

Môn học : **GIẢI TÍCH 1**

CHƯƠNG 1: **GIỚI HẠN DÃY SỐ**

(Học trong giờ Bài tập)

CHƯƠNG 2: **GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC**

2.1 Giới thiệu các loại hàm : Hàm hợp, hàm ngược, các hàm lượng giác ngược, các hàm hyperbol

2.2 Giới hạn hàm số - Hàm liên tục

2.3 Vô cùng lớn – Vô cùng bé

CHƯƠNG 3: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

3.1 Đạo hàm hàm $y=f(x)$, hàm ngược, hàm cho bởi phương trình tham số

3.2 Đạo hàm cấp cao

3.3 Vi phân, vi phân cấp cao

3.4 Công thức Taylor – Maclaurin. Ứng dụng tính giới hạn hàm

3.5 Quy tắc L'Hospital

3.6 Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm $y=f(x)$

3.7 Giới thiệu phần mềm MatLab để giải bài toán giải tích

CHƯƠNG 4: TÍCH PHÂN HÀM 1 BIẾN

4.1 Tích phân bất định

4.2 Tích phân xác định – Công thức Newton-Leibnitz

4.3 Tích phân suy rộng: Tích phân với cận vô tận và Tích phân hàm không bị chặn

4.4 Ứng dụng của tích phân

CHƯƠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

5.1 Phương trình vi phân cấp 1: 5 dạng

5.2 Phương trình vi phân cấp 2: Pt giảm cấp được và Pt tuyến tính

5.3 Hệ Phương trình vi phân tuyến tính

CHƯƠNG 2: **GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC**

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

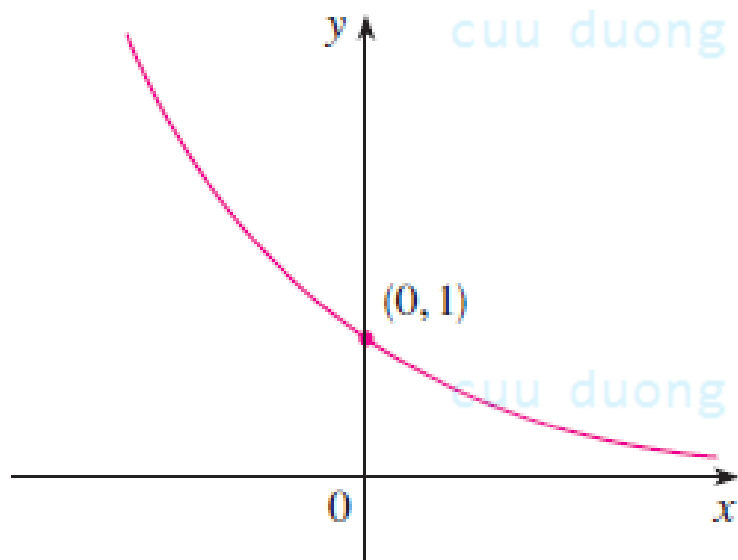
2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

Hàm số mũ: $y = a^x$

Nếu $a=1$ thì $a^x = 1, \forall x$, nên ta chỉ tính khi $a \neq 1$

Điều kiện : $a > 0, a \neq 1$

MXĐ: $(-\infty, +\infty)$, MGT: $(0, +\infty)$



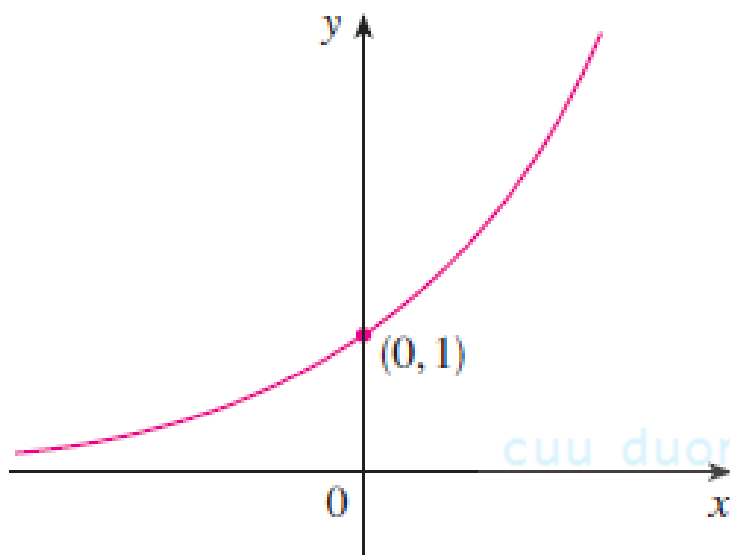
(a) $y = a^x, 0 < a < 1$

Khi $0 < a < 1$:

• Hàm nghịch biến

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học



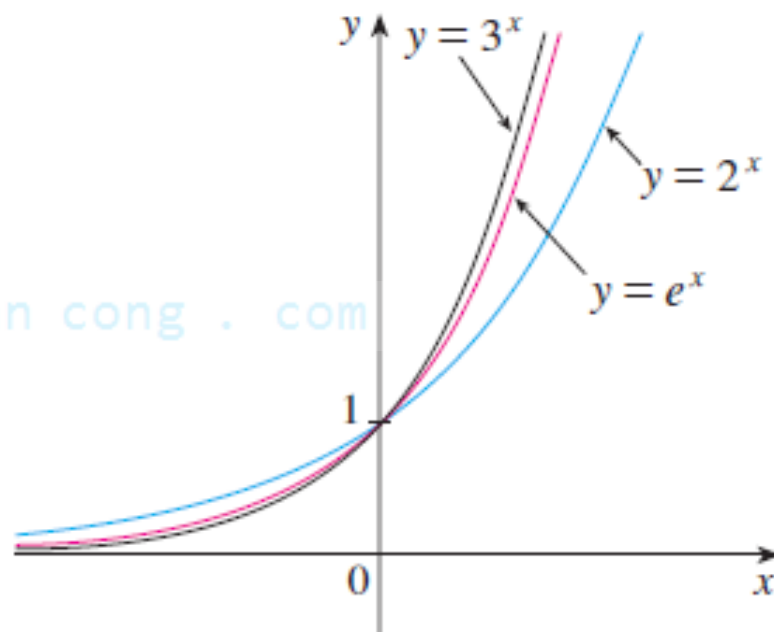
(c) $y = a^x, a > 1$

So sánh 3 hàm $y=2^x$,
 $y=e^x$, $y=3^x$

Khi $a > 1$:

Hàm đồng biến

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$



2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

Hàm logarit: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

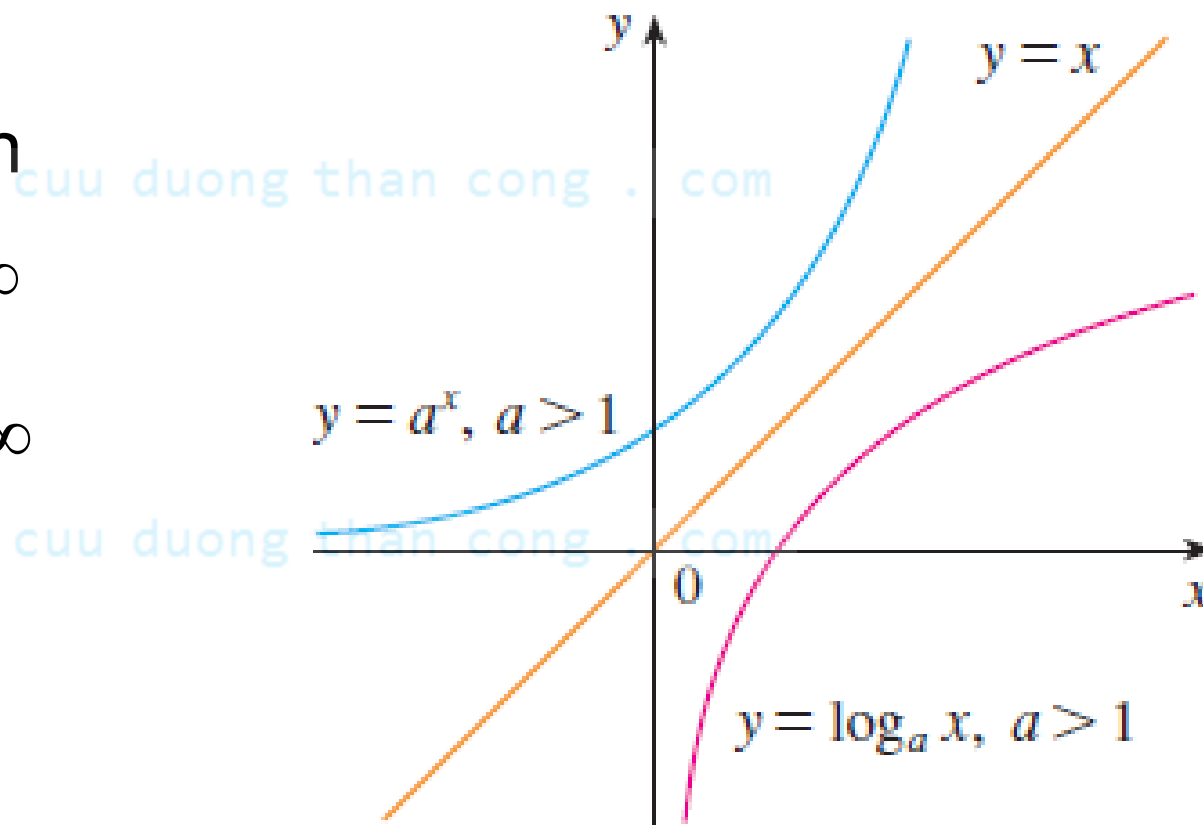
MXĐ : $(0, +\infty)$, MGT: $(-\infty, +\infty)$

$a > 1$:

Hàm đồng biến

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$



2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

$0 < a < 1$:

Hàm nghịch biến

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

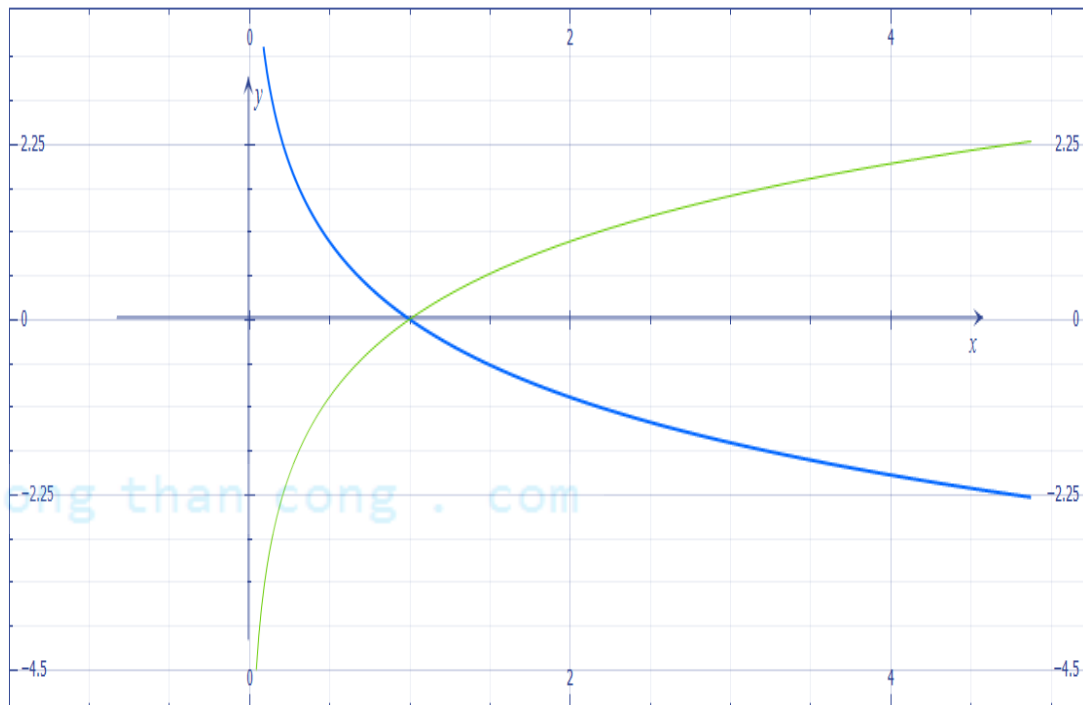
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

