PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài giảng điện tử

Nguyễn Hồng Lộc

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2013.

Sai phân tiến

Áp dụng công thức Taylor:
$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + o(x_{k+1} - x_k)$
$\Rightarrow f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$

$$\Rightarrow f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

Sai phân lùi

Áp dụng công thức Taylor:
$f(x_k) = f(x_{k+1}) + f'(x_{k+1})(x_k - x_{k+1}) + o(x_k - x_{k+1})$
$\Rightarrow f(x_k) \approx f(x_{k+1}) + f'(x_{k+1})(x_k - x_{k+1})$

$$\Rightarrow f'(x_{k+1}) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}$$

Sai phân hướng tâm

Xét 3 điểm cách đều x_{k-1}, x_k, x_{k+1} và $h = x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1}$.
Áp dụng khai triển Taylor đến cấp 2:
$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k).h + f''(x_k)\frac{h^2}{2} + o(h^2)$ (1)
$f(x_{k-1}) = f(x_k) - f'(x_k).h + f''(x_k)\frac{h^2}{2} + o(h^2)$ (2)
$(1) - (2) \Rightarrow f(x_{k+1}) - f(x_{k-1}) = 2hf'(x_k) + o(h^2)$

$$\Rightarrow f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h}$$

$(1) + (2) \Rightarrow f(x_{k+1}) + f(x_{k-1}) = 2f(x_k) + h^2 f''(x_k) + o(h^2)$

$$\Rightarrow f''(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})}{h^2}$$

Nhiều bài toán của khoa học kỹ thuật dẫn đến việc giải phương trình vi phân. Bài toán đơn giản nhất là bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a < x \leqslant b, \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

với $y = y(x)$ là hàm cần tìm, khả vi trên đoạn $[a, b]$, y_0 là giá trị ban đầu cho trước của $y(x)$ tại $x = a$.

Đối với bài toán Cauchy (1) ta chỉ có thể tìm được nghiệm đúng của một số phương trình đơn giản, còn đối với trường hợp $f(x, y)$ có dạng bất kỳ thì nói chung không có phương pháp giải.

Ngoài ra, trong những trường hợp có thể tìm ra nghiệm đúng của bài toán Cauchy (1) quá phức tạp thì người ta cũng ít dùng.

Vì vậy, việc tìm những phương pháp giải gần đúng bài toán Cauchy có vai trò rất quan trọng trong thực tế.

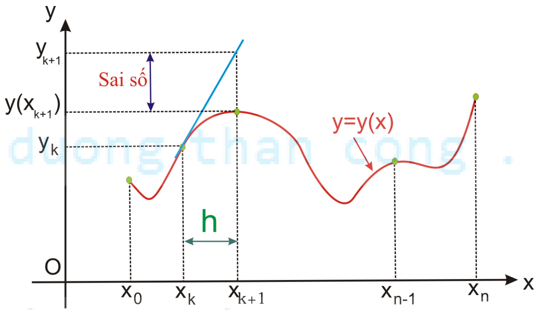
Để tìm nghiệm gần đúng của bài toán (1) ta chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bằng nhau với $h = \dfrac{b-a}{n}$. Khi đó các điểm chia là $x_0 = a, x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, 2, \ldots, n, x_n = b$. Giá trị gần đúng cần tìm của hàm tại điểm x_k được ký hiệu là y_k và ta có $y_k \approx y(x_k)$
Giả sử $y(x)$ là nghiệm duy nhất của bài toán (1), có đạo hàm đến cấp 2 liên tục trên đoạn $[a, b]$. Áp dụng phương trình $y'(x) = f(x, y(x))$ tại nút (x_k, y_k) và sử dụng sai phân tiến cho đạo hàm, ta có:

$$y'(x_k) = f(x_k, y(x_k)) \Rightarrow \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = f(x_k, y(x_k))$$

Công thức Euler

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ý nghĩa hình học của phương pháp Euler



Ý nghĩa hình học của công thức Euler là từ điểm (x_k, y_k) thuộc đường cong $y = y(x)$, kẻ tiếp tuyến với đường cong. Đường tiếp tuyến sẽ cắt $x = x_{k+1}$ tại y_{k+1} chính là giá trị gần đúng của hàm tại $x = x_k$

Ví dụ

Sử dụng phương pháp Euler để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - x^2 + 1, & 0 < x \leqslant 2, \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

với $n = 10$. *Tại những điểm nút chia so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác, biết nghiệm chính xác của bài toán là* $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$.

