Khảo sát hàm y=f(x)

Các bước khảo sát và dựng đồ thị hàm y=f(x)

1. Tìm MXĐ, tính chẵn, lẻ, chu kỳ tuần hoàn (nếu có)

2. Tìm tiệm cận

3. Tìm cực trị, khoảng tăng giảm, tiệm cận đặc biệt

4. Tìm khỏang lồi, lõm và điểm uốn (nếu cần)

5. Lập bảng biến thiên

6. Dựng đồ thị

Khảo sát hàm y=f(x)

1. Tìm MXĐ, hàm chẵn lẻ, tính tuần hoàn

Hàm chẵn nếu $f(x) = f(-x)$, khi đó đồ thị hàm nhận trục Oy là trục đối xứng

Hàm lẻ nếu $f(x) = -f(-x)$, khi đó đồ thị nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng

Hàm tuần hoàn nếu tồn tại hằng số T sao cho $f(x) = f(x+T)$. Hằng số $T>0$ được gọi là chu kỳ tuần hoàn của hàm f(x) nếu T là số dương nhỏ nhất thỏa $f(x)=f(x+T)$ và khi đó ta chỉ phải khảo sát hàm trong 1 chu kỳ

Khảo sát hàm y=f(x)

2. Tìm tiệm cận

Với x_0 là điểm không thuộc MXĐ của hàm,

nếu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì hàm có *TCĐ $x = x_0$*

Nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$ Thì hàm có *TCN $y = y_0$*

Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = b \end{cases}$ Thì hàm có *TCX $y = ax+b$*

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Tìm tiệm cận của hàm $y = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

MXĐ : R\{2, 3}

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

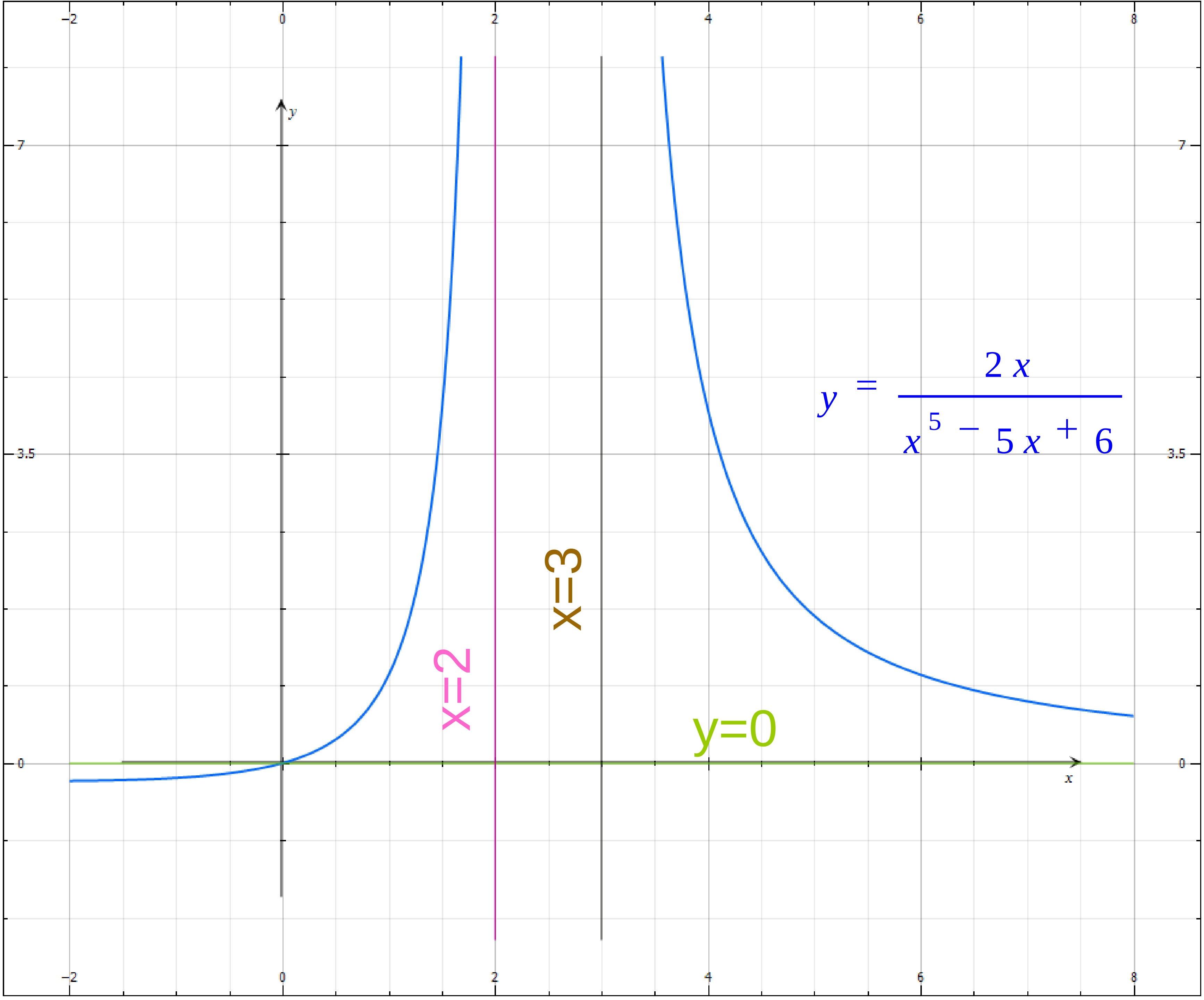
Hàm có TCĐ: $x = 2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