Tính chất:

$$y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$$

$$\log_a(a^x) = x, \forall x$$

$$a^{\log_a x} = x, \forall x > 0$$



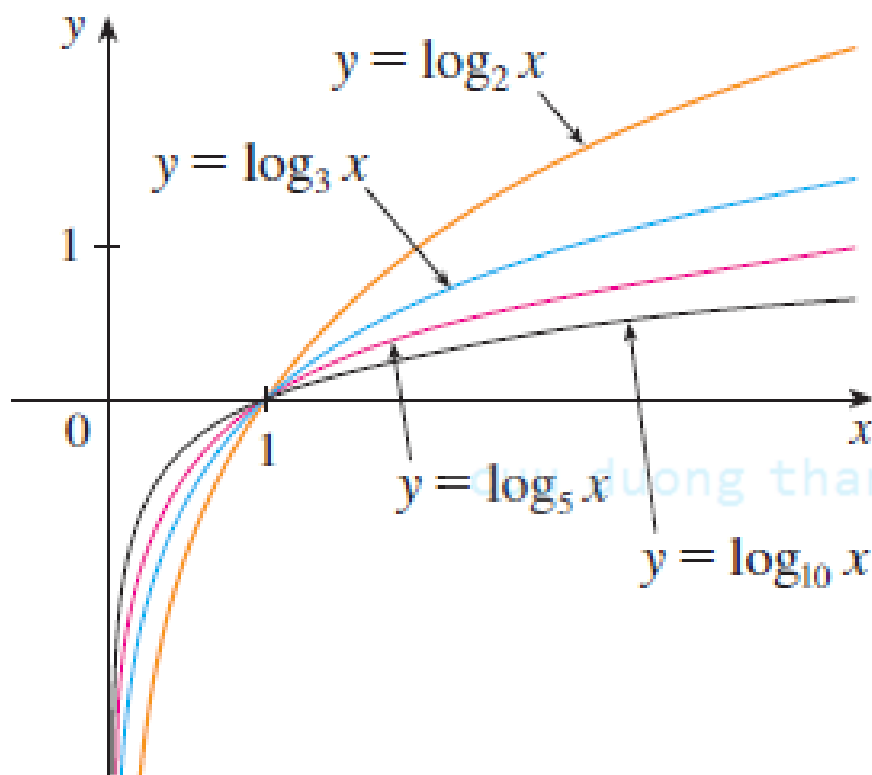
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a x, \forall r \in \mathbb{R}$$

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

So sánh một số hàm
logarit với $a > 1$ cụ thể



Đặc biệt: khi $a=e$, ta kí hiệu đơn giản $\log_e x = \ln x$

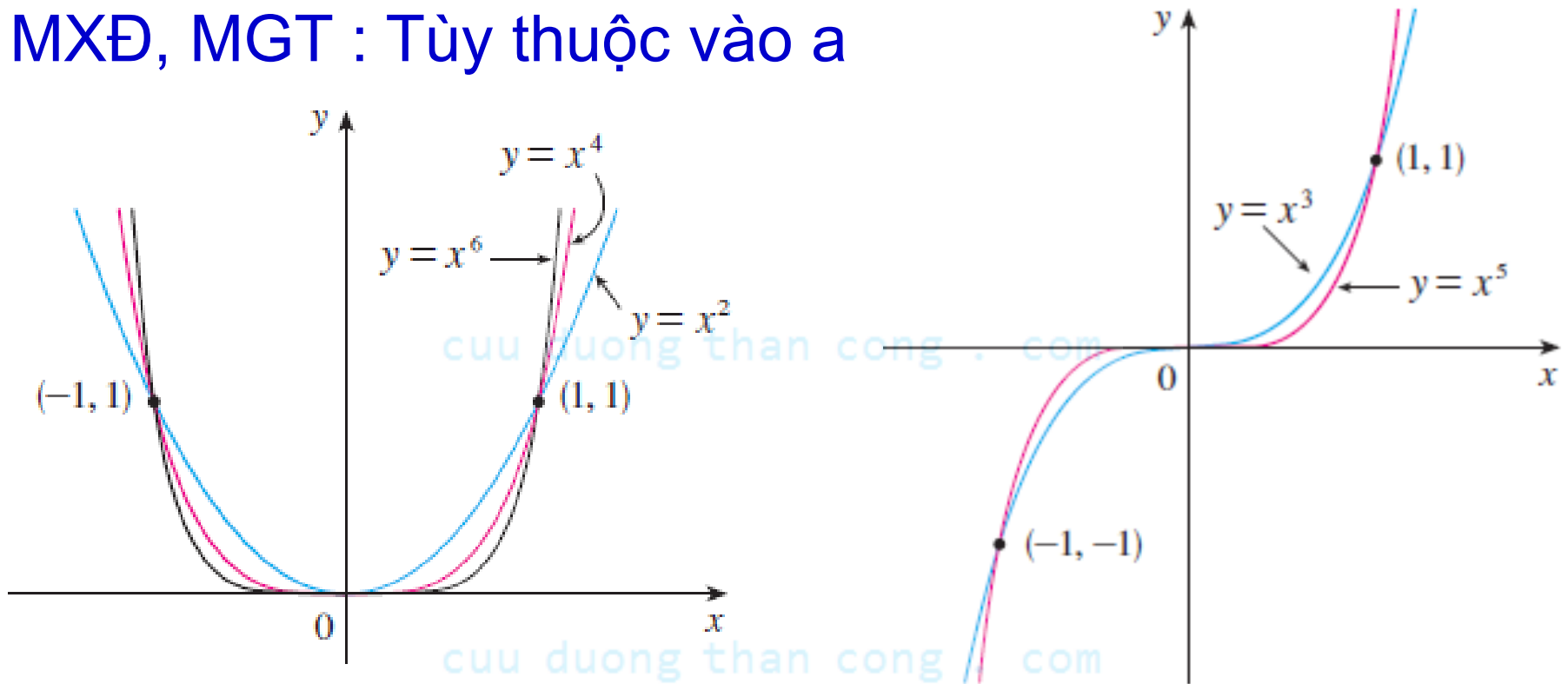
và ta có công thức

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học

Hàm lũy thừa : $y=x^a$

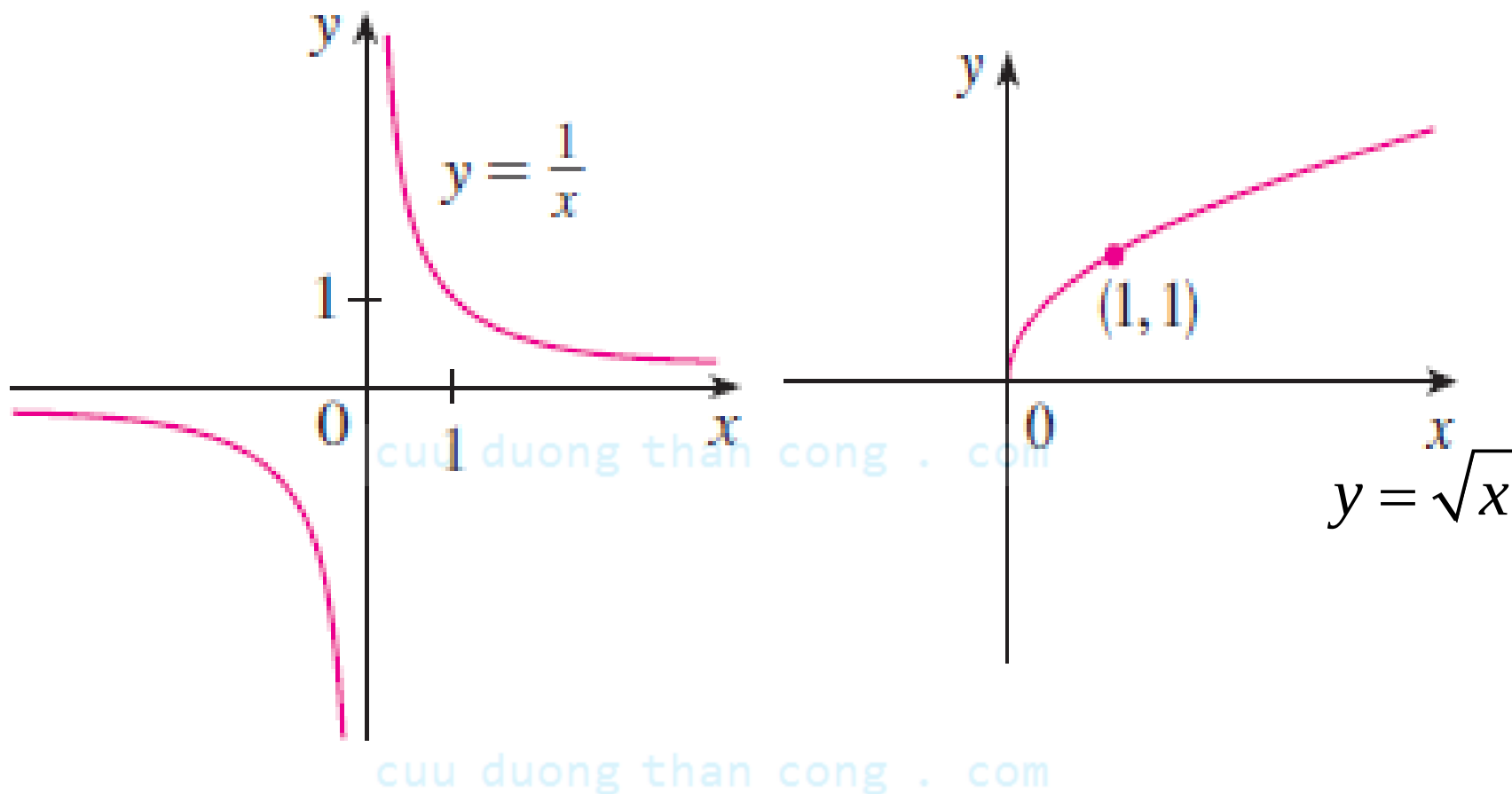
MXĐ, MGT : Tùy thuộc vào a



$a=2, 4, 6$: MXĐ: $(-\infty, +\infty)$,
MGT: $[0, +\infty)$

$a=3, 5$: MXĐ: $(-\infty, +\infty)$,
MGT: $(-\infty, +\infty)$

2.1 Giới hạn và liên tục – Nhắc lại các hàm đã học



$a = -1$: MXĐ: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
MGT: $\mathbb{R}^*$. Ta còn gọi đây là
đường Hyperbol

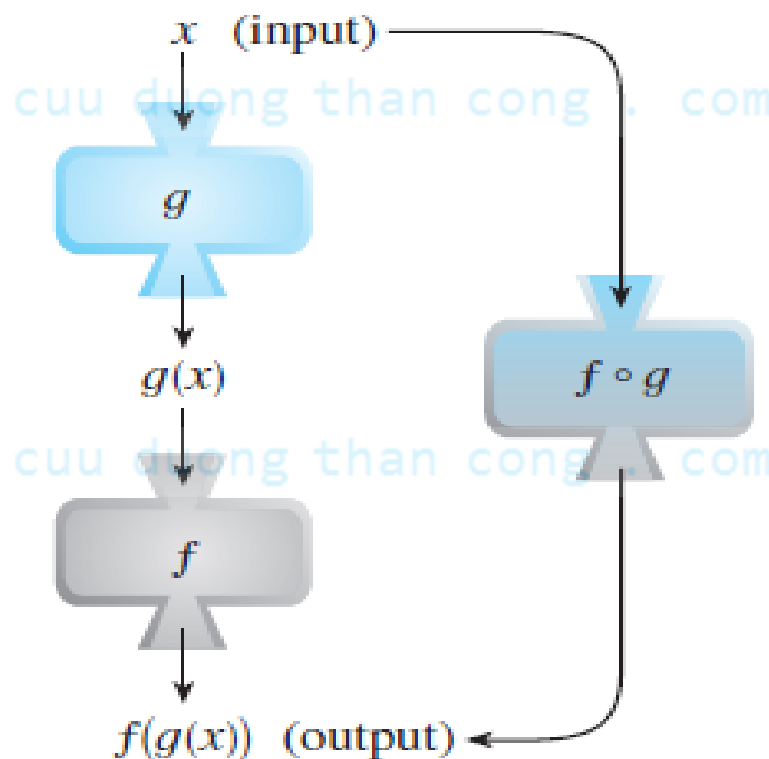
$a = 1/2$: MXĐ $[0, +\infty)$,
MGT $[0, +\infty)$

