	Tỉ sai phân II	Tỉ sai phân III	Tỉ sai phân IV
0	1				
		1			
2	3		-2/3		
		-1		3/10	
3	2		5/6		-11/120
		3/2		-1/4	
5	5		-1/6		
		1			
6	6				

Như vậy công thức nội suy Newton tiến là

$$\mathcal{N}_4^{(1)}(x) = 1 + 1.x + (-\frac{2}{3})x(x-2) + \frac{3}{10}x(x-2)(x-3)$$

$$-\frac{11}{120}x(x-2)(x-3)(x-5) =$$

$$= -\frac{11}{120}x^4 + \frac{73}{60}x^3 - \frac{601}{120}x^2 + \frac{413}{60}x + 1.$$

$f(1.25) \approx \mathcal{N}_4^{(1)}(1.25) \approx 3.9312$

Bài tập

Cho bảng số

x	0.1	0.3	0.6	0.9
y	2.6	3.2	2.8	4.3

sử dụng nội suy đa thức xấp xỉ đạo hàm cấp một của hàm tại $x = 0.5$

Giải. $y'(0.5) \approx -1.7194$

Đặt vấn đề

Việc xây dựng một đa thức đi qua các điểm nội suy cho trước trong trường hợp n lớn là rất khó khăn và khó ứng dụng. Một trong những cách khắc phục là trên từng đoạn liên tiếp của các nút nội suy ta xây dựng những đa thức bậc thấp, đa thức đơn giản nhất là bậc 1,tuy nhiên khi nối các đa thức bâc 1 lại với nhau thì đồ thị tổng quát lại mất tính khả vi,do đó người ta cố gắng xây dựng một đường cong bằng cách nối các đường cong nhỏ lại với nhau sao cho vẫn bảo toàn tính khả vi của hàm,đường cong như vậy gọi là đường spline,ví dụ: để đảm bảo tính khả vi cấp 1 ta có thể xây dựng một đa thức bậc 2. Một cách tổng quát để đồ thị có đạo hàm đến cấp n, ta xây dựng các đa thức cấp n+1.
Các hàm trên các đoạn nhỏ thông thường là các đa thức và bậc cao nhất của đa thức là bậc của spline.
Thông thường khi khảo sát một hàm số, ta chỉ quan tâm đến đạo hàm cấp 1(khảo sát đơn điệu) và đạo hàm cấp 2(khảo sát tính lồi,lõm) do vậy trong phần này chúng ta chỉ xét công thức nội suy spline bậc 3.

Định nghĩa

Cho bảng số

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y = f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

, Một spline bậc 3 nội suy hàm $f(x)$ trên $[x_0; x_n]$ là hàm $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:
(a) $g(x)$ đi qua các điểm nội suy: $g(x_k) = y_k$
(b) $g(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên $[a, b]$
(c) Trên mỗi đoạn $[x_k; x_{k+1}], k = 0, 1, .., n-1, g(x) \equiv g(x_k)$ là một đa thức bậc 3.

Để đơn giản tính toán, ta đặt: $h_k = x_{k+1} - x_k$;
$g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3, x \in [x_k, x_{k+1}]$
Nhìn chung, chúng ta có n đoạn $[x_k, x_{k+1}]$, trên mỗi đoạn ta xây dựng một đa thức bậc 3 nên cần xác định 4 biến a_k, b_k, c_k, d_k. Vậy ta có tất cả $4n$ biến cần xác định.Dựa vào định nghĩa spline bậc 3, ta xác định $4n$ biến này

$g(x)$ đi qua điểm nội suy: $g(x_k) = y_k \Rightarrow a_k = y_k$ có (n+1) phương trình
$g(x)$ liên tục tại các nút ở giữa $g_k(x_{k+1}) = g_{k+1}(x_{k+1}), k = 1, 2, .., n-1$
$a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = a_{k+1}, k = 1, 2, .., n-1$; (n-1) phương trình
$g(x)$ có đạo hàm liên tục $g'_k(x_{k+1}) = g'_{k+1}(x_{k+1}), k = 1, 2, .., n-1$
$b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}, k = 1, 2, .., n-1$; (n-1) phương trình
$g(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục $g''_k(x_{k+1}) = g''_{k+1}(x_{k+1})$
$2c_k + 6d_k h_k = 2c_{k+1}, k = 1, 2, .., n-1$; (n-1) phương trình
Ta có tổng cộng $4n-2$ phương trình nhưng có đến $4n$ ẩn,nên nói chung hệ vô số nghiệm.Vì vậy để có nghiệm duy nhất,ta phải bổ sung thêm 2 điều kiện và thông thường các điều kiện này là các điều kiện biên.

