ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Bài giảng điện tử

Nguyễn Hồng Lộc

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2013.

Xét bảng số

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

với $y_0 = f(x_0)$ và $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$.

Đa thức nội suy Lagrange có dạng

$$\mathcal{L}(x) = \frac{x - x_0}{h} y_1 - \frac{x - x_1}{h} y_0,$$

với $h = x_1 - x_0$. Do đó, với mọi $\forall x \in [x_0, x_1]$ ta có

$$f'(x) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Đặc biệt, tại x_0 ta có

$$f'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

và được gọi là công thức sai phân tiến. Còn tại x_1 ta cũng có

$$f'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

và được gọi là công thức sai phân lùi và thường được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

Xét bảng số

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

với

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1) = f(x_0+h), y_2 = f(x_2) = f(x_0+2h)$

Đa thức nội suy Lagrange có dạng

$$\mathcal{L}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2}y_2 - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{h^2}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2}y_0,$$

$$\mathcal{L}'(x) = \frac{x-x_0}{2h^2}(y_2-2y_1) + \frac{x-x_1}{h^2}(y_2+y_0) + \frac{x-x_2}{2h^2}(y_0-2y_1),$$

$$\mathcal{L}''(x) = \frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}.$$

Đặc biệt, tại x_0 ta có $f'(x_0) \approx \mathcal{L}'(x_0) = \dfrac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}$ và được gọi là công thức sai phân tiến. Còn tại x_1 ta cũng có $f'(x_1) \approx \mathcal{L}'(x_1) = \dfrac{y_2-y_0}{2h}$ và được gọi là công thức sai phân hướng tâm và thường được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Còn tại x_2 ta cũng có $f'(x_2) \approx \mathcal{L}'(x_2) = \dfrac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}$ và được gọi là công thức sai phân lùi và thường được viết dưới dạng

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)}{2h}$$

Ví dụ

Tính gần đúng $y'(50)$ *của hàm số* $y = lgx$ *theo công thức sai phân tiến dựa vào bảng giá trị sau*

x	50	55	60
y	1.6990	1.1704	1.7782

Giải.

Ở đây $h = 5$. Theo công thức sai phân tiến ta có

$$y'(50) \approx \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) =$$

$$\frac{1}{2x5}(-3x1.6990 + 4x1.1704 - 1.7782) = -0.21936$$

Tính gần đúng tích phân xác định

Theo công thức Newton-Leibnitz thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),\ F'(x) = f(x).$$

Nhưng thường thì ta phải tính tích phân của hàm số $y = f(x)$ được xác định bằng bảng số. Khi đó khái niệm nguyên hàm không còn ý nghĩa.
Để tích gần đúng tích phân xác định trên $[a, b]$, ta thay hàm số $f(x)$ bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ và xem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

Công thức hình thang

Để tích gần đúng tích phân $\int_a^b f(x)dx$ ta thay hàm dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc 1 đi qua 2 điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$ xuất phát từ nút $(a, f(a))$

Vậy

$$P_1(x) = f(a) + f[a,b](x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b (f(a) + f[a,b](x-a))dx =$$

$$f(a)x + f[a,b]\left(\frac{x^2}{2} - ax\right)\Big|_a^b$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

Công thức hình thang mở rộng

Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ với bước chia $h = \dfrac{b-a}{n}$. Khi đó
$a = x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_k = x_0 + kh, \ldots, x_n = x_0 + nh$ và
$y_k = f(x_k), k = 0, 1, \ldots, n$
Sử dụng công thức hình thang cho từng đoạn $[x_k, x_{k+1}]$ ta được

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx h.\frac{y_0 + y_1}{2} + h.\frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + h.\frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

$$\approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + .. + 2y_{n-1} + y_n)$$

Sai số

Hình thang

$$\Delta I = \int_a^b |f(x) - P_2(x)|dx = \frac{M_2(b-a)^3}{12}$$

Hình thang suy rộng

$$\Delta I = n\frac{M_2 h^3}{12} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

Trong đó

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Ví dụ

Tính gần đúng tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ *bằng công thức hình thang khi chia đoạn* $[0,1]$ *thành* $n = 10$ *đoạn nhỏ.*

Giải.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}, x_0 = 0, x_k = \frac{k}{10},$$

$$y_k = f(x_k) = \frac{1}{1+\frac{k}{10}} = \frac{10}{10+k}$$

Vậy $I \approx \frac{h}{2}\sum\limits_{k=0}^{9}(y_k + y_{k+1}) = \frac{1}{20}\sum\limits_{k=0}^{9}\left(\frac{10}{10+k} + \frac{10}{10+(k+1)}\right) \approx 0.6938$