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Hàm hợp : Cho 2 hàm $g : X \rightarrow Y, f : Y \rightarrow Z$

Ta gọi hàm hợp của 2 hàm trên là $h = f \circ g$

Được xác định như sau : $h : X \rightarrow Z, h(x) = f(g(x))$



2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ : Cho 2 hàm $f(x) = 2x + 1, g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
Tìm $f \circ g, g \circ f$ và tính giá trị của chúng tại $x = 2$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 + 1}) = 2\sqrt{x^2 + 1} + 1$$

$$\Rightarrow f \circ g(2) = 2\sqrt{5} + 1$$

$$g \circ f(x) = g(2x + 1) = \sqrt{(2x + 1)^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 2}$$

$$\Rightarrow g \circ f(2) = \sqrt{26}$$

Lưu ý : Nói chung 2 hàm $f \circ g, g \circ f$ không bằng nhau

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ : Cho 2 hàm $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt[3]{x-1}$
Tìm các hàm và MXĐ của chúng $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = \sqrt[6]{x-1} \quad \text{MXĐ là } [1, +\infty)$$

$$g \circ f(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt[3]{\sqrt{x}-1} \quad \text{MXĐ là } [0, +\infty)$$

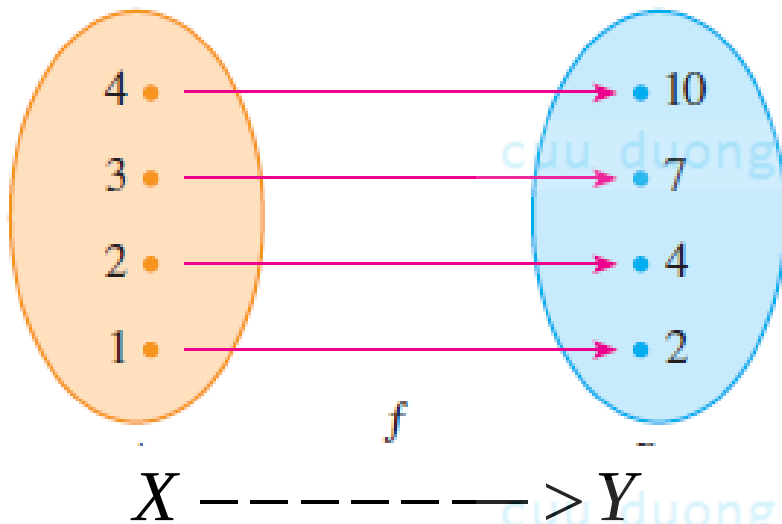
$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x} \quad \text{MXĐ là } [0, +\infty)$$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(\sqrt[3]{x-1}) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x-1}-1} \quad \text{MXĐ là } \mathbb{R}$$

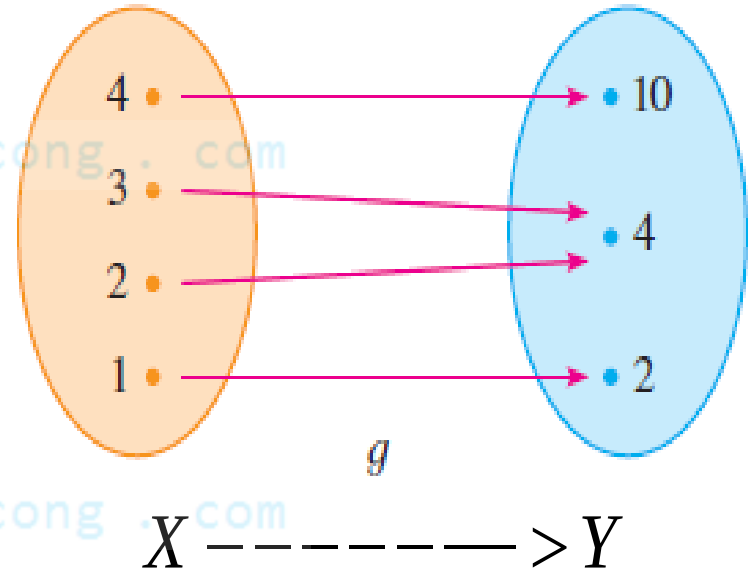
2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Hàm 1-1 : Hàm $f : X \rightarrow Y, f(x) = y$

được gọi là hàm 1-1 nếu $\forall x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$

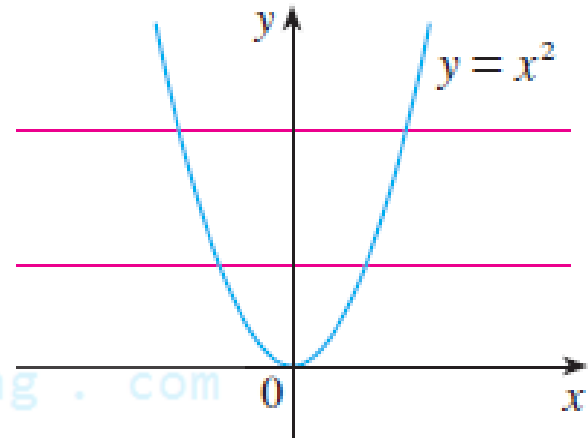
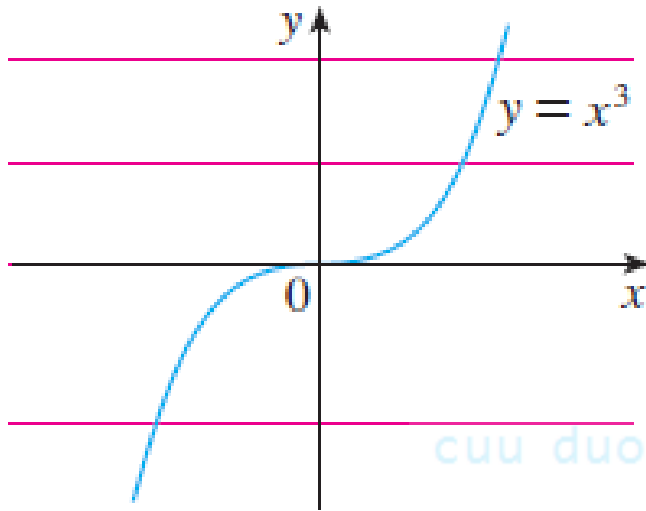


Hàm 1-1



Không là hàm 1-1

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược



Hàm $y=x^3$ là hàm 1-1

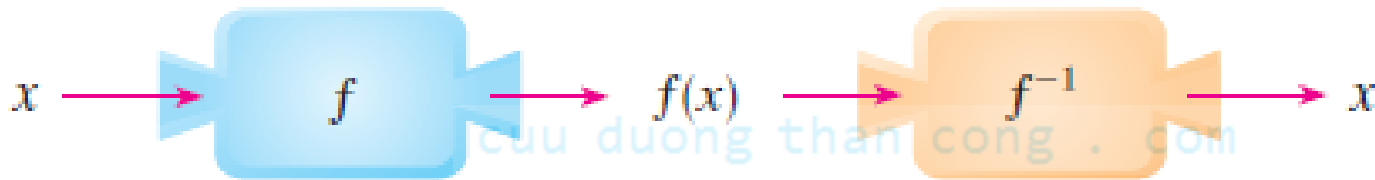
Hàm $y=x^2$ không là hàm 1-1

Hàm 1-1 có đồ thị chỉ cắt mọi đường thẳng $y = C$, với C thuộc MGT của hàm tại duy nhất 1 điểm.

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Hàm ngược : Cho hàm 1-1 $f : X \rightarrow Y, f(x) = y$
hàm ngược của hàm, được kí hiệu là $y = f^{-1}(x)$,
 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ sao cho $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

Như vậy : $f(f^{-1}(y))=y$ và $f^{-1}(f(x))=x$



Ta có: MXĐ của hàm f^{-1} là MGT của hàm f và MGT của hàm f^{-1} là MXĐ của hàm f

2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ: Tìm hàm ngược của hàm $y = x^3 - 1$

Ta sẽ tìm hàm $y = f^{-1}(x)$ bằng cách **tính x theo y**

$$y = x^3 - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+1}$$

Thay x bởi y, y bởi x, ta được hàm ngược

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x$$

MXĐ và MGT của cả 2 hàm f và f^{-1} đều là R

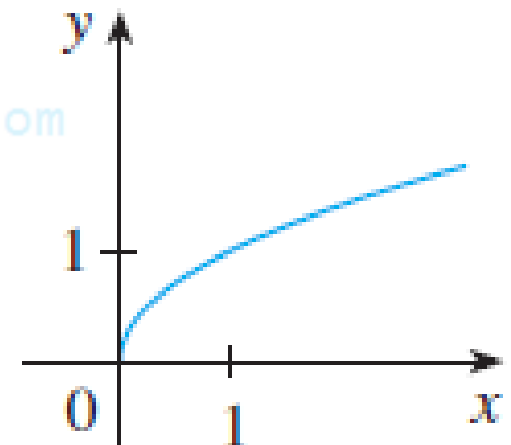
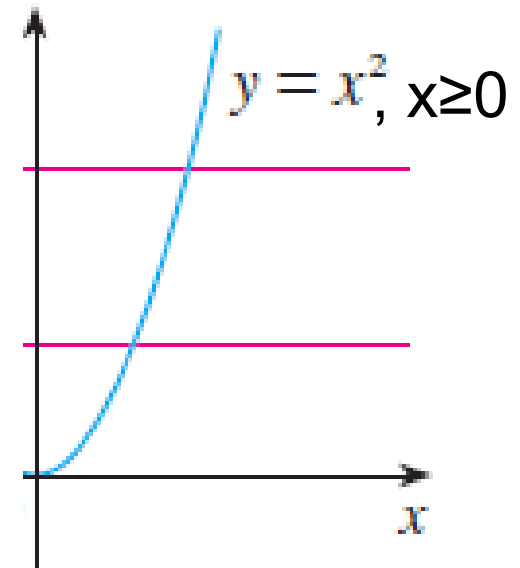
2.1 Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Ví dụ: Hàm $y=x^2$ không làm hàm 1-1 trên $(-\infty, +\infty)$

Tuy vậy, nếu ta giới hạn bớt
MXĐ của hàm là $(0, +\infty)$ thì
ta được hàm 1-1 $\begin{cases} y = x^2, \\ x \geq 0 \end{cases}$

