CHƯƠNG V : PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

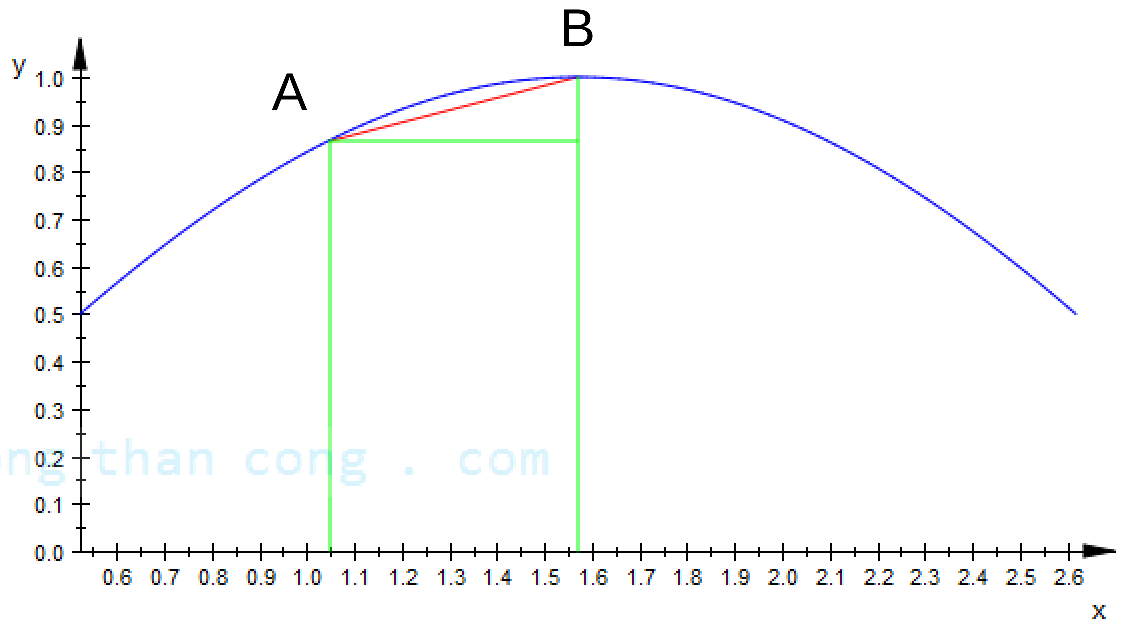
I. Phương trình vi phân cấp 1

II. Phương trình vi phân cấp cao

III. Hệ phương trình vi phân

Phương trình vi phân cấp 1 – Khái niệm chung

Bài toán 1: Tìm tất cả các đường cong y=f(x) sao cho trên mỗi đoạn [1,x], diện tích hình thang cong bị chắn bởi cung đường cong bằng tỉ số giữa hoành độ x và tung độ y. Nhìn hình vẽ, ta có



$$\int_1^x f(t)dt = \frac{x}{y} \Leftrightarrow f(x) = \frac{y - xy'}{y^2} \Leftrightarrow y^3 = y - xy'$$

Ta gọi đây là phương trình vi phân cấp 1(phương trình chứa đạo hàm cấp 1 là y')

Phương trình vi phân cấp 1– Khái niệm chung

Bài toán 2: Một vật khối lượng m rơi tự do với lực cản của không khí tỉ lệ với vận tốc rơi. Tìm mối liên hệ giữa thời gian rơi t & quãng đường đi được của vật s(t)

Gọi v(t) là vận tốc rơi của vật thì $v(t) = \frac{ds}{dt} (1)$

Theo định luật 2 Newton, ta có $ma = F (2)$

Trong đó $a = \frac{dv}{dt}, F = F_1 + F_2,\ F_1 = mg$ là trọng lực

$F_2 = -\alpha v$ là lực cản của không khí, α>0 là hệ số cản

Thay a, F, F1, F2 vào phương trình (2) ta được

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v \xleftrightarrow{(1)} m\frac{d^2 s}{dt^2} = mg - \alpha\frac{ds}{dt}$$

Ta gọi đây là ptvp cấp 2 (chứa đạo hàm cấp 2 là s”)

Phương trình vi phân cấp 1– Khái niệm chung

Định nghĩa 1: Phương trình vi phân là phương trình chứa đạo hàm hoặc vi phân của 1 hoặc vài hàm cần tìm