Ví dụ

Cho bảng

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
y	16.23	18.55	17.42	15.59	17.78	18.73	19.81

của hàm $f(x)$. Sử dụng công thức hình thang mở rộng hãy xấp xỉ tích phân $I = \int_{1.2}^{1.8} xy^2(x)dx$

Giải.

k	0	1	2	3	4	5	6
x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
y	16.23	18.55	17.42	15.59	17.78	18.73	19.81

$h = x_1 - x_0 = 0.1$

$$I \approx 285.0172$$

Bài tập

Cho tích phân $I = \int_{1.1}^{2.3} \ln \sqrt{2x+2}dx$. Hãy xấp xỉ tích phân I bằng công thức hình thang mở rộng với $n = 8$

Giải.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.3-1.1}{8} = 0.15$$

$$I \approx 1.0067$$

Công thức Simpson

Để tính gần đúng tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ ta chia $[a, b]$ thành 2 đoạn bằng nhau bởi điểm $x_1 = a + h, h = \dfrac{b-a}{2}$ thay hàm dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy Newton tiến bậc 2 đi qua 3 điểm $(a, f(a)), (x_1, f(x_1))$ và $(b, f(b))$ xuất phát từ nút $(a, f(a))$
Vậy $P_2(x) = f(a) + f[a, x_1](x-a) + f[a, x_1, b](x-a)(x-x_1)$
$\int_a^b P_2(x)dx = \int_a^b f(a) + f[a, x_1](x-a) + f[a, x_1, b](x-a)(x-x_1)dx$ Đổi biến $x = a + ht \Rightarrow dx = hdt, t \in [0, 2]$

$$\int_a^b P_2(x)dx = \int_0^2 (f(a) + f[a, x_1]ht + f[a, x_1, b]h^2 t(t-1))hdt$$

trong đó $f[a, x_1]h = y_1 - f(a), f[a, x_1, b]h^2 = \dfrac{f(b) - 2f(x_1) + f(a)}{2}$. Vậy $\int_a^b P_2(x)dx = \dfrac{h}{3}(f(a) + 4f(x_1) + f(b))$

Công thức hình Simpson mở rộng

Chia đoạn $[a, b]$ thành $n = 2m$ đoạn nhỏ với bước chia $h = \dfrac{b-a}{2m}$. Khi đó $a = x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_k = x_0 + kh, \ldots, x_{2m} = x_0 + 2mh, y_k = f(x_k)$
Sử dụng công thức Simpson cho từng đoạn $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ ta được

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

$$\approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + .. + y_{2m-2}) + 4(y_1 + .. + y_{2m-1})].$$

Ví dụ

Tính gần đúng tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ *bằng công thức Simpson khi chia đoạn* $[0,1]$ *thành* $n = 10$ *đoạn nhỏ.*

Giải.

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}, x_0 = 0, x_k = \frac{k}{10}, x'_k = \frac{2k-1}{20}$

$y_k = f(x_k) = \frac{1}{1+\frac{k}{10}} = \frac{10}{10+k}, y'_k = \frac{20}{2k+19}$

Vậy $I \approx \frac{h}{6}\sum\limits_{k=0}^{9}(y_k + 4y'_{k+1} + y_{k+1}) =$

$\frac{1}{60}\sum\limits_{k=0}^{9}\left(\frac{10}{10+k} + 4\frac{20}{2k+21} + \frac{10}{10+(k+1)}\right) \approx 0.6931$

Ví dụ

Cho bảng

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
y	16.23	18.55	17.42	15.59	17.78	18.73	19.81

của hàm $f(x)$. Sử dụng công thức Simpson mở rộng hãy xấp xỉ tích phân

$$I = \int_{1.2}^{1.8} xy^2(x)dx$$

Giải.

k	0	1	2	3	4	5	6
x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
y	16.23	18.55	17.42	15.59	17.78	18.73	19.81

$h = x_1 - x_0 = 0.1$

$$I \approx 283.8973$$

Sai số

Simpson

$$\Delta I = \frac{M_4(b-a)^5}{2^5.90}$$

Simpson suy rộng

$$\Delta I = \frac{n}{2}.\frac{M_4 h^5}{90} = \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$$

Trong đó

$$M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

$$n = 2m$$

Bài tập

Cho bảng

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
y	2	3.2	3	4.5	5.1	6.2	7.4

. Sử dụng công thức Simpson mở rộng hãy xấp xỉ tích phân $I = \int_1^{2.2} [y^2(x) + 2.2x^3]dx$

Giải.

$$h = x_1 - x_0 = 0.2$$

$$I \approx 39.3007$$