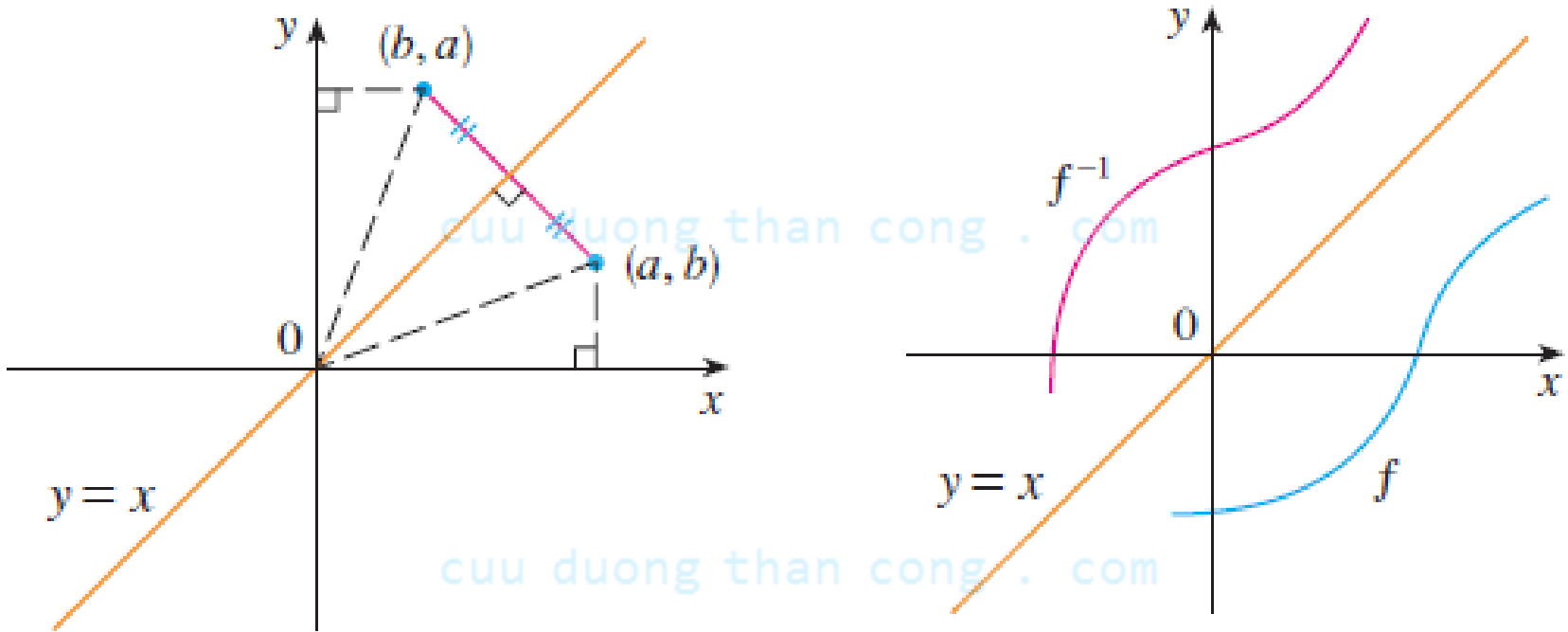
Khi đó, ta vẫn có hàm ngược

$$y = \sqrt{x}, x \geq 0$$



Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Với mọi a thuộc MXĐ của hàm $y = f(x)$, đặt $b = f(a)$ thì $a = f^{-1}(b)$ tức là điểm (a, b) thuộc đồ thị hàm $f(x)$ thì điểm (b, a) thuộc đồ thị hàm $f^{-1}(x)$.



Đồ thị của hàm $y = f(x)$ và hàm $y=f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Giới hạn và liên tục – Hàm hợp và hàm ngược

Điều kiện để tồn tại hàm ngược

Mệnh đề 1: Hàm $f : X \rightarrow Y$ có hàm ngược khi và chỉ khi f là ánh xạ 1-1 từ X vào Y

Mệnh đề 2: Hàm $f : X \rightarrow Y$ có hàm ngược trên khoảng (a,b) nếu f là đơn điệu tăng chặt trên (a,b)

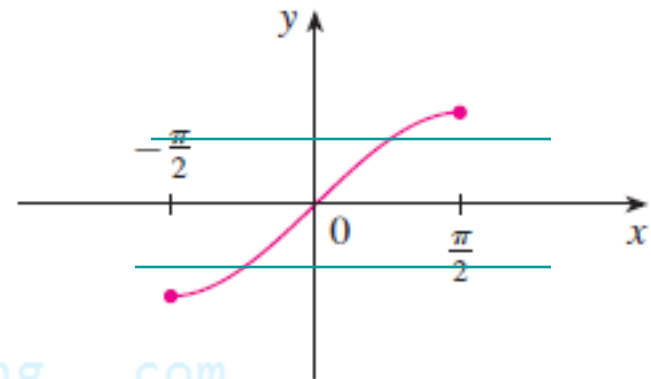
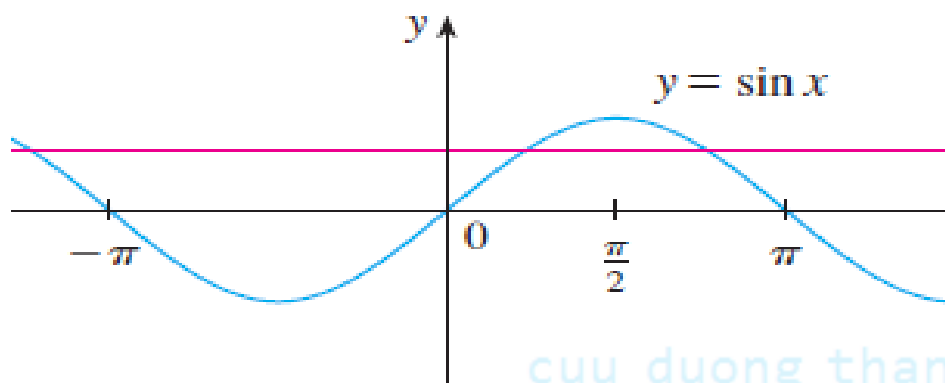
$$(\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

hoặc f là đơn điệu giảm chặt trên (a,b)

$$(\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược & hàm hyperbol

Hàm ngược của hàm $y = \sin x$: hàm $y = \arcsin x$

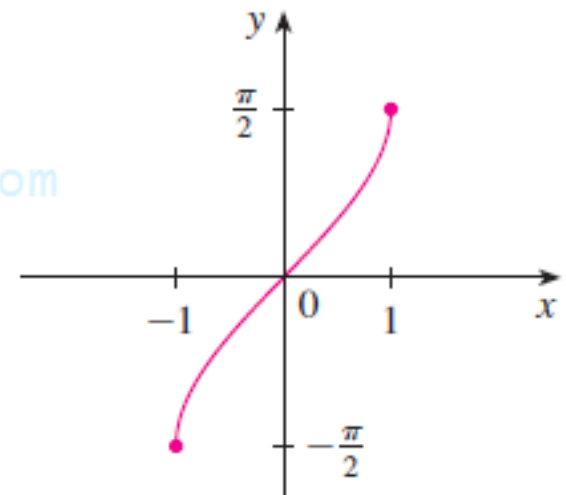


Trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Hàm $y = \sin x$ là hàm 1-1

Tồn tại hàm ngược là hàm $y = \arcsin x$

Hàm $y = \arcsin x$ có MXĐ là $[-1; 1]$

MGT là $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

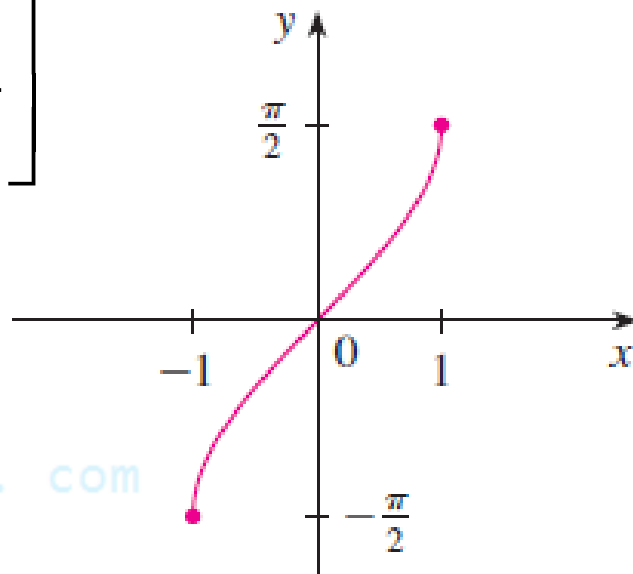


2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1, 1]$$

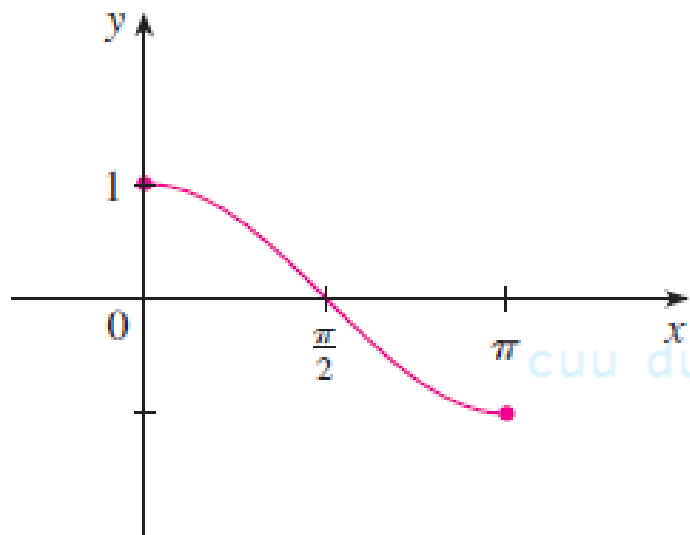


$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

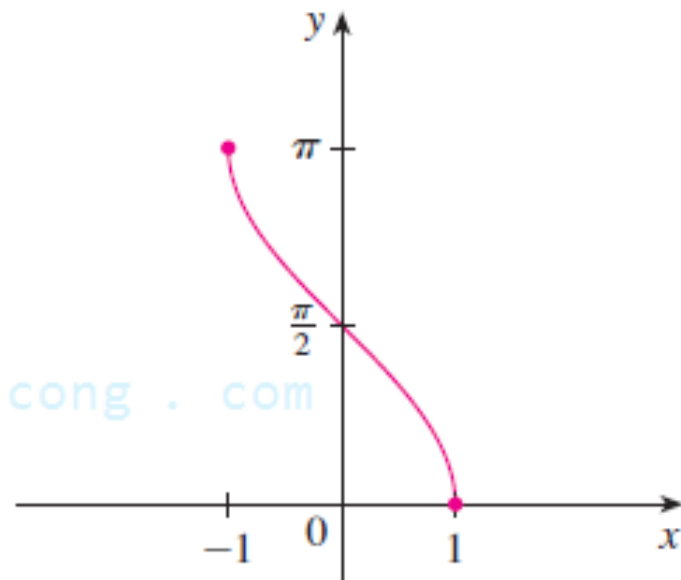
$$\arcsin(0) = 0, \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược

Hàm ngược của hàm $y = \cos x$: hàm $y = \arccos x$



Trên đoạn $[0, \pi]$, hàm $y = \cos x$ là hàm 1-1, tồn tại hàm ngược



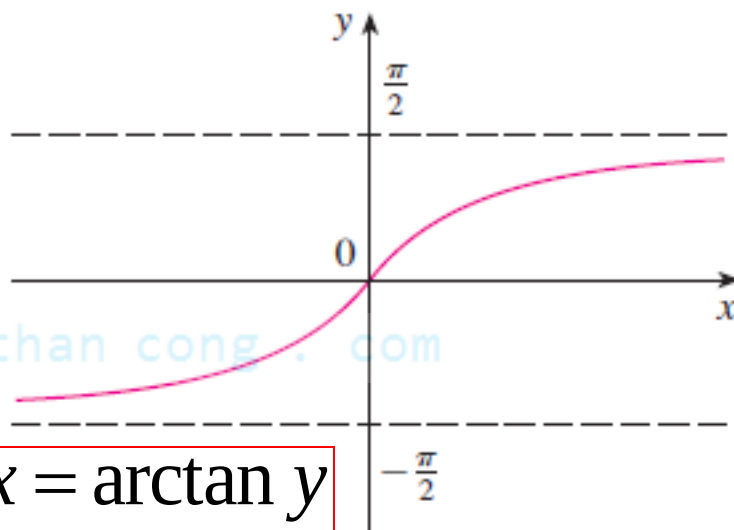
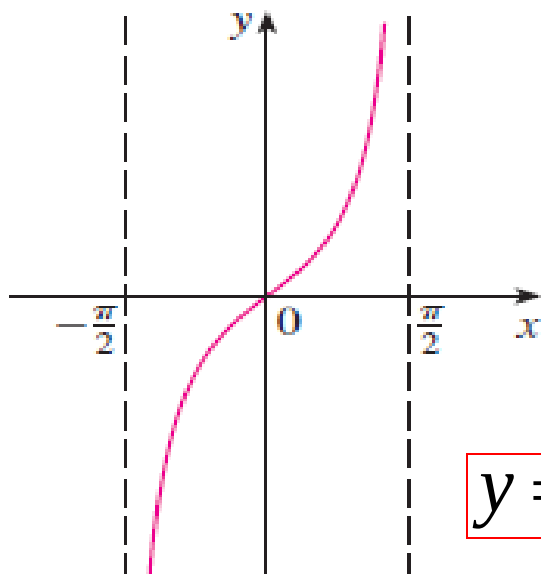
$y = \arccos x$, MXĐ là $[-1, 1]$, MGT là $[0, \pi]$

