

Chương 1: Giới hạn dãy số

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : \forall n > N \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Tức là: phần lớn các phần tử của dãy “tụ tập” xung quanh a thì ta nói dãy HỘI TỤ về a

2. Tính chất cơ bản cần nhớ:

Dãy hội tụ thì bị chặn:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Rightarrow \exists A, B : A \leq u_n \leq B, \forall n$$

Dãy có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b \Rightarrow a = b$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

Tóm tắt lý thuyết

3. Dãy VCB : $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow \{\alpha_n\}$: gọi là dãy VCB.

$$(u_n \rightarrow a) \Leftrightarrow (u_n = a + \alpha_n, \alpha_n : VCB)$$

$$\alpha_n : VCB \& \beta_n : VCB \Rightarrow \alpha_n + \beta_n : VCB$$

$$\alpha_n : VCB \& |u_n| \leq M (\forall n) \Rightarrow \alpha_n \cdot u_n : VCB$$

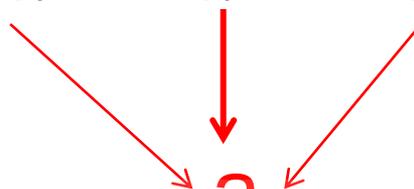
4. Dãy VCL : $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n| = +\infty \Rightarrow \{A_n\}$: gọi là dãy VCL.

Chương 1: Giới hạn dãy số

Tóm tắt lý thuyết

5. Định lý kẹp:

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$



cuu duong than cong . com

6. Định lý HT bị chặn :

Dãy tăng ($u_n \leq u_{n+1}, \forall n$) và bị chặn trên ($\exists M : u_n \leq M, \forall n$)

cuu duong than cong . com

hoặc giảm ($u_n \geq u_{n+1}, \forall n$) và bị chặn dưới ($\exists m : u_n \geq m, \forall n$)

thì hội tụ

Chương 1: Giới hạn dãy số

Tóm tắt lý thuyết

7. Dãy con: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{n_k} = a, \forall \{u_{n_k}\}$

$$\left. \begin{array}{l} \exists \{u_{n_k}\} : \lim_{n_k \rightarrow \infty} u_{n_k} = a_1 \\ \exists \{u_{n_l}\} : \lim_{n_l \rightarrow \infty} u_{n_l} = a_2 \neq a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

8. Số e:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718..$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

Tóm tắt lý thuyết

9. Một số giới hạn cơ bản:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^p n}{n^\alpha} = 0, \forall p, \forall \alpha > 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1, \forall p$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{e^n} = 0, \forall p$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^\alpha n} = 0, \alpha > 0$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \forall \alpha$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

II. Các Ví dụ

VD1: Tính các giới hạn sau

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 - 2} \right)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right)$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha \sqrt[3]{n^2 + 3} - \sqrt{n + 1}}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^4 + n}}$$

VD2: Tính các giới hạn sau

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 \cdot 3^n + 5^n}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + (-1)^n 3^{n-1}}{2^n - (-1)^{n+1} 3^{n+1}}$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

II. Các Ví dụ

VD3: Tính các giới hạn sau

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{(n-1)(n+1)}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1} \right)^{n^2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1} \right)^n \left(\frac{2n+2}{n+4} \right)^{1/3}$$

VD4: Tính các giới hạn sau

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sin n}{n+1}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{2}{n^3+2} + \dots + \frac{n}{n^3+n} \right)$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

II. Các Ví dụ

VD3: Tính các giới hạn sau

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{(n-1)(n+1)}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1} \right)^{n^2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n-1} \right)^n \left(\frac{2n+2}{n+4} \right)^{1/3}$$

VD4: Tính các giới hạn sau

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sin n}{n+1}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{2}{n^3+2} + \dots + \frac{n}{n^3+n} \right)$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

III. Bài tập: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ với:

$$1. u_n = \frac{3^{n+1} + 5^n}{3^n - 5^{n+1}}$$

$$2. u_n = \frac{2^{-2n} + 3^{n+2}}{2^{2n} - 3^{2-n}}$$

$$3. u_n = \sqrt[n]{n^3 \cdot 3^n + 7^n} \sqrt{n^3 + 1}$$

$$4. u_n = \frac{n+1}{n^3 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$5. u_n = \frac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3} - (-1)^n}$$

$$6. u_n = \frac{\ln(n^2 + n \cdot \sin n^2 + 1)}{\sin n^2 + \ln(n+1)}$$

$$7. u_n = \frac{1}{n(\sqrt{n^2 + 1} - n)}$$

$$8. u_n = \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n^5 + 1} + 5^n}{n^2 + 2^n}}$$

$$9. u_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n} \left(\frac{n}{n+2}\right)^3$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