Giải.

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
2	0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
3	0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
4	0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
5	1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
6	1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
7	1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
8	1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
9	1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
10	2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874

Áp dụng phương trình $y'(x) = f(x, y(x))$ tại nút (x_{k+1}, y_{k+1}) và sử dụng sai phân lùi cho đạo hàm, ta có:

$$y'(x_{k+1}) = f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) \Rightarrow \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} \approx f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))$$

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Kết hợp với công thức $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$ ta được công thức cải tiến:

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Việc tính toán theo công thức trên rất phức tạp vì cả 2 vế đều chứa y_{k+1} là ẩn cần tìm. Để đơn giản ta thay y_{k+1} ở vế phải bởi công thức Euler $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

Lúc này ta có công thức

Euler cải tiến (RK2)

$$y(x_{k+1}) \approx y_{k+1} = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))}{2}$$

Ví dụ

Sử dụng phương pháp Euler cải tiến để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y - x^2 + 1, & 0 < x \leqslant 2, \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

với $n = 10$. *Tại những điểm nút chia so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác, biết nghiệm chính xác của bài toán là* $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$.

Giải.

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.8260000	0.8292986	0.0032986
2	0.4	1.2069200	1.2140877	0.0071677
3	0.6	1.6372424	1.6489406	0.0116982
4	0.8	2.1102357	2.1272295	0.0169938
5	1.0	2.6176876	2.6408591	0.0231715
6	1.2	3.1495789	3.1799415	0.0303627
7	1.4	3.6936862	3.7324000	0.0387138
8	1.6	4.2350972	4.2834838	0.0483866
9	1.8	4.7556185	4.8151763	0.0595577
10	2.0	5.2330546	5.3054720	0.0724173

$$\begin{cases} y_{k+1} & = & y(x_k+h) \approx y_k + \sum_{j=1}^{n} A_j K_j^k \\ K_1^k & = & hf(x_k, y_k) \\ K_2^k & = & hf(x_k+\alpha_2 h, y_k + \beta_{21} K_1^k) \\ K_3^k & = & hf(x_k+\alpha_3 h, y_k + \beta_{31} K_1^k + \beta_{32} K_2^k) \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_n^k & = & hf(x_k+\alpha_n h, y_k + \beta_{n1} K_1^k + \beta_{n2} K_2^k + \ldots + \beta_{n,n-1} K_{n-1}^k) \end{cases}$$

trong đó các hệ số $A_1, A_2, \ldots, A_n; \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n; \beta_{21}, \beta_{31}, \ldots, \beta_{n,n-1}$ được xác định theo phương pháp sau. Đặt

$$\varphi(h) = y(x_k+h) - y_k - \sum_{j=1}^{n} A_j K_j^k.$$

Các hệ số cần tìm thỏa mãn điều kiện $\varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(m)}(0) = 0$. Công thức Runge-Kutta có độ chính xác cao hơn công thức Euler, vì dùng khai triển Taylor nghiệm $y = y(x)$ của bài toán (1) với nhiều số hạng hơn.

Công thức Runge-Kutta bậc bốn

Trong trường hợp $n = m = 4$ ta có công thức Runge-Kutta bậc bốn

$$\begin{cases} y_{k+1} = y(x_k + h) \approx y_k + \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \\ K_1^k = hf(x_k, y_k) \\ K_2^k = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1^k}{2}) \\ K_3^k = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2^k}{2}) \\ K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k) \end{cases}$$

Ví dụ

Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 để xấp xỉ nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) &= y - x^2 + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ y(0) &= 0.5 \end{cases}$$

với $n = 10$. *Tại những điểm nút chia so sánh giá trị gần đúng với giá trị chính xác, biết nghiệm chính xác của bài toán là* $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$.

Giải.