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược

Hàm ngược của hàm $y = \tan x$: hàm $y = \arctan x$



$$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$$

Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Hàm $y = \arctan x$, MXĐ là $\mathbb{R}$,
MGT là $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Hàm $y = \tan x$ là hàm 1-1

$$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

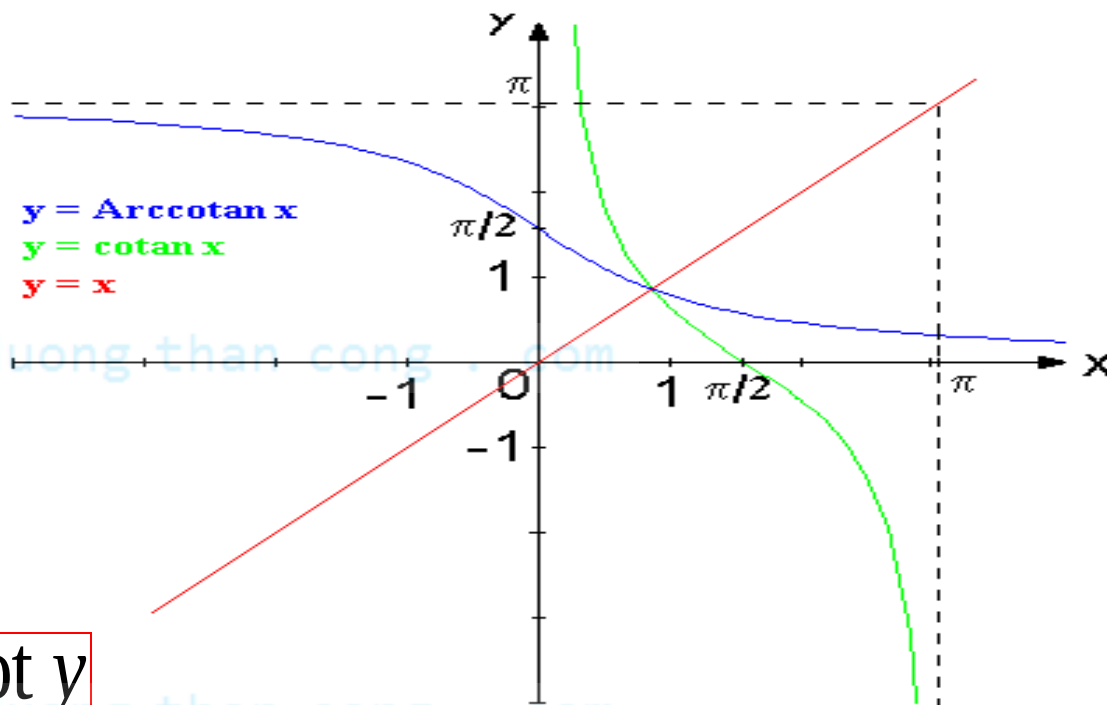
2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm lượng giác ngược

Hàm ngược của hàm $y = \cot x$: hàm $y = \operatorname{arccot} x$

Trên khoảng $(0, \pi)$
hàm là hàm 1-1

Hàm $y = \operatorname{arccot} x$
có MXĐ là $\mathbb{R}$,
MGT là $(0, \pi)$

$$y = \cot x \Leftrightarrow x = \operatorname{arc} \cot y$$



$$\operatorname{arc} \cot(0) = 0, \operatorname{arc} \cot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}, \operatorname{arc} \cot(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm hyperbolic

Định nghĩa (hàm Hyperbolic)

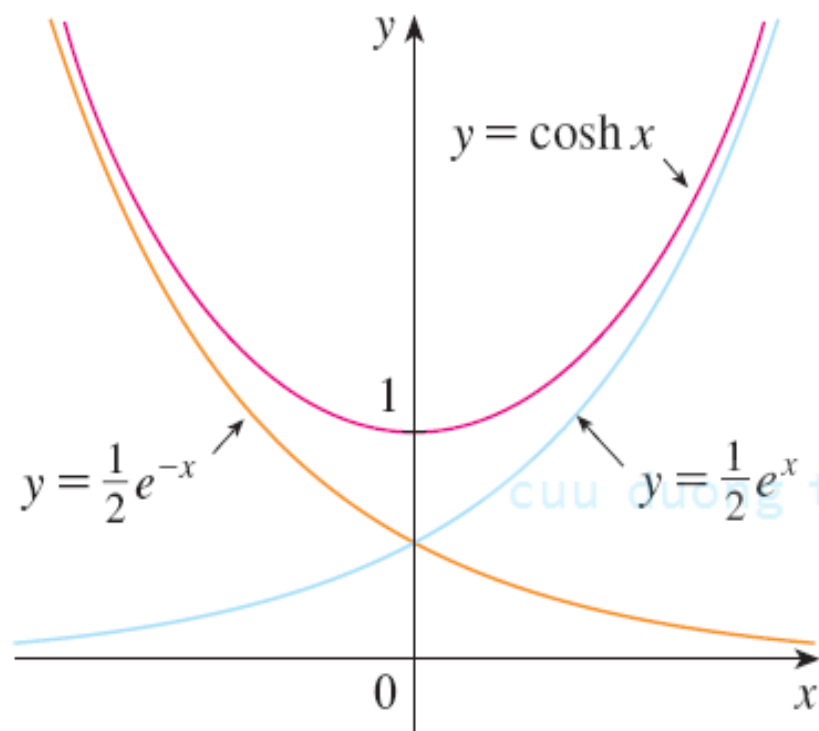
sin hyperbolic $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}x$

cos hyperbolic $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}x$

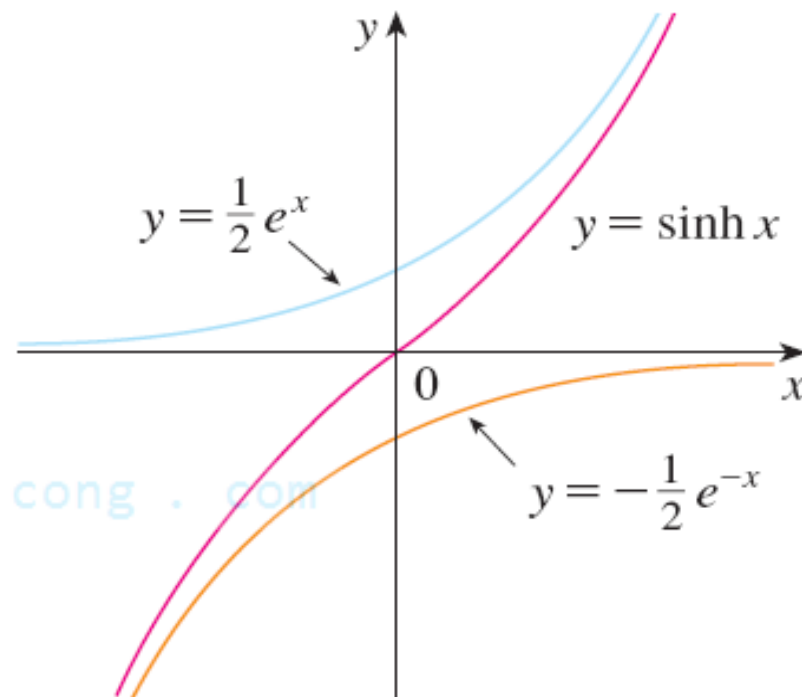
tan hyperbolic $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \text{th}x$

cotan hyperbolic $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \text{cth}x$

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm hyperbolic

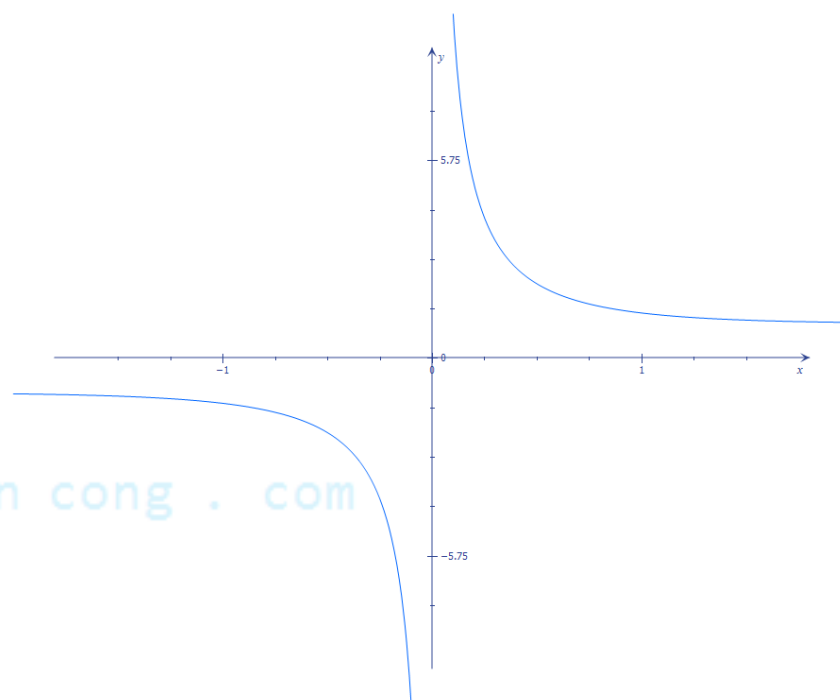
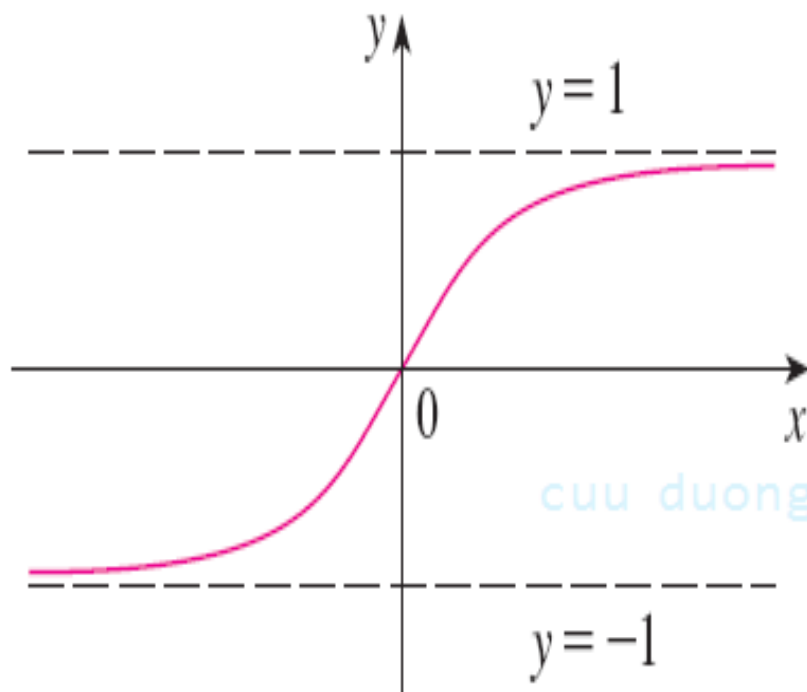


Hàm $y = \cosh x$ (chx)



Hàm $y = \sinh x$ (shx)

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm hyperbolic



Hàm $y = \tanh x$ (thx)

Hàm $y = \coth x$ (ctx)

2.1 Giới hạn & liên tục – Hàm hyperbolic

Có các công thức sau (tương tự công thức lượng giác)

$$1/ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$2/ \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}x, \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

$$3/ \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}y$$

$$4/ \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}y$$

$$5/ \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}y \cdot \operatorname{ch}x$$

$$6/ \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}y \cdot \operatorname{ch}x$$

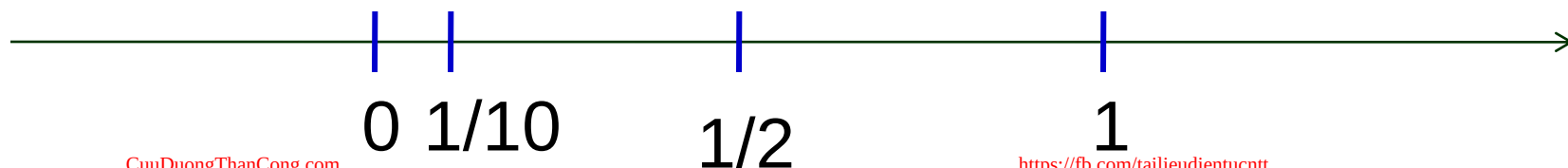
2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Điểm tụ: Cho D là tập số thực. Điểm x_0 được gọi là điểm tụ của tập D nếu trong mọi lân cận $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ của x_0 đều chứa vô số các phần tử của D