Định nghĩa 2: Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình

Ví dụ:

Ptvp cấp 1: $y' - 2xy = x^2$

$$(x^2 - xy)dx + (e^x + 3y)dy = 0$$

Ptvp cấp 2 : $y''y + y'x - 3xy = 1$

Ptvp cấp 3 : $y''' + 3y'' + 3y' + y = \ln x$

Phương trình vi phân cấp 1– Khái niệm chung

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp n là $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ hoặc giải ra với $y^{(n)}$ là $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$

Định nghĩa 3: Nghiệm của phương trình vi phân trên khoảng (a,b) là một hàm số y=y(x) sao cho khi thay vào phương trình ta được một đồng nhất thức trên (a,b) (đẳng thức luôn đúng với mọi x trên (a,b))

Ví dụ: Nghiệm của ptvp $y''-3y'+2y=0$ là hàm số $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

Đồ thị của hàm số y=y(x) được gọi là đường cong tích phân của ptvp

Phương trình vi phân cấp 1– Khái niệm chung

Dạng tổng quát của ptvp cấp 1:

$F(x, y, y') = 0 \, (1)$ hoặc: $y' = f(x, y) \, (2)$

Bài toán Cauchy: là bài toán tìm nghiệm của ptvp (1) hoặc (2) thỏa điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$

Hay nói cách khác là tìm 1 đường cong tích phân của ptvp (1) hoặc (2) đi qua điểm (x_0, y_0)

Ví dụ: Tìm nghiệm của ptvp $2xdx = 3y^2dy$ thỏa điều kiện $y(1)=1$

$$2xdx = 3y^2dy \Leftrightarrow d(x^2) = d(y^3) \quad \Leftrightarrow x^2 + C = y^3$$

Với $x=1$, $y=1$ ta thay vào đẳng thức trên và được $C=0$

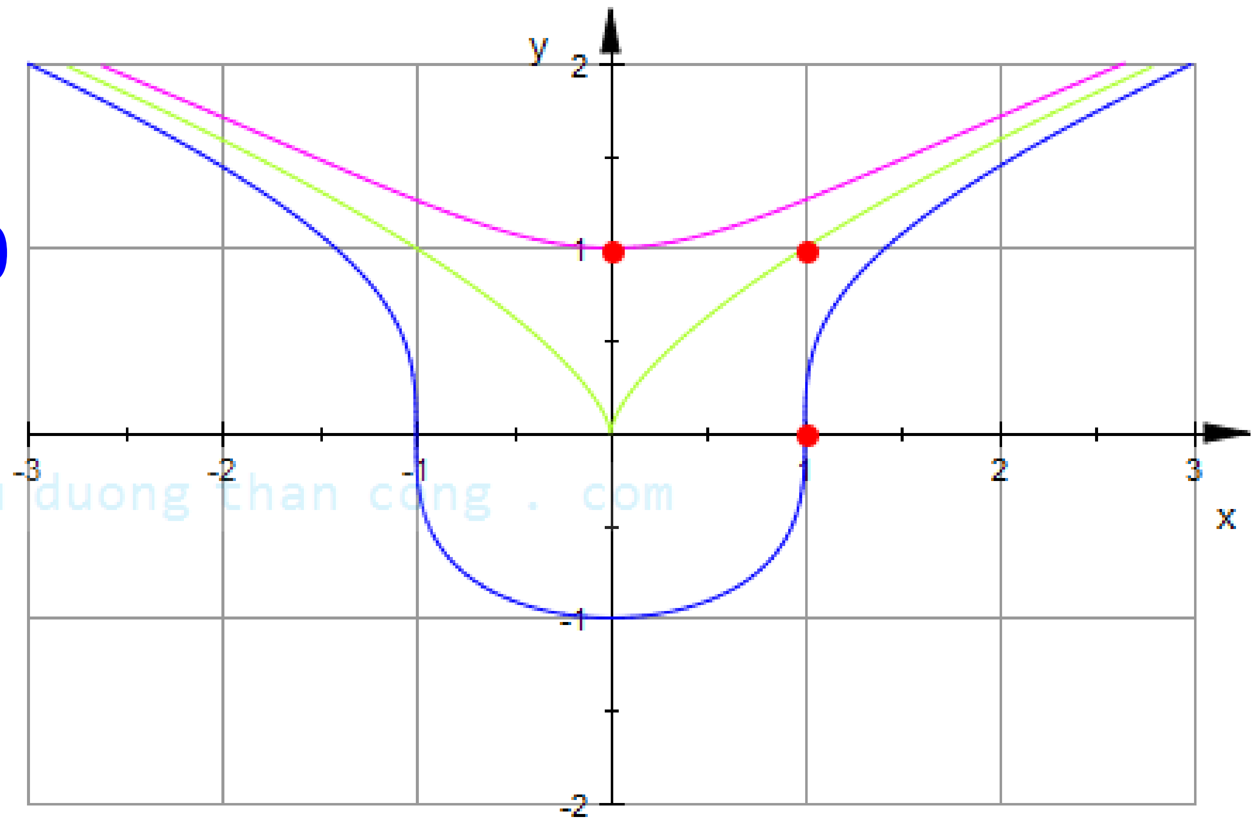
Vậy nghiệm của bài toán là $y = \sqrt[3]{x^2}$