III. Bài tập: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ với:

$$10. u_n = \frac{\ln(n^{20} + 3n^8 + 1)}{-5n^{20} + 13n + 4}$$

$$11. u_n = \frac{\sqrt{n^2 + \ln n} - \sqrt[3]{3n^3 + 1}}{n^{2+\alpha}}$$

$$12. u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$13. u_n = n \left(\sqrt[3]{n^\alpha + 1} - n \right)$$

Chương 1: Giới hạn dãy số

III. Bài tập: Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ với:

$$14. u_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$15. u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$$

$$16. u_n = \frac{n}{n + 1} \cos \frac{n\pi}{2}$$

cuu duong than cong . com

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

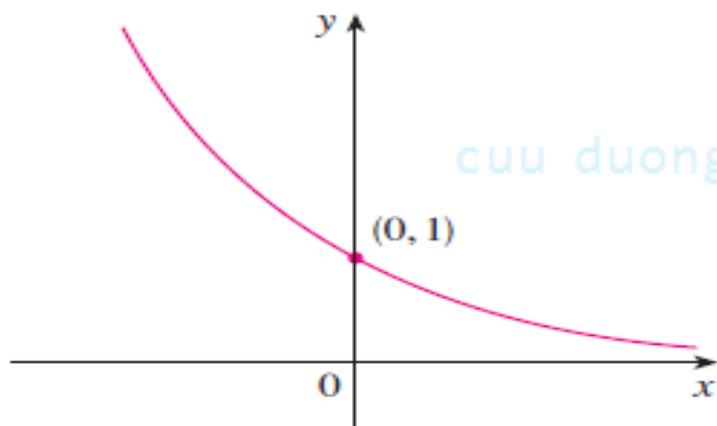
Hàm số mũ: $y = a^x$ Điều kiện : $a > 0, a \neq 1$

MXĐ: $(-\infty, +\infty)$, MGT: $(0, +\infty)$

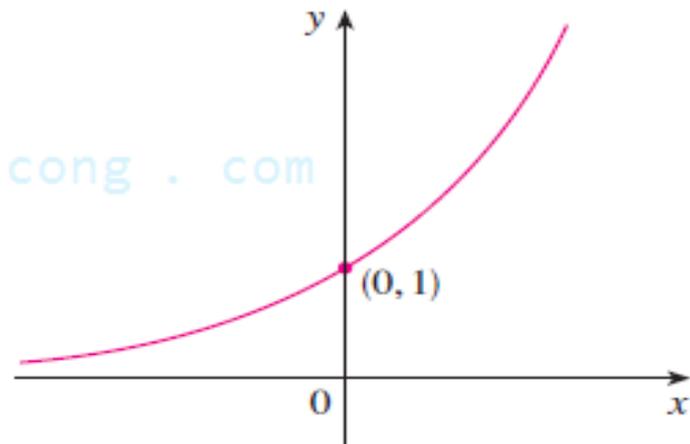
Khi $0 < a < 1$: Hàm nghịch biến Khi $a > 1$: Hàm đồng biến

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$



(a) $y = a^x, 0 < a < 1$



(c) $y = a^x, a > 1$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm logarit: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$a > 1$: Hàm đồng biến

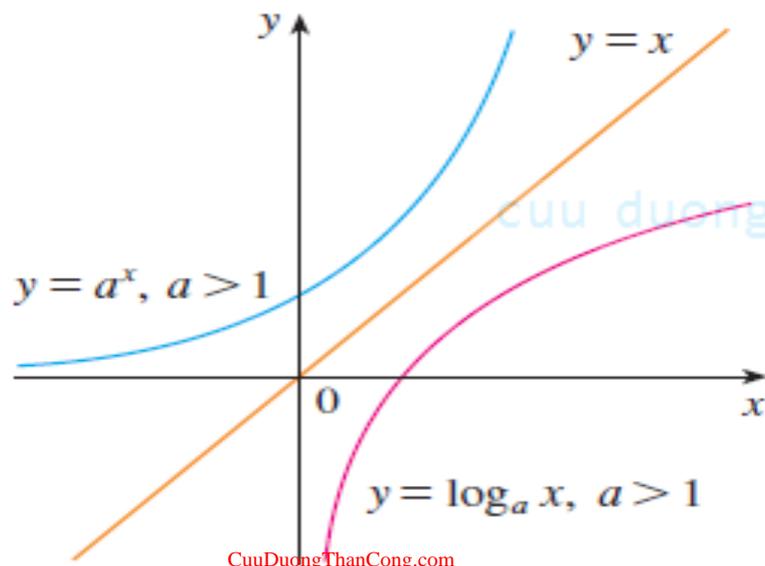
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$0 < a < 1$: Hàm nghịch biến

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$



$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$

$$\log_a (a^x) = x, \forall x; a^{\log_a x} = x, \forall x > 0$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