Ví dụ. $D = (0,1)$ mọi điểm thuộc $[0,1]$ đều là điểm tụ



$$D = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Có duy nhất 1 điểm tụ là 0}$$



2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$) :

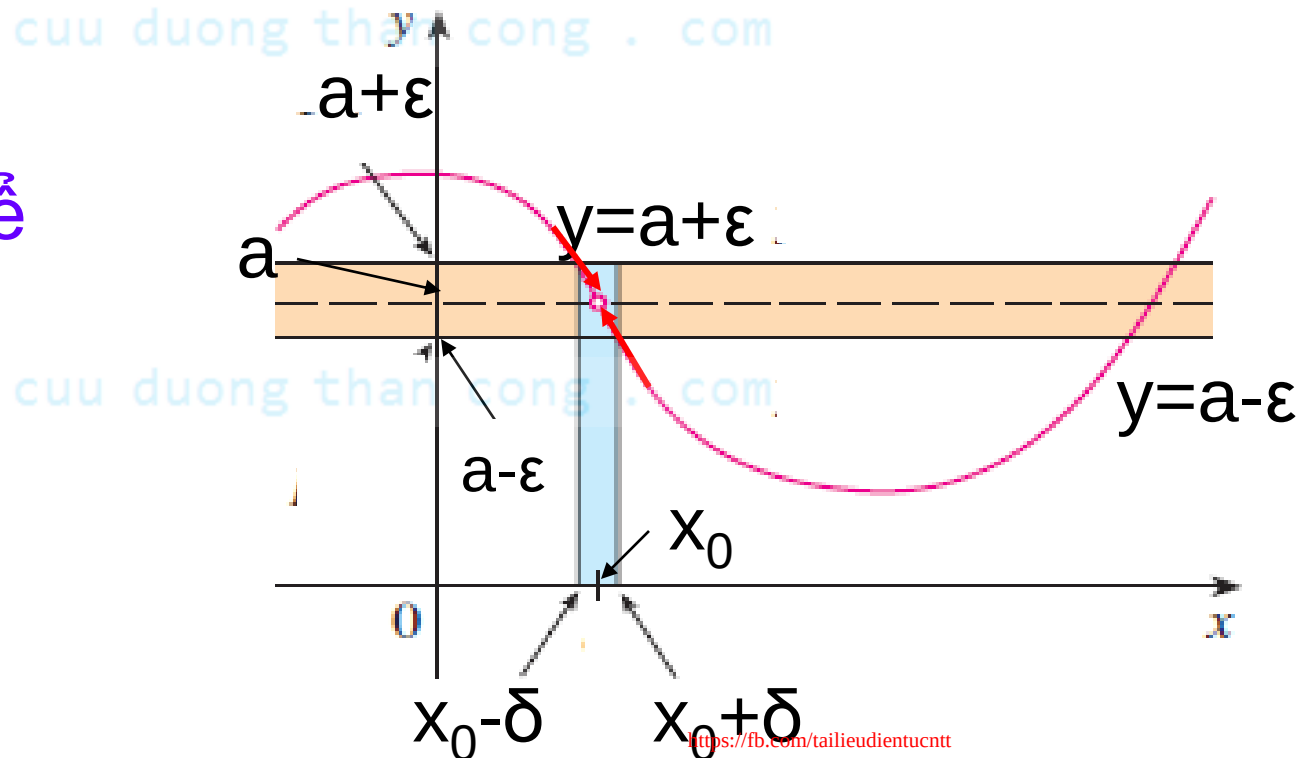
Cho hàm $f(x)$ và x_0 là 1 điểm tụ của MXĐ D_f của hàm

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

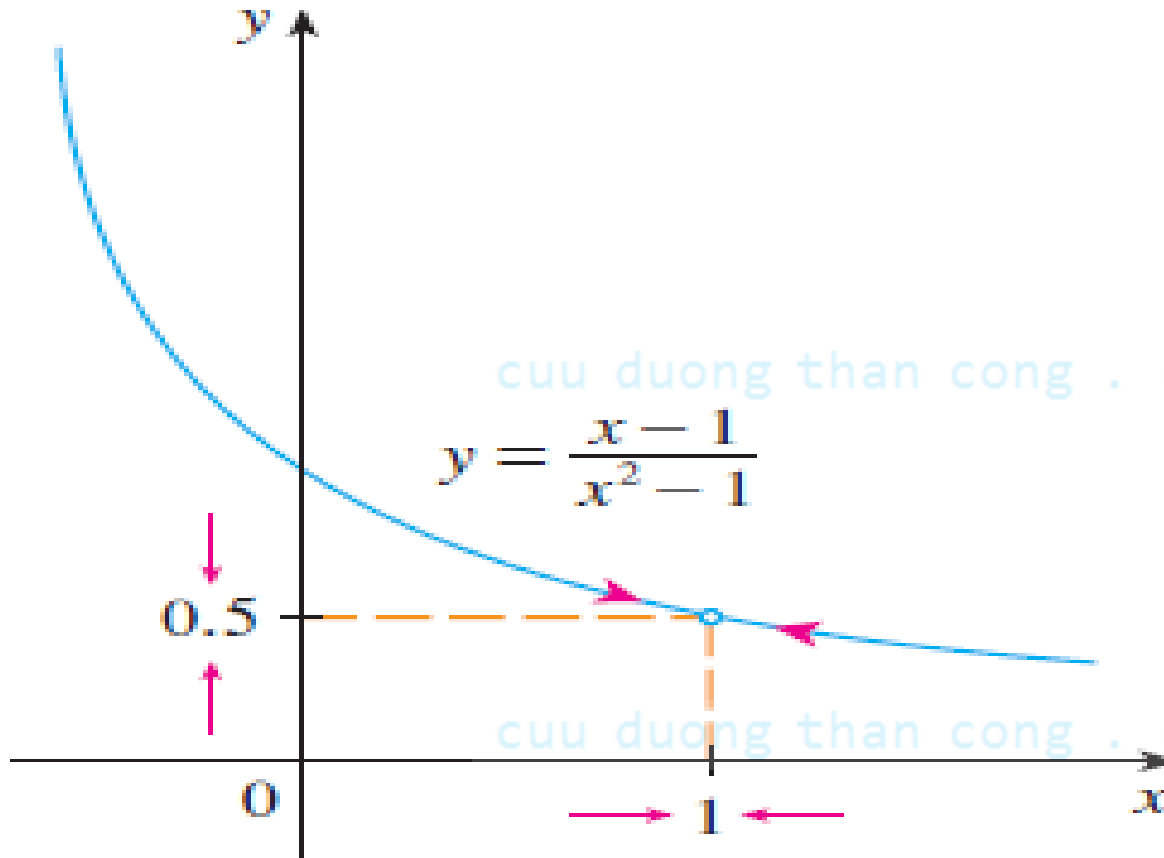
Chú ý:

Hàm $f(x)$ có thể
không xác
định tại x_0



2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$



Hàm không xác định tại $x_0=1$,
giới hạn đã cho có dạng $\frac{0}{0}$

Ta vẽ đường cong để minh họa cho kết quả dễ thấy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn hàm số (ngôn ngữ dãy):

Cho x_0 là điểm tụ của MXĐ D_f của hàm $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D_f, x_n \neq x_0, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$$

$$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Chú ý: Ta thường dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy để chứng minh giới hạn hàm không tồn tại bằng cách chỉ ra 2 dãy $(x_n), (x'_n) \rightarrow x_0$ sao cho 2 dãy tương ứng $f(x_n), f(x'_n)$ có 2 giới hạn khác nhau

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ: Chứng minh rằng giới hạn sau không tồn tại

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$$

Chọn 2 dãy

$$\{x_n\} = \{n\pi\} \Rightarrow f(x_n) = \sin n\pi = 0 \forall n$$

$$\{x_n'\} = \left\{ \frac{(4n+1)\pi}{2} \right\} \Rightarrow f(x_n') = \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1, \forall n$$

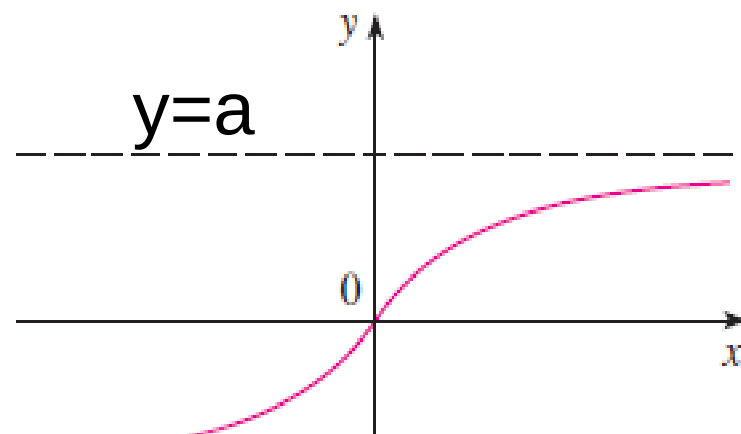
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = 1$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn ở vô cực :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A > 0$$

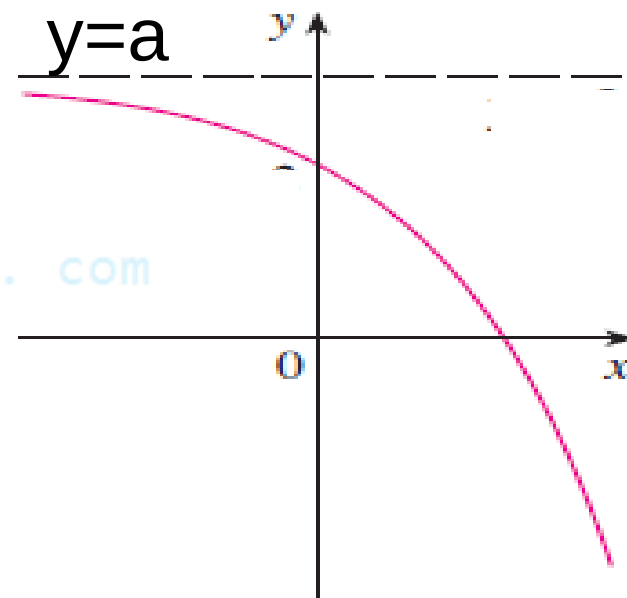
$$\forall x \in D_f, x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$



cuu duong than cong . com

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B < 0$$

$$\forall x \in D_f, x < B \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$



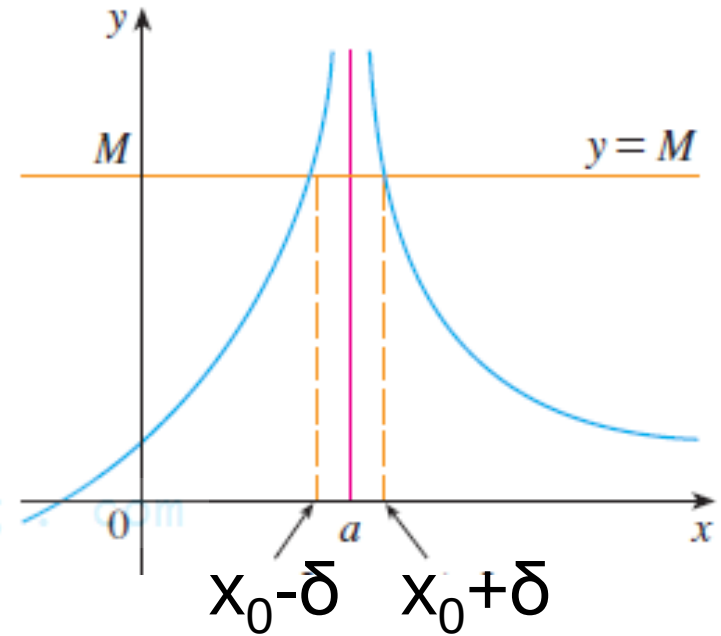
cuu duong than cong . com

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn ra vô cực :