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
1	0.2	0.8292933	0.8292986	0.0000053
2	0.4	1.2114362	1.2140877	0.0000114
3	0.6	1.6404175	1.6489406	0.0026515
4	0.8	2.1088953	2.1272295	0.0183342
5	1.0	2.6079021	2.6408591	0.032957
6	1.2	3.1264849	3.1799415	0.0000474
7	1.4	3.6512660	3.7324000	0.0000599
8	1.6	4.1659056	4.2834838	0.0000743
9	1.8	4.6504464	4.8151763	0.0000906
10	2.0	5.0805126	5.3054720	0.0001089

Bài tập

Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3x + x\sin(x+2y), & x \geqslant 1 \\ y(1) = 2.4 \end{cases}$$

Sử dụng công thức Runge-Kutta cấp 4 hãy xấp xỉ $y(1.2)$ với bước $h = 0.2$

Giải.

$$y(1.2) = 3.1123$$

Hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y_1(a) = y_{1,0} \quad , \quad y_2(a) = y_{2,0} \end{cases}$$

Lần lượt áp dụng phương pháp (Euler,Euler cải tiến, Gunge-Kutta) cho mỗi phương trình,chú ý tính theo nghiệm $y = [y_1(x_k), y_2(x_k)]^T$ theo thứ tự các nút x_k từ thấp đến cao.

Ví dụ nếu áp dụng phương pháp Euler, ta có:

$$\begin{cases} y_1(x_{k+1}) = y_1(x_k) + hf_1(x, y_1(x_k), y_2(x_k)) \\ y_2(x_{k+1}) = y_2(x_k) + hf_2(x, y_1(x_k), y_2(x_k)) \\ y_1(a) = y_{1,0} \quad , \quad y_2(a) = y_{2,0} \end{cases}$$

Phương trình vi phân bậc cao

$$\begin{cases} y''(x) = f_1(x)y' + f_2(x)y + f_3(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \alpha \quad , \quad y'(a) = \beta \end{cases}$$

Thực hiện đổi biến $y' = z \Rightarrow y'' = z', z(a) = y'(a) = \beta$
Phương trình vi phân được chuyển về hệ:

$$\begin{cases} y'(x) = z(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ z'(x) = f_1(x)z + f_2(x)y + f_3(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ y(a) = \alpha \quad , \quad z(a) = \beta \end{cases}$$

Bài tập

Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 4.6y' + 2x^3y + 2.6, , & 1 \leqslant x \leqslant 1.8 \\ y(1) = 1.2, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

Đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1. Sử dụng công thức Euler,giải gần đúng phương trình vi phân trên đoạn $[1; 1.8]$ với bước $h = 0.2$

Giải.

$$y(1.2) = 1.4000, \quad y(1.8) = 6.6665$$

- Các phương pháp tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân thường đòi hỏi các điều kiện được cho tại một thời điểm ban đầu nào đó.
- Đối với phương trình vi phân bậc hai, ta cần 2 giá trị $y(x_0)$ và $y'(x_0)$.
- Tuy nhiên, nhiều bài toán trong thực tế cho thấy điều kiện của hàm cần tìm được cho tại nhiều thời điểm khác nhau. Vấn đề này dẫn tới việc tìm nghiệm gần đúng của 1 dạng bài toán thứ hai được gọi là bài toán biên.
- Trong phần này chúng ta chỉ xét bài toán biên của phương trình vi phân thường tuyến tính cấp hai với điều kiện biên được cho ở 2 điểm có dạng

$$\begin{cases} p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = f(x), \\ a < x < b, \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta. \end{cases}$$

với phương pháp sai phân hữu hạn.

Phương pháp sai phân hữu hạn

- Chọn số tự nhiên bất kỳ $n > 0$. Chia đều đoạn $[a, b]$ thành n đoạn bởi các điểm chia $x_0 = a, x_k = x_0 + kh, k = 1, 2, \ldots, n-1, x_n = b$ với $h = \dfrac{b-a}{n}$.
- Tại các nút $x_k, k = 1, 2, \ldots, n-1$ bên trong đoạn $[a, b]$ sử dụng công thức sai phân hướng tâm, ta có

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

$$y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

- Thay vào phương trình đã cho ta được

$$p_k \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + q_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + r_k y_k = f_k,$$

$\forall k = 1, 2, \ldots, n-1$ với $p_k = p(x_k), q_k = q(x_k), r_k = r(x_k)$ và $f_k = f(x_k)$.