Phương trình vi phân cấp 1 – Khái niệm chung

$x^2 = y^3, y(1) = 1$

$x^2 - 1 = y^3, y(1) = 0$

$x^2 + 1 = y^3, y(0) = 1$



Đường cong tích phân của ptvt trên với 3 trường hợp

Trong phạm vi môn học, bài toán Cauchy luôn có nghiệm xác định trong 1 lân cận $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

Phương trình vi phân cấp 1 – Khái niệm chung

Nghiệm tổng quát: Hàm y=y(x,C) được gọi là nghiệm tổng quát của ptvp cấp 1 trong miền $D \in R^2$ nếu $\forall (x_0, y_0) \in D : \exists! C_0, y = y(x, C_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy với điều kiện đầu $y(x_0) = y_0$. Nghĩa là:

$$\exists! C_0 : \begin{cases} y = y(x, C_0), \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ y_0 = y(x_0, C_0) \end{cases}$$

Nghiệm bất kỳ nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho hằng số C một giá trị cụ thể được gọi là nghiệm riêng tức là *mọi nghiệm của bài toán Cauchy đều là nghiệm riêng*

Phương trình vi phân cấp 1 – Khái niệm chung

Lưu ý 1: Không phải nghiệm nào của 1 ptvp cũng nhận được từ nghiệm tổng quát (NTQ) bằng cách cho hằng số C những giá trị cụ thể. Những nghiệm như vậy được gọi là *nghiệm kì dị*

Ví dụ: Xét ptvp $y' = \sqrt{1-y^2}$ Ta biến đổi pt

$$y' = \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \\ y \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin y = x + C \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sin(x+C) \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

Rõ ràng, *y=1* hay y=-1 đều là nghiệm của ptvp trên. Đó *là các nghiệm kì dị*

Phương trình vi phân cấp 1 – Khái niệm chung

Lưu ý 2: Trong phạm vi môn học này, ta chỉ tìm nghiệm của các ptvp một cách không đầy đủ, tức là ta sẽ biến đổi các phương trình không chặt như ví dụ trên. *Ta chỉ giải phương trình hệ quả chứ không giải phương trình tương đương*.

Ví dụ: Khi biến đổi ptvp $y' = y$

Ta không xét trường hợp y=0 hay y≠0

$$y' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = x + C$$

$$\Rightarrow y = e^{x+C} \Rightarrow y = Ce^{x}$$

Ta giải thiếu nghiệm y=0 của pt vì ta không gpt tương đương, tức là tìm nghiệm không đầy đủ

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Dạng : $f(x)dx + g(y)dy = 0$

Cách giải : Lấy tích phân 2 vế phương trình

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $(3x^2 + 1)dx + \cos y dy = 0$

Lấy tích phân 2 vế phương trình

$$\int (3x^2 + 1)dx + \int \cos y dy = C$$

$$\Rightarrow x^3 + x + \sin y = C$$

$$\Rightarrow y = \arcsin(C - x^3 - x)$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Hai dạng ptvp có thể đưa về pt tách biến:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

$$y' = f(ax + by + c)$$

Đặt : *z(x)=ax+by+c* $\Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $xy^2dy = -(y+1)dx$

$$xy^2dy = -(y+1)dx \Rightarrow \frac{y^2}{y+1}dy + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{y^2}{y+1}dy + \int \frac{dx}{x} = C$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} - y + \ln|y+1| + \ln|x| = C$$