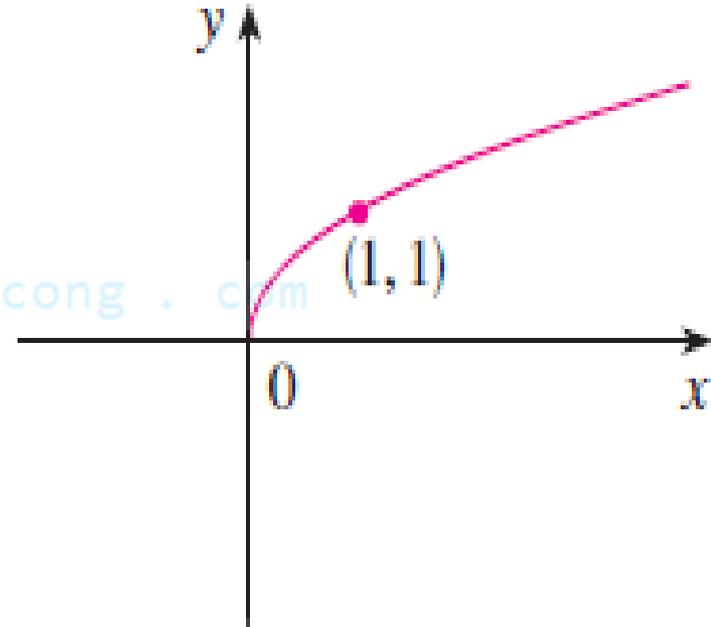
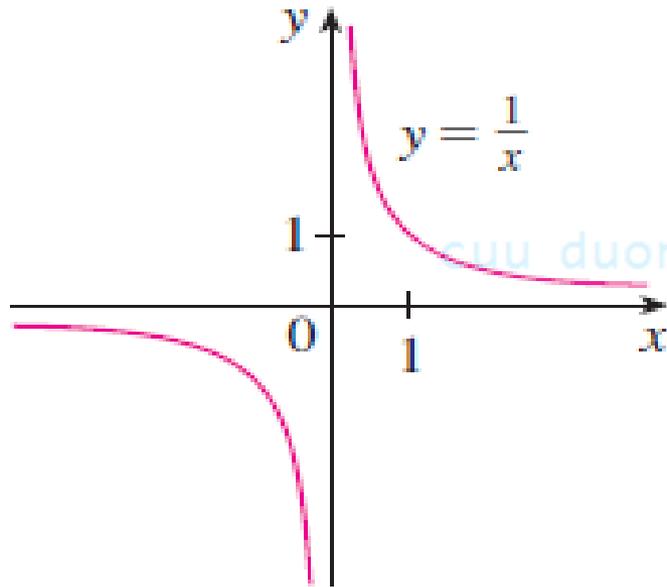
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^r) = r \log_a x, \forall r \in \mathbb{R}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm lũy thừa : $y=x^a$ MXĐ, MGT : Tùy thuộc vào a



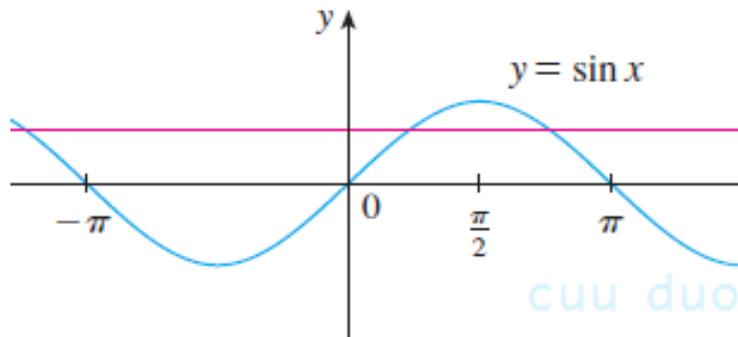
$a = -1$: MXĐ: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
MGT: \mathbb{R}^* . Ta còn gọi đây là
đường Hyperbol

$a = 1/2$: MXĐ $[0, +\infty)$,
MGT $[0, +\infty)$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

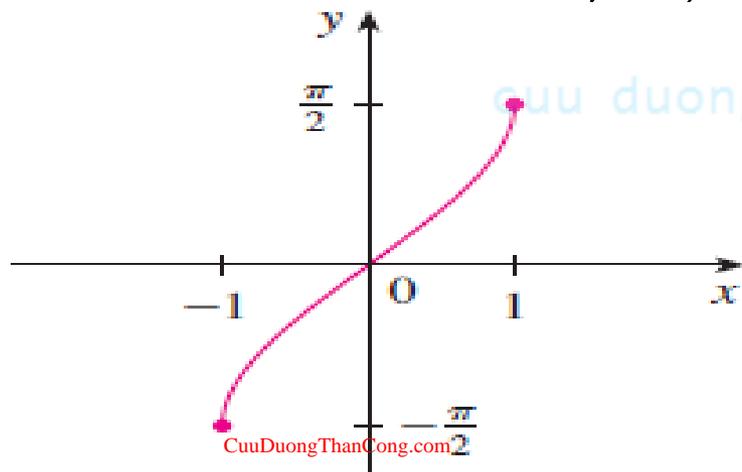
I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm lượng giác $y = \sin x$