Spline tự nhiên: $c_0 = c_n = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ 3\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\dfrac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix} . \text{Từ } AC = B \rightarrow C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_k = y_k \\ b_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1}+2c_k) \\ d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{3h_k} \\ g_k(x) = a_k + b_k(x-x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3, x_k \le x \le x_{k+1} \end{cases}$$

Ví dụ

Xây dựng Spline bậc 3 tự nhiên nội suy bảng số $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 & 5 \\ \hline y & 1 & 1 & 4 \end{array}$. *Xấp xỉ giá trị của hàm tại* $x = 3$

Spline tự nhiên : $c_0 = c_2 = 0$; $A = [2(h_0 + h_1)]$;
$B = [3\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1 - y_0}{h_0}]; AC = B \to C = [c_1] = \frac{3}{10}$
$a_0 = 1, b_0 = -\frac{1}{5}, d_0 = \frac{1}{20}$; $a_1 = 1, b_1 = \frac{2}{5}, d_1 = -\frac{1}{30}$
Vậy spline cần tìm:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{5}(x-0) + \frac{1}{20}(x-0)^3 & x \in [0,2] \\ 1 + \frac{2}{5}(x-2) + \frac{3}{10}(x-2)^2 - \frac{1}{30}(x-2)^3, & x \in [2,5] \end{cases}$$

Vậy $y(3) \approx g(3) = 1 + \frac{2}{5}(3-2) + \frac{3}{10}(3-2)^2 - \frac{1}{30}(3-2)^3 = 1.6667$

Spline ràng buộc: $g'(x_0) = \alpha, g'(x_n) = \beta$

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \vdots \\ 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - 3\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 3\beta - 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}. \text{ Từ } AC = B \to C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Spline ràng buộc(n=2):

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 \\ 0 & h_1 & 2h_1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} - 3\alpha \\ 3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} - 3\dfrac{y_1-y_0}{h_0} \\ 3\beta - 3\dfrac{y_2-y_1}{h_1} \end{pmatrix}$$

$$AC = B \Rightarrow C = (c_0; c_1; c_2)^T$$

$$\begin{cases} a_k = y_k \\ b_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) \\ d_k = \frac{c_{k+1}-c_k}{3h_k} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 + d_0(x-x_0)^3, x_0 \le x \le x_1 \\ a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 + d_1(x-x_1)^3, x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$$

Ví dụ

Xây dựng Spline bậc 3 ràng buộc nội suy bảng số

x	1	2	4
y	2	1	6

và thỏa điều kiện $y'(1) = 2, y'(4) = 1$. *Xấp xỉ giá trị của hàm tại* $x = 1.5$ *và* $x = 3$

$$h_0 = 1, h_1 = 2\ ;\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -9 \\ \frac{21}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -\frac{77}{12} \\ \frac{23}{6} \\ -\frac{73}{24} \end{pmatrix}$$

$a_0 = 2, b_0 = 2, d_0 = \frac{41}{12};\ a_1 = 1, b_1 = -\frac{7}{12}, d_1 = -\frac{55}{48}$

Vậy spline cần tìm:

$$g(x) = \begin{cases} 2 + 2(x-1) - \frac{77}{12}(x-1)^2 + \frac{41}{12}(x-1)^3 & x \in [1,2] \\ 1 - \frac{7}{12}(x-2) + \frac{23}{6}(x-2)^2 - \frac{55}{48}(x-2)^3, & x \in [2,4] \end{cases}$$

Vậy:

$y(1.5) \approx g(1.5) = 2 + 2 * 0.5 - \frac{77}{12} * 0.5^2 + \frac{41}{12} * 0.5^3 = 1.8230$

$y(3) \approx g(3) = 1 - \frac{7}{12} + \frac{23}{6} - \frac{55}{48} = 3.1042$

Bài tập

Cho bảng số

x	1.3	1.6	2.3
y	2.2	4.3	6.6

. Sử dụng spline bậc 3 $g(x)$ thỏa điều kiện $g'(1.3) = 0.3$, $g'(2.3) = 0.5$ nội suy bảng số trên để xấp xỉ giá trị của hàm tại $x = 1.4$ và $x = 2.1$