Trường hợp này, việc biến đổi để được y=y(x,C) rất khó nên ta sẽ để nguyên dạng trên (dạng pt φ(x,y,C)=0. Ta gọi đây là tích phân tổng quát của ptvp

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Ví dụ: Tìm nghiệm riêng của pt

$$y' = x^2 + 2xy + y^2 - 1, y(0) = 1$$

$$y' = x^2 + 2xy + y^2 - 1 \Rightarrow y' = (x+y)^2 - 1$$

Đặt $z=x+y$ $\Rightarrow y' = z' - 1$ thay vào pt trên

$$z' - 1 = z^2 - 1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x+C} = x + y \Rightarrow y = -x - \frac{1}{x+C}$$

Thay điều kiện đầu vào : $1 = -C$

Nghiệm riêng cần tìm là:

$$\boxed{y = \frac{1}{1-x} - x}$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tách biến

Bài tập: Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt sau

$1. y' = 2x - y$

$2. \tan y dx - x \ln x dy = 0$

$3. y' = \cos y - 2$

$4. x^2(y^2+5)dx + (y^3+5)y^2 dy = 0, y(0) = 1$

5. Một chất điểm chuyển động trên trục Ox theo chiều dương bắt đầu từ O với vận tốc 2m/s, gia tốc a= -v/2 (m/s^2) . Tính v(t).

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Dạng : $y' = f(\frac{y}{x})$

Cách giải : Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x$

Ví dụ: Tìm NTQ của phương trình $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$

Đặt: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u + u'x$ Thay vào pt

$$u + u'x = u + \cos u \Rightarrow \frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = Cx \Rightarrow \boxed{y = x\left(2\arctan Cx - \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)}$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Hai dạng ptvp có thể đưa về pt đẳng cấp:

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

Trong đó, f, g là các hàm đẳng cấp cùng bậc tức là tồn tại số nguyên k sao cho

$$f(tx,ty) = t^k f(x,y), g(tx,ty) = t^k g(x,y)$$

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$ Ta xét hpt $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

D≠0: hpt có ng duy nhất $x=x_0$, $y=y_0$

Đặt $X=x-x_0$, $Y=y-y_0$

D=0 : pt thành dạng $y' = g(a_2x + b_2y)$

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

Đây là pt đẳng cấp bậc 2

Chia 2 vế pt cho x^2

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{y}{x}dy = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{y/x} + \frac{y}{x}$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x$ Thay vào pt trên:

$$u + u'x = \frac{1}{u} + u \Rightarrow \int u\,du = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln Cx$$

$$\Rightarrow y^2 = 2x^2 \ln|Cx|$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Ví dụ: Tìm NTQ của pt

$$(2x-2y-1)dx+(x-y+1)dy=0$$

Ta viết lại pt thành :

$$y'=-\frac{2(x-y)-1}{(x-y)+1}$$ Nên $D=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0$ Ta được pt

$$y'=-2+\frac{3}{(x-y)+1}$$ Dạng pt $y'=f(ax+by+c)$

Đặt *z=x-y+1*

NTQ của pt là $\boxed{3x+C=x-y+1+\ln|x-y|}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT đẳng cấp

Bài tập: Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.\ y' = e^{y/x} + \frac{y}{x} + 1$$

$$2.\ x^2 y' + y^2 + xy + x^2 = 0$$

$$3.\ (x^2 - xy)dy + y^2 dx = 0$$

$$4.\ xy' = y \ln\frac{y}{x},\ y(1) = 1)$$

$$5.\ \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0,\ y(1) = 0$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

Dạng : $y' + p(x)y = q(x)$ pt không thuần nhất

$y' + p(x)y = 0$ pt thuần nhất

Cách giải : Nhân 2 vế pt với $e^{\int p(x)dx}$

$$y'e^{\int p(x)dx} + y\left(p(x)e^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Hoặc dùng công thức

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $y' - 2xy = 1 - 2x^2$

Sử dụng công thức nghiệm với

$$p(x) = -2x, q(x) = 1 - 2x^2$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

$$y = e^{x^2}\left(\int (1-2x^2)e^{-x^2}dx + C\right)$$

$$y = e^{x^2}\left(\int e^{-x^2}dx + \int xe^{-x^2}d(-x^2) + C\right)$$

$$\boxed{y = x + Ce^{x^2}}$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $y'(x+y^2)=y$