Hàm ngược $y = \arcsin x$

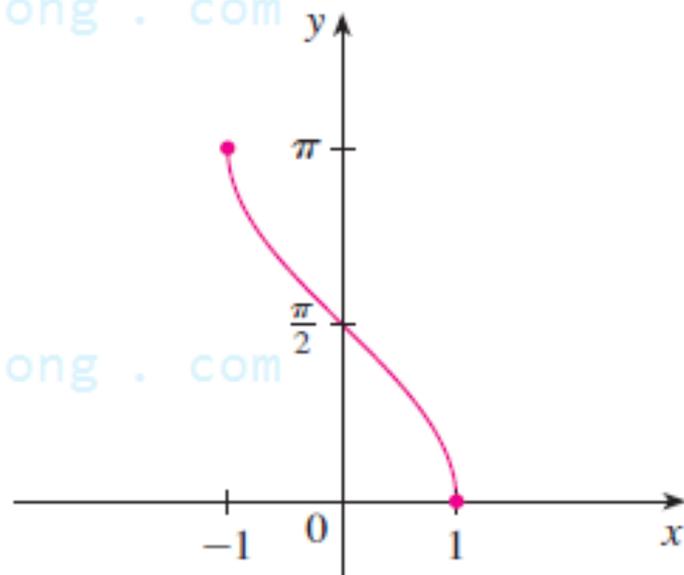
MXĐ: $[-1, 1]$, MGT: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Hàm $y = \cos x$

Hàm ngược: $y = \arccos x$,

MXĐ: $[-1, 1]$, MGT: $[0, \pi]$



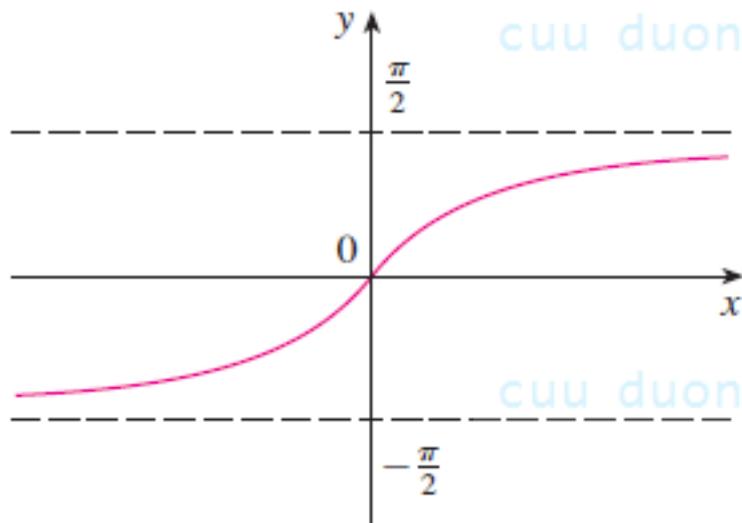
Chương 2: Giới hạn và Liên tục

I. Các hàm sơ cấp cơ bản:

Hàm $y = \tan x$

Hàm ngược $y = \arctan x$,

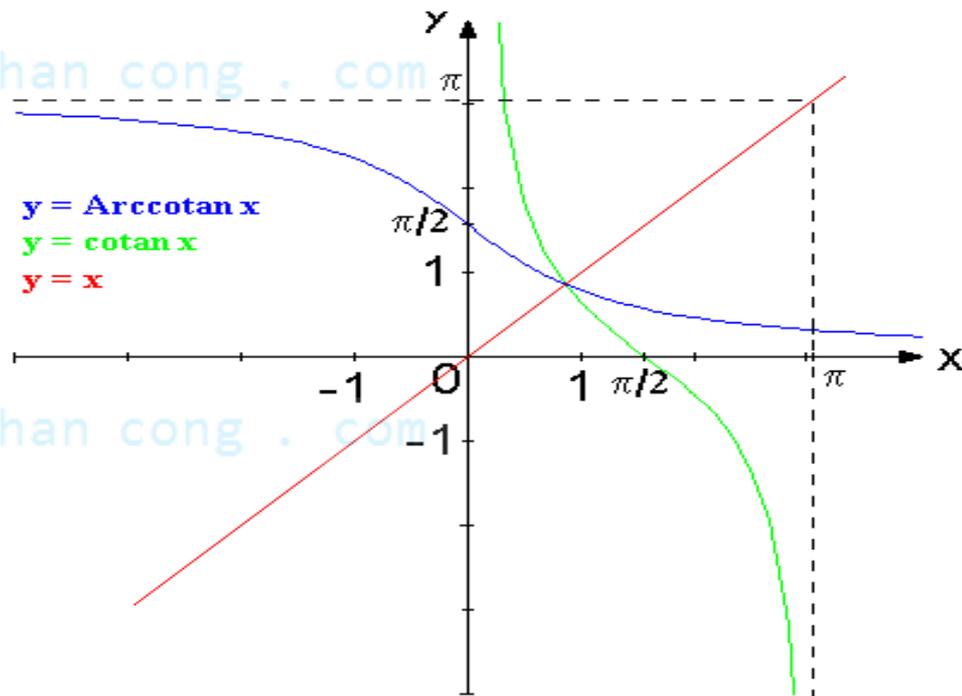
MXĐ: \mathbb{R} , MGT: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Hàm $y = \cot x$