Giải. $g(1.4) = 2.5656, g(2.1) = 6.4460$

Trong mặt phẳng xOy cho tập hợp điểm $M_k(x_k, y_k), k = 1, 2, \ldots, n$, trong đó có ít nhất 2 điểm nút x_i, x_j khác nhau với $i \neq j$ và n rất lớn. Khi đó việc xây dựng một đường cong đi qua tất cả những điểm này không có ý nghĩa thực tế.
Chúng ta sẽ đi tìm hàm $f(x)$ đơn giản hơn sao cho nó thể hiện tốt nhất dáng điệu của tập hợp điểm $M_k(x_k, y_k), k = 1, 2, \ldots, n$, và không nhất thiết đi qua tất cả các điểm đó.
Phương pháp bình phương bé nhất giúp ta giải quyết vấn đề này. Nội dung của phương pháp là tìm cực tiểu của phiếm hàm

$$g(f) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2 \to \min .$$

Dạng đơn giản thường gặp trong thực tế của $f(x)$ là
$f(x) = A + Bx, f(x) = A + Bx + Cx^2, \ldots$

Trường hợp $f(x) = A + Bx$ Khi đó

$$g(A,B) = \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k)^2$$

Bài toán quy về việc tìm cực tiểu của hàm 2 biến $g(A, B)$. Tọa độ điểm dừng của hàm được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k)^2 = 2 \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k)^2 = 2 \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k - y_k) x_k = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} nA + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) B = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) A + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) B = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

Ví dụ

Tìm hàm $f(x) = A + Bx$ xấp xỉ tốt nhất bảng số

x	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
y	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7

Giải. Ta có $n = 10$ và $\sum_{k=1}^{n} x_k = 29$, $\sum_{k=1}^{n} y_k = 39$, $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 109$, $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 140$. Hệ phương trình để xác định A, B có dạng

$$\begin{cases} 10A + 29B = 39 \\ 29A + 109B = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0.7671 \\ B = 1.0803 \end{cases}$$

Do đó đường thẳng cần tìm là $f(x) = 0.7671 + 1.0803x$.

Trường hợp $f(x) = A + Bx + Cx^2$ Khi đó

$$g(A,B,C) = \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2$$

Bài toán quy về việc tìm cực tiểu của hàm 3 biến $g(A,B,C)$. Tọa độ điểm dừng của hàm được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2 = 2\sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2 = 2\sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k = 0 \\ \frac{\partial}{\partial C} \sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)^2 = 2\sum_{k=1}^{n} (A + Bx_k + Cx_k^2 - y_k)x_k^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} nA + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) B + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) C = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) A + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) B + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right) C = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) A + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^3\right) B + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^4\right) C = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 y_k \end{cases}$$

Ví dụ

Tìm hàm $f(x) = A + Bx + Cx^2$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số*

x	1	1	2	3	3	4	5
y	4.12	4.18	6.23	8.34	8.38	12.13	18.32

Giải. Hệ phương trình để xác định A, B, C có dạng

$$\begin{cases} 7A + 19B + 65C = 61.70 \\ 19A + 65B + 253C = 211.04 \\ 65A + 253B + 1061C = 835.78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4.30 \\ B = -0.71 \\ C = 0.69 \end{cases}$$

Do đó hàm số cần tìm là $f(x) = 4.30 - 0.71x + 0.69x^2$.

Trường hợp $f(x) = Ag(x) + Bh(x)$ Khi đó

$$g(A, B) = \sum_{k=1}^{n} (Ag(x_k) + Bh(x_k) - y_k)^2$$

Bài toán quy về việc tìm cực tiểu của hàm 2 biến $g(A, B)$. Tọa độ điểm dừng của hàm được xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial A} \sum\limits_{k=1}^{n} (Ag(x_k) + Bh(x_k) - y_k)^2 = 2g(x_k) \sum\limits_{k=1}^{n} (Ag(x_k) + Bh(x_k) - y_k) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial B} \sum\limits_{k=1}^{n} (Ag(x_k) + Bh(x_k) - y_k)^2 = 2h(x_k) \sum\limits_{k=1}^{n} (Ag(x_k) + Bh(x_k) - y_k) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} g^2(x_k)\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} g(x_k)h(x_k)\right) B = \sum\limits_{k=1}^{n} g(x_k)y_k \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} g(x_k)h(x_k)\right) A + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} h^2(x_k)\right) B = \sum\limits_{k=1}^{n} h(x_k)y_k \end{cases}$$

Ví dụ

Tìm hàm $f(x) = A\cos x + B\sin x$ *xấp xỉ tốt nhất bảng số*

x	10	20	30	40	50
y	1.45	1.12	0.83	1.26	1.14

Giải. $A = -0.1633; B = 0.0151$

Hàm cần tìm là $f(x) = -0.1633\cos x + 0.0151\sin x$

Bài tập

Cho bảng số

x	0.7	1	1.2	1.3	1.6
y	3.3	2	4.5	2.2	6.1

. Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm $f(x) = A\sqrt{x} + B\cos x$ xấp xỉ tốt nhất bảng số trên.

Giải. $A = 3.8784, B = -1.3983$