Ta biến đổi để đưa về thành pt khi xem x=x(y)

$$x'=\frac{x+y^2}{y}\Rightarrow x'-x\frac{1}{y}=y$$ Dùng công thức

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int ye^{\int\frac{-1}{y}dy}dy+C\right)$$

$$x=y\left(\int y\frac{1}{y}dy+C\right)\Rightarrow \boxed{x=y^2+Cy}$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT tuyến tính

Bài tập: Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.\, y' = \frac{1}{x}\left(2y + xe^{x} - 2e^{x}\right)$$

$$2.\, (1+x^2)y' + y = \arctan x$$

$$3.\, ydx - (x + y^2 \sin y)dy = 0$$

$$4.\, y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x,\ y(0) = 0$$

$$5.\, y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x},\ y(1) = 1$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT Bernulli

Dạng : $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

Trong đó: α≠0 vì nếu α=0 thì ta được pt tuyến tính

α≠1 vì nếu α=1 thì ta được pt tách biến

Cách giải : Đặt $z = y^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow z' = (1-\alpha)y'.y^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{z'.y^{\alpha}}{1-\alpha}$$ Thay vào pt trên

$$\frac{z'y^{\alpha}}{1-\alpha} + yp(x) = q(x)y^{\alpha}$$

$$z' + z.(1-\alpha)p(x) = (1-\alpha)q(x)$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT Bernulli

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $y' - 2y\tan x = -y^2\sin^2 x$

Đây là pt Bernulli với *α = 2*

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow y' = -z'.y^2$ Thay vào pt trên

$$-z'y^2 - 2y\tan x = -y^2\sin^2 x$$

$$z' + 2z\tan x = \sin^2 x$$

$$z = e^{-\int 2\tan x dx}\left(\int \sin^2 x e^{\int 2\tan x dx} dx + C\right)$$

$$y = \frac{1}{\cos^2 x(\tan x - x + C)}$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT Bernulli

Bài tập: Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.\ y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$$

$$2.\ y' = y(y^3\cos x + \tan x)$$

$$3.\ ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$$

$$4.\ 3dy + (1+3y^3)y\sin x dx = 0,\ y(\pi/2) = 1$$

$$5.\ (y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0,\ y(1) = 0$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT vp toàn phần

Dạng : $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Trong đó: $P'_y = Q'_x$

Cách giải : Ta tìm nghiệm pt dưới dạng ***U(x,y)=C*** trong đó hàm U(x,y) được tìm bằng 2 cách

Cách 1: Chọn điểm (x_0,y_0) sao cho tại đó 2 hàm P, Q liên tục thì :

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Cách 2: Ta tìm U(x,y) sao cho

$$U'_x = P(x,y), U'_y = Q(x,y)$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT vp toàn phần

Ví dụ: Tìm NTQ của pt

$$(e^{x+y}+2y)dx+(e^{x+y}+2x-2)dy=0$$

$$\left.\begin{aligned} P=e^{x+y}+2y \Rightarrow P'_y=e^{x+y}+2 \\ Q=e^{x+y}+2x-2 \Rightarrow Q'_x=e^{x+y}+2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P'_y=Q'_x$$

Cách 1: Chọn $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$U=\int_0^x (e^{x+y}+2y)dx+\int_0^y (e^{0+y}+2.0-2)dy$$

$$U=\left((e^{x+y}+2xy)-(e^y-0)\right)+\left((e^y-2y)-(e^0-0)\right)$$

$$U=e^{x+y}+2xy-2y$$

Phương trình vi phân cấp 1- PT vp toàn phần

Cách 2: Tìm hàm U(x,y) sao cho

$$\begin{cases} U'_x = e^{x+y} + 2y & (1) \\ U'_y = e^{x+y} + 2x - 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1): $U = e^{x+y} + 2y.x + C_1(y)$

Từ (2): $U = e^{x+y} + 2x.y - 2y + C_2(x)$

So sánh 2 đẳng thức trên, ta được

$$U = e^{x+y} + 2xy - 2y$$

Vậy NTQ của pt đã cho là $\boxed{e^{x+y} + 2xy - 2y = C}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT vp toàn phần