Hàm ngược $y = \operatorname{arccot} x$

MXĐ: \mathbb{R} , MGT: $(0, \pi)$



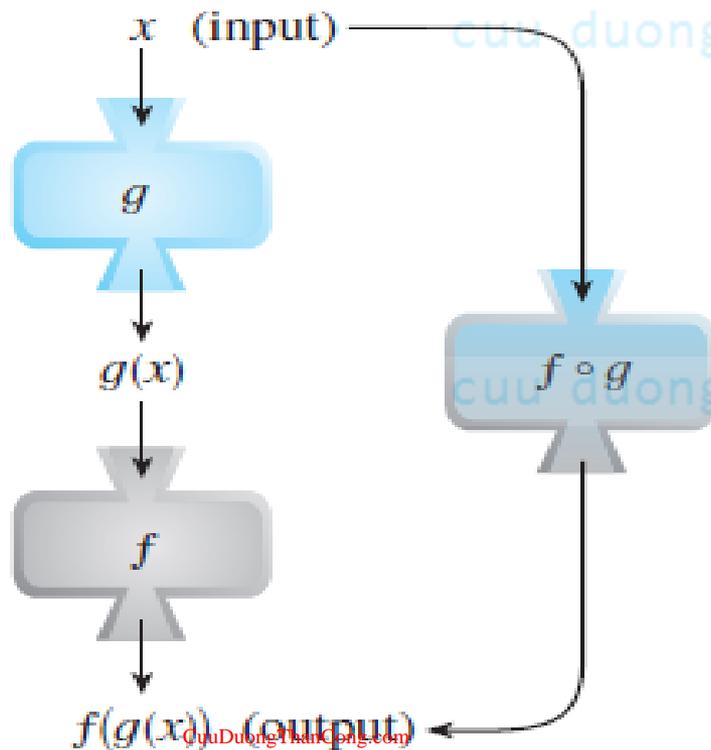
Chương 2: Giới hạn và Liên tục

II. Hàm hợp – Hàm ngược – Hàm hyperbol:

Hàm hợp : Cho 2 hàm $g : X \rightarrow Y, f : Y \rightarrow Z$

Ta gọi hàm hợp của 2 hàm trên là $h = f \circ g$

Được xác định như sau : $h : X \rightarrow Z, h(x) = f(g(x))$



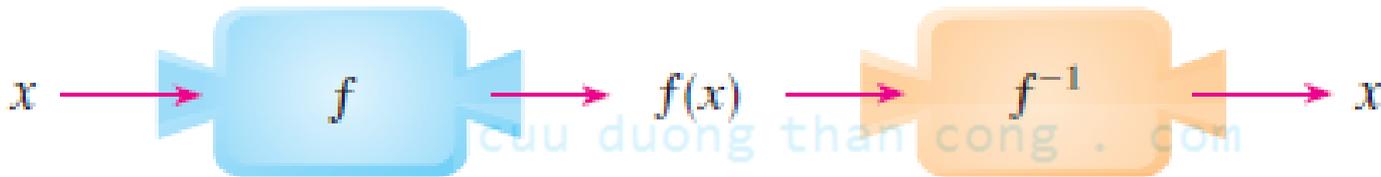
Lưu ý : Nói chung 2 hàm
 $f \circ g, g \circ f$
không bằng nhau

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

II. Hàm hợp – Hàm ngược – Hàm hyperbol:

Hàm ngược : Cho hàm 1-1 $f : X \rightarrow Y, f(x) = y$
hàm ngược của hàm, được kí hiệu là $y = f^{-1}(x)$,
 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sao cho $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

Như vậy : $f(f^{-1}(y))=y$ và $f^{-1}(f(x))=x$



Ta có: MXĐ của hàm f^{-1} là MGT của hàm f và MGT của hàm f^{-1} là MXĐ của hàm f

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

II. Hàm hợp – Hàm ngược – Hàm hyperbol:

Định nghĩa

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Công thức liên hệ

$$1/ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$2/ \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}x, \\ \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

$$3/ \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}y$$

$$4/ \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}y$$

$$5/ \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}y \cdot \operatorname{ch}x$$

$$6/ \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}y \cdot \operatorname{ch}x$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