- Từ các điều kiện biên $y_0 = \alpha, y_n = \beta$ sau khi biến đổi ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} y_0 = \alpha, y_n = \beta \\ (\frac{p_k}{h^2} - \frac{q_k}{2h})y_{k-1} + (r_k - \frac{2p_k}{h^2})y_k + (\frac{p_k}{h^2} + \frac{q_k}{2h})y_{k+1} = f_k \\ \forall k = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

- Đây chính là hệ phương trình đại số tuyến tính cấp $n-1 : AY = B$ với A là ma trận

$$A = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2p_1}{h^2} & \frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h} & r_2 - \frac{2p_2}{h^2} & \frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-1} - \frac{2p_{n-1}}{h^2} \end{pmatrix}$$

$$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]^T$$

và

$$B = \begin{pmatrix} f_1 - (\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h})\alpha \\ f_2 \\ \ldots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} - (\frac{p_{n-1}}{h^2} + \frac{q_{n-1}}{2h})\beta \end{pmatrix}$$

Ma trận A ở trên là ma trận 3 đường chéo. Để giải hệ phương trình trên thì ta dùng phương pháp phân rã LU.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó phân rã Doolit cho ta

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ell_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Trường hợp n=4

$$\begin{pmatrix} r_1 - \frac{2p_1}{h^2} & \frac{p_1}{h^2} + \frac{q_1}{2h} & 0 \\ \frac{p_2}{h^2} - \frac{q_2}{2h} & r_2 - \frac{2p_2}{h^2} & \frac{p_2}{h^2} + \frac{q_2}{2h} \\ 0 & \frac{p_3}{h^2} - \frac{q_3}{2h} & r_3 - \frac{2p_3}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - (\frac{p_1}{h^2} - \frac{q_1}{2h})\alpha \\ f_2 \\ f_3 - (\frac{p_3}{h^2} + \frac{q_3}{2h})\beta \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Xét bài toán biên

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ y(0) = -0.3, y(\frac{\pi}{2}) = -0.1 \end{cases}$$

có nghiệm chính xác $y(x) = -0.1(\sin x + 3\cos x)$. *Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn xấp xỉ nghiệm gần đúng và so sánh với nghiệm chính xác trong trường hợp* $h = \frac{\pi}{8}$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y_0 = -0.3, y_4 = -0.1 \\ (\frac{1}{h^2} - \frac{-1}{2h})y_{k-1} + (-2 - \frac{2}{h^2})y_k + (\frac{1}{h^2} + \frac{-1}{2h})y_{k+1} = \cos(x_k) \\ \forall k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -0.3, y_4 = -0.1 \\ (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h})y_0 + (-2 - \frac{2}{h^2})y_1 + (\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h})y_2 = \cos(\frac{\pi}{8}) \\ (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h})y_1 + (-2 - \frac{2}{h^2})y_2 + (\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h})y_3 = \cos(\frac{\pi}{4}) \\ (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h})y_2 + (-2 - \frac{2}{h^2})y_3 + (\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h})y_4 = \cos(\frac{3\pi}{8}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2 - \frac{2}{h^2})y_1 & +(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h})y_2 & +0y_3 & = & \cos(\frac{\pi}{8}) - (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h})y_0 \\ (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h})y_1 & +(-2 - \frac{2}{h^2})y_2 & +(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h})y_3 & = & \cos(\frac{\pi}{4}) \\ 0y_1 & +(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h})y_2 & +(-2 - \frac{2}{h^2})y_3 & = & \cos(\frac{3\pi}{8}) - (\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h})y_4 \end{cases}$$

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	$\lvert y(x_k) - y_k \rvert$
0	0	-0.30000	-0.30000	0.00000
1	$\frac{\pi}{8}$	-0.31569	-0.31543	0.00025
2	$\frac{\pi}{4}$	-0.28291	-0.28284	0.00007
3	$\frac{3\pi}{8}$	-0.20700	-0.20719	0.00019
4	$\frac{\pi}{2}$	-0.10000	-0.10000	0.00000

Bài tập

Cho bài toán biên tuyến tính cấp 2

$$\begin{cases} xy'' + 12y' - 4.6y = 2 + 2(x+2)^2, & 0.4 \le x \le 1.2 \\ y(0.4) = 1.3, \quad y(1.2) = 4.6 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn,hãy xấp xỉ giá trị của hàm $y(x)$ trên đoạn $[0.4; 1.2]$ với bước $h = 0.2$

Giải.

$$y(0.6) = 3.2924, \quad y(0.8) = 3.3097, \quad y(1.0) = 3.9643$$