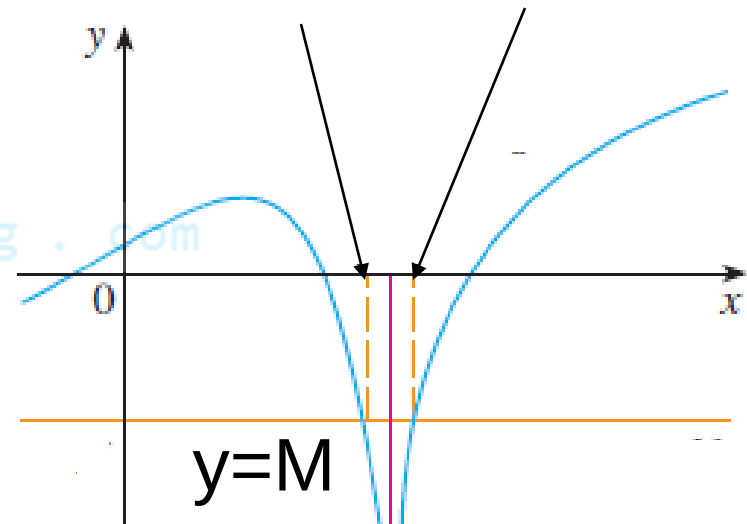
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \exists \delta > 0$$

$$\forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M.$$



2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Tính chất của giới hạn hàm

Cho : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f) = \alpha a, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = a + b$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g) = a \cdot b \qquad 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$5) \left(\forall x \in V_\varepsilon(x_0), f(x) \leq g(x) \right) \Rightarrow a \leq b$$

$$6) \begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} h = a \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \quad (\text{Định lý kẹp})$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Số e :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

cuu duong than cong . com

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

cuu duong than cong . com

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn dạng $u(x)^{v(x)}$:

Giả sử :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a > 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b \end{cases}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (u(x))^{v(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \ln(u(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln(u(x))} \\ &= e^{b \ln a} = a^b. \end{aligned}$$

Vậy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)}$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \rightarrow 0$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{1/x} = e^\alpha$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn cơ bản thường gặp khi $x \rightarrow \infty$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty, \quad \alpha > 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^\alpha = +\infty, \quad \alpha > 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad a > 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x} \right)^x = e^\alpha$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \quad \text{không tồn tại}$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Các dạng vô định:

$$1) \frac{0}{0}$$

$$2) \frac{\infty}{\infty}$$

$$3) 0 \cdot \infty$$

$$4) \infty - \infty$$

$$5) 1^{\infty}$$

$$6) 0^0$$

$$7) \infty^0$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tính các giới hạn sau bằng cách áp dụng các giới hạn cơ bản

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)} \quad (\text{Dạng } \frac{0}{0})$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x} \quad \underline{\underline{t = x - 1}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{e^t - 1} \cdot \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \frac{e^t - 1}{t} = 1 \end{aligned}$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn 1 phía:

Số a gọi là **giới hạn trái** của $y = f(x)$ tại điểm x_0 , nếu
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x_0 - x < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$

ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$

Số a gọi là **giới hạn phải** của $y = f(x)$ tại điểm x_0 , nếu
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \boxed{\forall x \in D_f, 0 < x - x_0 < \delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$

ký hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Giới hạn 1 phía:

Định lý:

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại x_0 khi và chỉ khi nó có giới hạn trái, giới hạn phải tại x_0 và chúng bằng nhau.

Chú ý:

- 1. Ta có thể dùng định lý trên để chứng minh không tồn tại giới hạn hàm (Ngoài cách dùng định nghĩa bằng ngôn ngữ dãy).*
- 2. Giới hạn một phía thường được dùng trong các trường hợp hàm chứa căn bậc chẵn, chứa trị tuyệt đối, hoặc hàm ghép.*

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ: Chứng minh không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3}$ bằng cách tìm giới hạn 1 phía

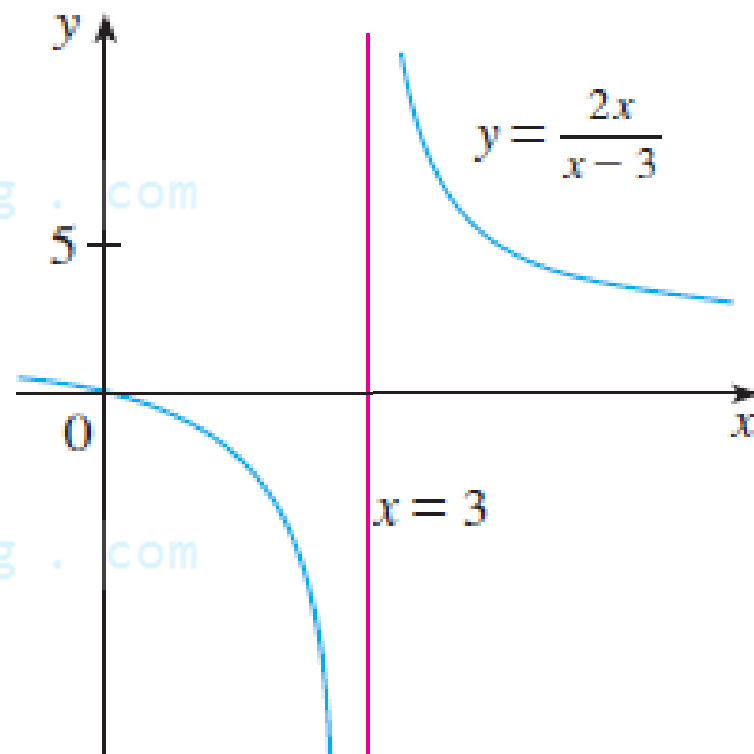
Ta có: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$

vì khi $x \rightarrow 3^-$ thì $x-3 < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty$$

vì khi $x \rightarrow 3^+$ thì $x-3 > 0$

Vậy: $\nexists \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3}$



vì giới hạn trái, phải tồn tại nhưng không bằng nhau

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} 2^{\frac{1}{x-1}}$

Giới hạn phải: $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ Tức là

$$\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \quad \text{Vậy:} \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

Giới hạn trái: $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ Tức là

$$\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \quad \text{Vậy:} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ : Tìm a để hàm $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x > 0 \\ 5x + a, & x \leq 0 \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

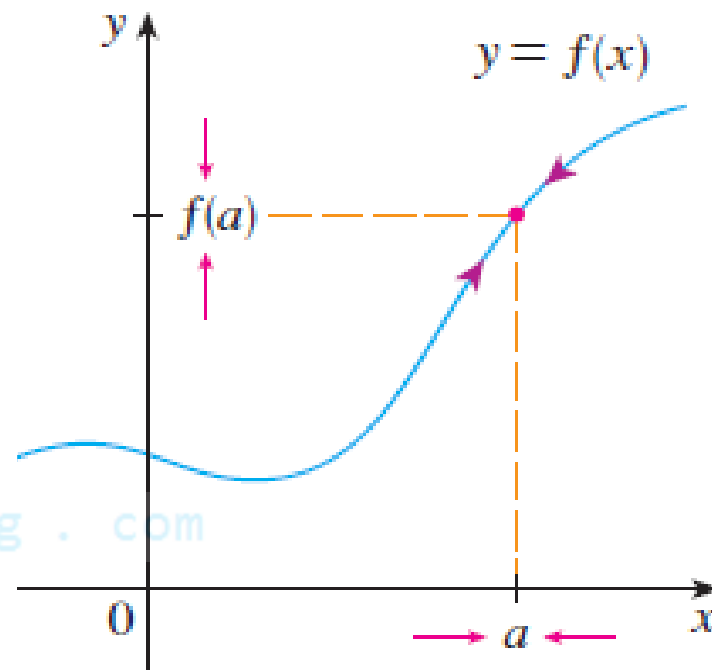
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5x + a) = a$$

Để hàm có giới hạn khi $x \rightarrow 0$ ta phải có 2 giới hạn trên bằng nhau tức là : $a=2$

2.2Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Hàm liên tục: Hàm $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x=a$ thuộc MXĐ của hàm nếu

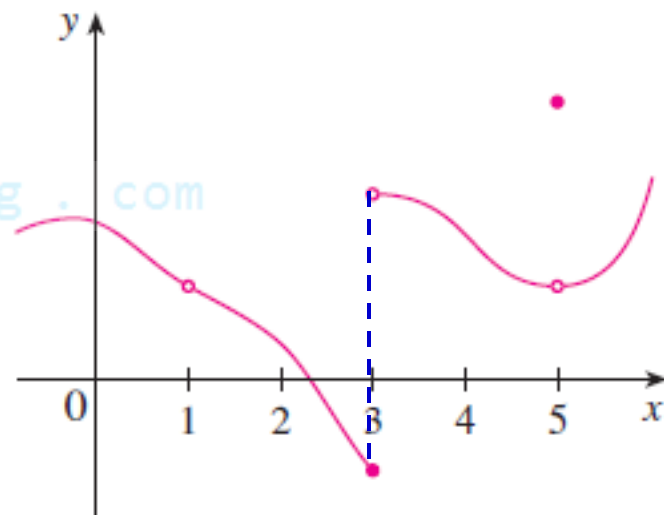
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



cuu duong than cong . com

Hàm gián đoạn tại $x=a$ nếu nó không liên tục tại đó

Đồ thị của hàm $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=3$



2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Các hàm sơ cấp cơ bản là 5 lớp hàm sau

1. Hàm số mũ : $y=a^x$
2. Hàm lũy thừa: $y=x^a$
3. Hàm loga: $y=\log_a x$
4. Các hàm lượng giác: 4 hàm
5. Các hàm lượng giác ngược: 4 hàm

Hàm sơ cấp là các hàm tạo từ các hàm sơ cấp cơ bản với 4 phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) và phép hợp hàm

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

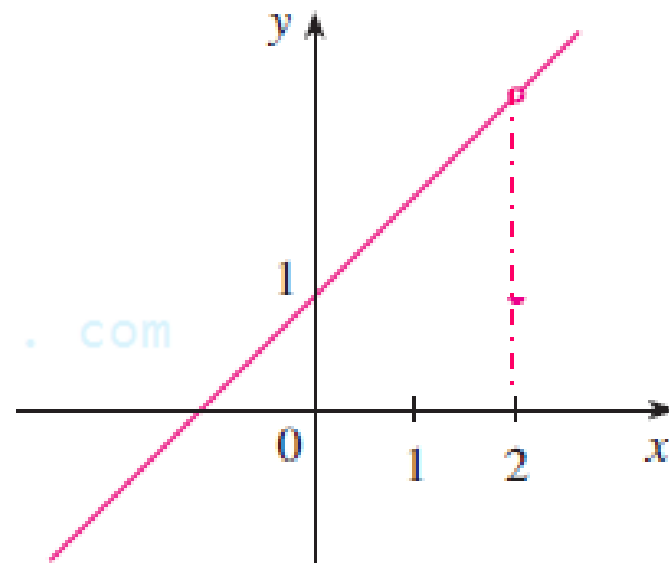
Định lý (về sự liên tục của các hàm sơ cấp):

Các hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm xác định của nó

Ví dụ: Khảo sát sự liên tục của hàm $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Dễ thấy, y là hàm sơ cấp và không xác định tại $x=2$ nên nó không liên tục tại $x=2$.