II. Hàm hợp – Hàm ngược – Hàm hyperbol:

Ví dụ: Tìm MXĐ của các hàm sau

$$1. y = \arcsin\left(\sqrt{x^2 + 1} - 2\right) \qquad 2. y = \ln\left(1 + \frac{2 - x}{x^2}\right)$$

Ví dụ: Cho 2 hàm sau $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = \arctan x$

Tìm $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$

Ví dụ: Tìm hàm ngược của các hàm sau

$$1. y = x^3 + 1$$

$$2. y = \sinh x$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$):

Cho hàm $f(x)$ và x_0 là 1 điểm tụ của MXĐ D_f của hàm

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Chú ý: Hàm $f(x)$ có thể không xác định tại x_0

cuu duong than cong . com

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ dãy):

Cho x_0 là điểm tụ của MXĐ D_f của hàm $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D_f, x_n \neq x_0, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$$

$$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Chú ý: Ta thường dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy để chứng minh giới hạn hàm không tồn tại bằng cách chỉ ra 2 dãy

$$(x_n), (x'_n) \rightarrow x_0 \text{ với tương ứng } f(x_n), f(x'_n)$$

có 2 giới hạn khác nhau

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Tính chất của giới hạn hàm

Cho : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f) = \alpha a, \alpha \in \mathbb{R} \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = a + b$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g) = a \cdot b \quad 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

$$5) \left(\forall x \in V_\varepsilon(x_0), f(x) \leq g(x) \right) \Rightarrow a \leq b$$

$$6) \begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} h = a \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \quad (\text{Định lý kẹp})$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

$$\text{Số } e : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\text{Giới hạn dạng } u(x)^{v(x)} : \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)}$$

Giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \rightarrow \infty$

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty, \quad \alpha > 0$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^\alpha = +\infty, \quad \alpha > 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad a > 1$
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ không tồn tại

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Gh cơ bản thường gặp khi $x \rightarrow 0$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{1/x} = e^\alpha$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Các dạng vô định: 1) $\frac{0}{0}$ 2) $\frac{\infty}{\infty}$ 3) $0 \cdot \infty$ 4) 1^∞
5) $\infty - \infty$ 6) 0^0 7) ∞^0

Việc giải bài toán tính giới hạn hàm, chủ yếu là việc khử các dạng vô định

Ví dụ: Tính các giới hạn sau bằng cách áp dụng các

giới hạn cơ bản $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\tan 3x}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Giới hạn 1 phía:

Số a gọi là **giới hạn trái** của $y = f(x)$ tại điểm x_0 , nếu
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x_0 - x < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$

ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$

Số a gọi là **giới hạn phải** của $y = f(x)$ tại điểm x_0 , nếu
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x - x_0 < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$

ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Định lý:

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại x_0 khi và chỉ khi nó có giới hạn trái, giới hạn phải tại x_0 và chúng bằng nhau.

Chú ý:

cuu duong than cong . com

- 1. Ta có thể dùng định lý trên để chứng minh không tồn tại giới hạn hàm (Ngoài cách dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy).*
- 2. Giới hạn một phía thường được dùng trong các trường hợp hàm chứa căn bậc chẵn, chứa trị tuyệt đối, hoặc hàm ghép.*

cuu duong than cong . com

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} 2^{\frac{1}{x-1}}$

Ví dụ : Tìm a để hàm f(x) có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x > 0 \\ 5x + a, & x \leq 0 \end{cases}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

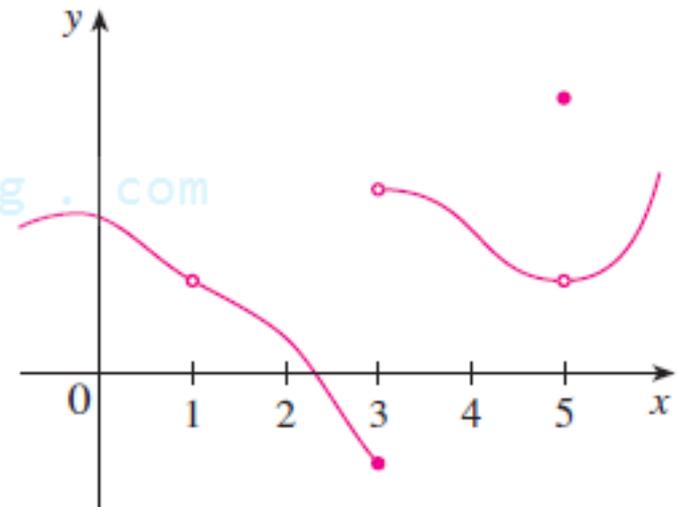
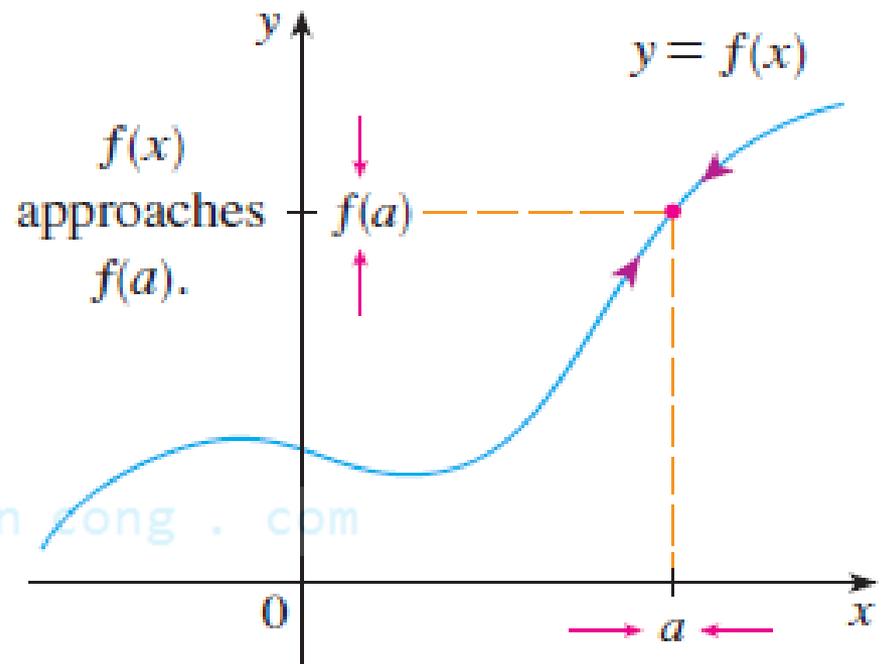
III. Giới hạn và liên tục:

Hàm liên tục: Hàm $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x=a$ thuộc MXĐ của hàm nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Hàm gián đoạn tại $x=a$ nếu nó không liên tục tại đó

Đồ thị của hàm $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=3$



Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Các hàm sơ cấp cơ bản là 5 lớp hàm sau

1. Hàm số mũ : $y=a^x$

2. Hàm lũy thừa: $y=x^a$

3. Hàm loga: $y=\log_a x$

4. Các hàm lượng giác: 4 hàm

5. Các hàm lượng giác ngược: 4 hàm

Hàm sơ cấp là các hàm tạo từ các hàm sơ cấp cơ bản với 4 phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) & phép hợp hàm

Định lý (về sự liên tục của các hàm sơ cấp):

Các hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm xác định của nó

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và liên tục:

Liên tục 1 phía: Thay giới hạn trong định nghĩa hàm liên tục bởi 2 giới hạn 1 phía, tương ứng ta có khái niệm liên tục trái, liên tục phải

Định lý: Hàm liên tục tại $x=a$ khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại $x=a$

Tính chất hàm liên tục: Tổng, tích, thương và hợp các hàm liên tục lại là các hàm liên tục

Ví dụ: Tìm a để hàm $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ 3 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$
liên tục với mọi x

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL:

VCB: Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Tính chất của các VCB

- 1) Tổng hữu hạn của các VCB là một VCB.
- 2) Tích của hai VCB là một VCB.
- 3) Tích của một VCB và một hàm bị chặn là một VCB.
- 4) Thương của hai VCB có thể không là một VCB.

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL : So sánh các VCB:

$\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai vô cùng bé khi $x \rightarrow x_0$

Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$

1) $k = 0$: $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$, kí hiệu là $\alpha(x) = o(\beta(x))$

2) $0 < k < \infty$: $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng cấp.

3) $k = 1$, thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương, kí hiệu là : $\alpha(x) \sim \beta(x)$

4) Nếu $\alpha(x)$ cùng bậc với $(\beta(x))^m$ thì ta nói bậc của $\alpha(x)$ là m so với $\beta(x)$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Ví dụ: So sánh các VCB sau

1. Khi $x \rightarrow 0$: $\alpha(x) = \sin^2 x + x^2$, $\beta(x) = \tan 2x$

2. Khi $x \rightarrow 1$: $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = e^{1-x} - 1$

Các VCB tương đương thường gặp khi $x \rightarrow 0$

1) $\sin x \sim x$

6) $\arcsin x \sim x$

2) $e^x - 1 \sim x$

7) $\arctan x \sim x$

3) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

8) $\tan x \sim x$

4) $\ln(1+x) \sim x$

9) $\sinh x \sim x$

5) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

10) $\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Qui tắc thay VCB tương đương với tích, thương

Cho các VCB tương đương $f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$

Ta có: $f_1(x).g_1(x) \sim f_2(x).g_2(x)$ $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$