Ví dụ: Tìm NTQ của pt $(y+\frac{2}{x^2})dx+(x-\frac{3}{y^2})dy=0$

Kiểm tra điều kiện để pt trên là ptvp toàn phần

Tìm hàm U(x,y) sao cho $U'_x = y+\frac{2}{x^2}$

Đạo hàm theo x là y thì nguyên hàm là xy

Đh theo x là $\frac{2}{x^2}$ thì nguyên hàm là $-\frac{2}{x}$

Suy ra $U = xy-\frac{2}{x}$

Lấy đh U theo y và so sánh với $Q = x-\frac{3}{y^2}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT vp toàn phần

Ta thấy thiếu nguyên hàm của $-\dfrac{3}{y^2}$

Thêm nguyên hàm là $\dfrac{3}{y}$

Suy ra : $U = xy - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}$

Thử lại bằng cách lấy đạo hàm của U theo x (so sánh với P) và theo y (so sánh với Q)

Vậy NTQ của pt đã cho là $\boxed{xy - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = C}$

Phương trình vi phân cấp 1- PT vp toàn phần

Bài tập: Tìm NTQ hoặc nghiệm riêng của các pt

$$1.(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$$

$$2.(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$$

$$3.y\cos xdx+\sin xdy=\cos 2xdx,\ y(\frac{\pi}{2})=5$$

$$4.(3y^2-x)dx+2y(y^2-3x)dy=0$$

Biết rằng khi nhân 2 vế phương trình với hàm

$h=h(x+y^2)$ thì ta được 1 ptvp toàn phần

Phương trình vi phân cấp1

Bài tập: Nhận dạng và giải các pt sau

$1.\ xyy' = y^2 + 2x^2$ Pt:

$2.\ xy' = xe^{y/x} + y$ Pt:

$3.\ e^{1+x^2}\,tgy\,dx = \dfrac{e^{2x}}{x-1}dy$ Pt:

$4.\ y' = 2^{x-y}$ Pt:

$5.\ (x+y-4)dy + (x+y-2)dx = 0$ Pt:

$6.\ y'\cos x + y = 1 - \sin x$ Pt:

$7.\ y'(x+y^2) = y$ Pt:

$8.\ 4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$ Pt:

Phương trình vi phân cấp1

$9. y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$ Pt:

$10. y' = e^{x+y} + e^{x-y}$ Pt:

$11. (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0$

Pt:

$12. (2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$ Pt:

$13. y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x$ Pt:

$14. y = xy' + y'\ln y$ Pt:

$15. ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$ Pt:

$16. y' = \dfrac{1}{1-xy}$ Pt:

Phương trình vi phân cấp1

$$17.\ (x^2 \ln y - x)y' = y$$

$$18.\ y'x^3 \sin y + 2y = xy'$$

$$19.\ y' = \frac{y^2}{2xy + 3}$$

$$20.\ \frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2x\sqrt{y}}{1 + x^2} = 4\frac{arctgx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$21.\ (y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$$

$$22.\ y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$$

$$23.\ 3y \sin({}^{3y}\!/\!_{x})dx + (y - 3x\sin({}^{3y}\!/\!_{x}))dy = 0$$

$$24.\ y' = \frac{x + y}{x - y}$$

Phương trình vi phân cấp1

$$25.\ 2xdx = (x^2 + y^2 - 2y)dy$$

$$26.\ y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$$

$$27.\ y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$$

$$28.\ y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$$

$$29.\ (e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0$$

$$30.\ 2(x+y)y' = (x+y)^2 + 1$$

$$31.\ y' - y = 3e^x y^2$$

$$32.\ (1+2x^2)y' + 2xy = \sqrt{(1+2x^2)^3}$$

Phương trình vi phân cấp1

$$34.(2x^2y\ln y - x)y' = y \rightarrow x' + \frac{1}{y}x = 2\ln y.x^2$$

$$35.y\cos xdx + \sin xdy = \cos 2xdx$$

$$\rightarrow \sin xdy - \quad \cos 2x - y\cos x \quad dx = 0 : vptp$$

$$36.e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0 : vptp$$

$$37.y'\sqrt{1 + x^2} + y = \arcsin x : tt$$

$$38.y' - 2ytgx + y^2\sin^2 x = 0 : Ber, \alpha = 2$$

$$39.x^2y' - y^2 - xy = x^2 \rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$$