Điểm $x=2$ gọi là điểm gián đoạn của hàm

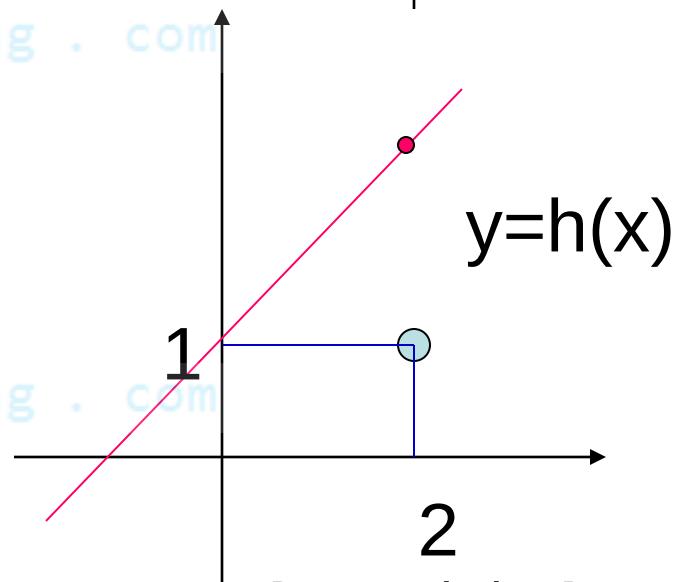
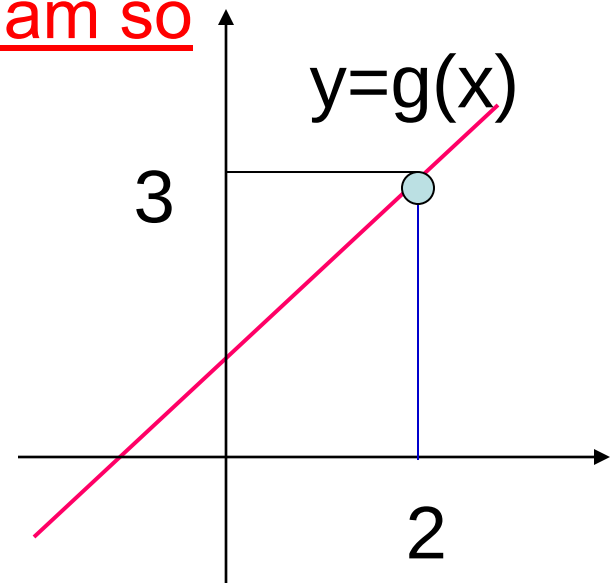


2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$

Đặt:
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$



Thì hàm $g(x)$ là hàm liên tục với mọi x , hàm $h(x)$ là, hàm gián đoạn tại $x=2$

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Liên tục 1 phía: Thay giới hạn trong định nghĩa hàm liên tục bởi 2 giới hạn 1 phía, tương ứng ta có khái niệm liên tục trái, liên tục phải

Định lý: Hàm liên tục tại $x=a$ khi và chỉ khi nó liên tục trái và liên tục phải tại $x=a$

Tính chất hàm liên tục: Tổng, tích, thương và hợp các hàm liên tục lại là các hàm liên tục

2.2 Giới hạn & liên tục – Giới hạn hàm số

Ví dụ: Tìm a để hàm $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-ax^2, & x > 1 \end{cases}$ liên tục với mọi x

Với $x \neq 1$, $f(x)$ là hàm sơ cấp nên nó liên tục.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 = f(1) \quad \text{Hàm liên tục trái tại 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-ax^2) = 3-a$$

Hàm liên tục phải tại 1 khi: $3-a = f(1) = 2 \Leftrightarrow a = 1$

Vậy với $a = 1$, hàm $f(x)$ liên tục với mọi x

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

VCB: Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Ví dụ:

Hàm $\alpha(x) = 2x^3 + x$ là:

+ VCB khi $x \rightarrow 0$ vì $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$

+ không là VCB khi $x \rightarrow 1$ vì $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = 3$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Tính chất của các VCB

- 1) Tổng hữu hạn của các VCB là một VCB.
- 2) Tích của hai VCB là một VCB.
- 3) Tích của một VCB và một hàm bị chặn là một VCB.
- 4) Thương của hai VCB có thể không là một VCB.

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

So sánh các VCB:

Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai vô cùng bé khi $x \rightarrow x_0$

$$\text{Giả sử } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$$

1) Nếu $k = 0$, thì $\alpha(x)$ gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$, kí hiệu là $\alpha(x) = O(\beta(x))$

2) Nếu k hữu hạn, khác không, thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng cấp.

3) Nếu $k = 1$, thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương, kí hiệu là : $\alpha(x) \sim \beta(x)$

4) Nếu $\alpha(x)$ cùng bậc với $(\beta(x))^m$ thì ta nói bậc của $\alpha(x)$ là m so với $\beta(x)$

Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: So sánh các VCB sau

1. Khi $x \rightarrow 0$: $\alpha(x) = \sin^2 x + x^2$, $\beta(x) = \tan 2x$

2. Khi $x \rightarrow 1$: $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = e^{1-x} - 1$

Ta dùng định nghĩa để so sánh, tức là ta sẽ tính giới hạn của tỉ số 2 VCB cần so sánh

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x^2}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x^2}{2x^2} \frac{2x^2}{\tan 2x} = 0$$

Vậy $\alpha(x) = O(\beta(x))$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (x-1))}{x-1} \frac{x-1}{e^{1-x} - 1} = -1$$

$\alpha(x), \beta(x)$ là 2 VCB cùng bậc

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Các VCB tương đương thường gặp khi $x \rightarrow 0$

$$1) \sin x \sim x$$

$$6) \arcsin x \sim x$$

$$2) e^x - 1 \sim x$$

$$7) \arctan x \sim x$$

$$3) 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$8) \tan x \sim x$$

$$4) \ln(1+x) \sim x$$

$$9) \sinh x \sim x$$

$$5) (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$10) \cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Qui tắc thay VCB tương đương với tích, thương

Cho các VCB tương đương $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$

Ta được:

$$f_1(x).g_1(x) \sim f_2(x).g_2(x)$$

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Qui tắc thay VCB tương đương với tổng nhiều VCB

Giả sử $a \neq 0$, $b \neq 0$, α, β là các hằng số thực sao cho

$f_1(x) \sim ax^\alpha$, $f_2(x) \sim bx^\beta$ với $x \rightarrow 0$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ là VCB

$$f_1(x) + f_2(x) \sim \begin{cases} 1. ax^\alpha, \text{ khi } \alpha \neq \beta (\alpha > \beta) \\ 2. (a+b)x^\alpha, \text{ khi } \alpha = \beta \text{ \& } a+b \neq 0 \\ 3. \text{ không thay được, khi } \alpha = \beta \text{ \& } a+b=0 \end{cases}$$

Chú ý: Trường hợp duy nhất **KHÔNG ĐƯỢC THAY** VCB tương đương là **HIỆU 2 VCB CÙNG TƯƠNG ĐƯƠNG VỚI VCB THỨ BA**

Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: So sánh các VCB sau khi $x \rightarrow 0$:

$$1. \alpha(x) = x, \beta(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$2. \alpha(x) = 2^{x^2} - \cos x, \beta(x) = \sin x^{\frac{3}{2}} - \arcsin x^2$$

cuu duong than cong . com

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

cuu duong than cong . com

Giới hạn không tồn tại tức là **2 VCB này không so sánh được**

Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

2. Ta sẽ so sánh bằng cách tính bậc của 2 VCB đó

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= 2^{x^2} - \cos x = (e^{x^2 \ln 2} - 1) - (\cos x - 1) \sim x^2 \ln 2 + \frac{1}{2} x^2 \\ &= x^2 (\ln 2 + \frac{1}{2})\end{aligned}$$

Như vậy, **bậc của $\alpha(x)$ là 2 so với x**

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \sin x^{3/2} - \arcsin x^2 \sim x^{3/2} - x^2 \\ &\sim x^{3/2}\end{aligned}$$

Bậc của $\beta(x)$ là 3/2 so với x

Vậy $\boxed{\alpha(x) = O(\beta(x))}$

Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tìm a, b để $\alpha(x)$ tương đương với ax^b khi $x \rightarrow 0$

1. $\alpha(x) = \sin(\sqrt{1-x} - 1)$

2. $\alpha(x) = \tan x^2 + 2x$

Ta đi tính bậc của các VCB

$$1. \alpha(x) = \sin(\sqrt{1-x} - 1) \sim (\sqrt{1-x} - 1) = \frac{-x}{\sqrt{1-x} + 1} \sim \frac{-1}{2} x^1$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 1$$

cuu duong than cong . com

$$2. \alpha(x) \sim x^2 + 2x \sim 2x^1$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 1$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tính giới hạn $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x^2 + \ln(1+x)}$

1. Ta thay VCB tương đương như sau, **khi $x \rightarrow 0$**

$$1 - \cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2 = 2x^2$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

(VCB tương đương cơ bản)

$$\Rightarrow 3x^2 + \ln(1+x) \sim 3x^2 + x \sim x$$

(**Tổng các VCB không cùng bậc tương đương với VCB có bậc thấp nhất**)

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x} = 0$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tính giới hạn $L_2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin 2(x-1)}{e^{x-1} - \cos \sqrt{x-1}}$

Lưu ý: Vì trong hàm dưới dấu *lim* có $\cos \sqrt{x-1}$ tức là $x \geq 1$ nên ta chỉ tính giới hạn phải

Khi $x \rightarrow 1^+$ thì $(x-1)$ là VCB nên :

$$\sin(2(x-1)) \sim (2(x-1))$$

$$\begin{aligned} e^{x-1} - \cos \sqrt{x-1} &= (e^{x-1} - 1) + (1 - \cos \sqrt{x-1}) \sim (x-1) + \frac{1}{2}(\sqrt{x-1})^2 \\ &= \frac{3}{2}(x-1) \end{aligned}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{\frac{3}{2}(x-1)} = \frac{4}{3}$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tính $L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\tan 3x}$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin x}}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{\tan 3x}$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x}{3x} = \frac{1}{3}$$

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tính

$$L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{3x}$$

$$L_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{3x}$$

Đến đây, **không thể thay VCB tương đương** như trên được vì:

$$\begin{cases} e^x - 1 \sim x \\ e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x \end{cases}$$

Tử số là HIỆU CỦA 2 VCB
CÙNG TƯƠNG ĐƯƠNG
VỚI VCB THỨ 3

Ta sẽ có cách làm khác: hoặc dùng quy tắc L'Hospital hoặc dùng CT Taylor - Maclaurint

2.3 Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

VCL: Hàm số $A(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \rightarrow x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = \infty$.

Ví dụ:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + \sin x) = \infty$ Nên $A(x) = 2x^2 + \sin x$ là VCL khi $x \rightarrow \infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ $\Rightarrow A(x) = \frac{1}{x}$ là VCL khi $x \rightarrow 0$

Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

So sánh các VCL:

Cho $A(x)$ và $B(x)$ là hai vô cùng lớn khi $x \rightarrow x_0$.

Giả sử
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = k.$$

- 1) Nếu $k = \infty$, thì $A(x)$ gọi là VCL bậc cao hơn $B(x)$,
- 2) Nếu k hữu hạn, khác không, thì $A(x)$ và $B(x)$ là hai VCL cùng cấp.
- 3) Nếu $k=1$, thì $A(x)$ và $B(x)$ là hai VCL tương đương
- 4) Nếu $A(x)$ cùng bậc với $(B(x))^m$ thì bậc của $A(x)$ là m so với $B(x)$

Quy tắc ngắt bỏ VCL

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}{\text{Tổng hữu hạn các VCL}}$$

cuu duong than cong . com

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{VCL bậc cao nhất của tử}}{\text{VCL bậc cao nhất của mẫu}}$$

cuu duong than cong . com

Giới hạn & liên tục – VCL và VCB

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^{10} - 2x^5 + 2 - 2x^3 + x^4}}{\sqrt{x^5 + 2x^3 - x + x^2 + 3x^3 - 2x^4}}$

Khi $x \rightarrow \infty$ thì cả trên tử số và dưới mẫu số đều là tổng của các vô cùng lớn không cùng bậc

cuu duong than cong . com

Bậc lớn nhất ở tử số và cả mẫu số đều là 4

Vậy: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^{10} - 2x^5 + 2 - 2x^3 + x^4}}{\sqrt{x^5 + 2x^3 - x + x^2 + 3x^3 - 2x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{-2x^4} = -\frac{1}{2}$

Giới hạn & liên tục – Phụ lục

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left[\left(1 + \frac{x}{32} \right)^{1/5} - 1 \right]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{5} \frac{x}{32}}{x} = \frac{1}{80} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 3x - 1) - (\cos 7x - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}9x^2 + \frac{1}{2}49x^2}{x^2} = 20 \end{aligned}$$

Giới hạn & liên tục – Phụ lục

$$\begin{aligned} L_3 &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \cot 2x \cdot \cot(\pi/4 - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \tan(\pi/2 - 2x) \frac{1}{\tan(\pi/4 - x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\pi/2 - 2x}{\pi/4 - x} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan^2 x)^{1/\sin^2(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \tan^2 x)^{1/\tan^2 x} \right]^{\frac{\tan^2 x}{\sin^2(2x)}} = \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(2x)^2} = \frac{1}{4\sqrt[4]{e}} \end{aligned}$$