Qui tắc thay VCB tương đương với tổng nhiều VCB

Giả sử $a \neq 0$, $b \neq 0$, α , β là các hằng số thực sao cho

khi $x \rightarrow 0$ thì $f_1(x)$, $f_2(x)$ là VCB: $f_1(x) \sim ax^\alpha$, $f_2(x) \sim bx^\beta$

$$f_1(x) + f_2(x) \sim \begin{cases} 1. ax^\alpha, \text{ khi } \alpha < \beta (\alpha \neq \beta) \\ 2. (a+b)x^\alpha, \text{ khi } \alpha = \beta \text{ \& } a+b \neq 0 \\ 3. \text{ không thay được, khi } \alpha = \beta \text{ \& } a+b=0 \end{cases}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Ví dụ: So sánh các VCB sau khi $x \rightarrow 0$:

$$1. \alpha(x) = x, \beta(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

Dùng đ/n

$$2. \alpha(x) = 2^{x^2} - \cos x, \beta(x) = \sin x^{3/2} - \arcsin x^2$$

Tính bậc

Ví dụ: Tìm a, b để $\alpha(x)$ tương đương với ax^b khi $x \rightarrow 0$

$$1. \alpha(x) = \sin(\sqrt{1-x} - 1)$$

$$2. \alpha(x) = \tan x^2 + 2x$$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2 + \ln(1+x)}$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Ví dụ: Tính giới hạn $L_2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin 2(x-1)}{e^{x-1} - \cos \sqrt{x-1}}$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\tan 3x}$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+x} - 2}{x}$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Ví dụ: Tính giới hạn $L_6 = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \cot 2x \cdot \cot(\pi/4 - x)$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_7 = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan^2 x)^{1/\sin^2(2x)}$

Ví dụ: Tính giới hạn $L_8 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{3x}$

$$L_8 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{3x}$$

Vì:
$$\begin{cases} e^x - 1 \sim x \\ e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x \end{cases}$$

Khi thay VCB tương đương, tử số thành 0 \rightarrow KHÔNG ĐƯỢC THAY

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL :

VCL: Hàm số $A(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = \infty$.

So sánh các VCL: $A(x), B(x)$ là hai vô cùng lớn khi $x \rightarrow x_0$

Giả sử: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = k$.

1) $k = \infty$: $A(x)$ gọi là VCL bậc cao hơn $B(x)$,

2) $0 \neq k < \infty$: $A(x)$ và $B(x)$ là hai VCL cùng cấp.

3) $k = 1$: $A(x)$ và $B(x)$ là hai VCL tương đương

4) Nếu $A(x)$ cùng bậc với $(B(x))^m$ thì bậc của $A(x)$ là m so với $B(x)$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn và VCB - VCL :

Quy tắc ngắt bỏ VCL

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}{\text{Tổng hữu hạn các VCL}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{VCL bậc cao nhất của tử}}{\text{VCL bậc cao nhất của mẫu}}$$

Ví dụ: Tính

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^{10} - 2x^5 + 2} - 2x^3 + x^4}{\sqrt{x^5 + 2x^3 - x + x^2 + 3x^3 - 2x^4}}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn – Bài tập:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sqrt[3]{1+2x} - 1)}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^x - a}{x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2 x - 1}{x - 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{4x - \pi}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - \cos(1/x)}{\arctan 1/x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log_5(1+5x)}{\arcsin^2 x}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \sin^2 x \right)^{1/\sin^2 x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn – Bài tập:

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+5x) - 1}{x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos x - \cos 3}{x - 3}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0)$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow m} \frac{a^x - a^m}{x - m}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn – Bài tập:

$$25. \lim_{x \rightarrow m} \frac{\ln x - \ln m}{x - m} \quad (m > 0)$$

$$26. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln(x+1) - \ln x)$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn – Bài tập:

Tính bậc của các VCB sau so với x , khi $x \rightarrow 0$

$$\alpha_1(x) = \sin 2x - 2 \sin x$$

$$\alpha_2(x) = e^{\sin x} - \cos x$$

$$\alpha_3(x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}$$

$$\alpha_4(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$$

$$\alpha_5(x) = \arcsin\left(\sqrt{4+x^2} - 2\right)$$

$$\alpha_6(x) = \tan x - \sin x$$

$$\alpha_7(x) = \arctan\left(\sqrt[3]{x^4 + 8} - 2\right)$$

$$\alpha_8(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$$

$$\alpha_9(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$$

$$\alpha_{10}(x) = 1 - \cos^3 x$$

Tính bậc của các VCB sau so với $(x-1)$, khi $x \rightarrow 1$

$$\beta_1(x) = e^x - e$$

$$\beta_2(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$$

$$\beta_3(x) = \ln^2 x + \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$\beta_4(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$$

Chương 2: Giới hạn và Liên tục

III. Giới hạn – Bài tập:

Tính giới hạn 1 phía

$$1. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \arctan \frac{1}{x-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pm 0} (x-1)e^{1/x}$$

Tìm a để hàm sau liên tục với mọi x:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\ln x)}{x-1}, & x < 1 \\ ax-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Tìm f(0) để hàm f(x) liên tục tại x=0:

$$a. f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$$

$$b. f(x) = \frac{\tan(\sqrt[3]{1+2x} - 1)}{x}$$