Hàm có TCĐ: $x = 3$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = 0$$

Hàm có TCN: $y = 0$



$y = \dfrac{2x}{x^5 - 5x + 6}$
x=2
x=3
y=0
y
x
−2
0
2
4
6
8
7
3.5

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Tìm tiệm cận của hàm $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$

MXĐ: R\{0}

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{2}{x}} + 1 = 1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{2}{x^2} e^{\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= 1 + \lim_{x \to 0^+} 2e^{\frac{2}{x}} = \infty$$

Hàm có TCĐ $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{2}{x}} + 1 = 1$$

Hàm không có TC

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} xe^{\frac{2}{x}} + 1 = \infty$$

Khảo sát hàm y=f(x)

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} xe^{\frac{2}{x}} + 1 = \infty$$

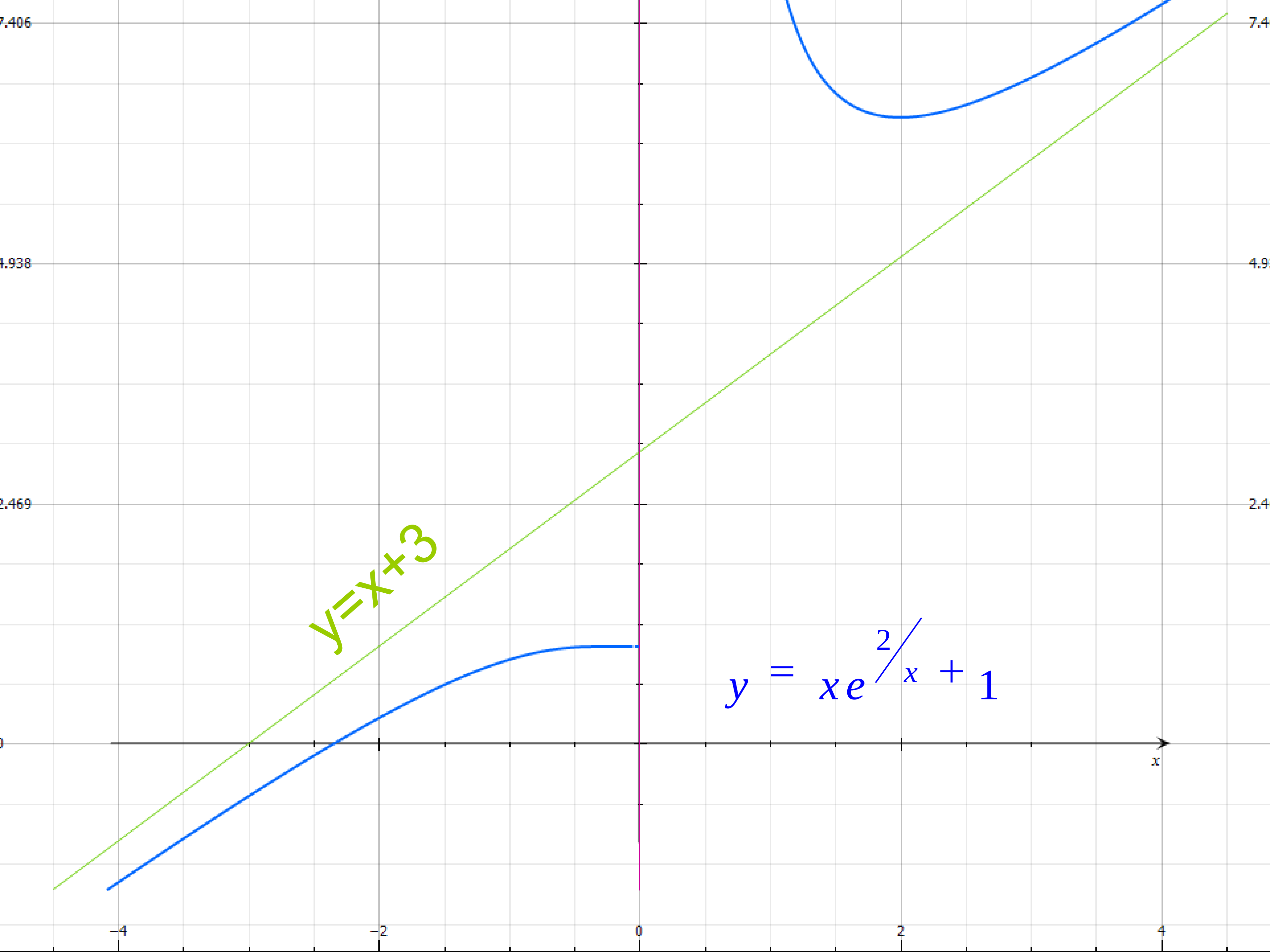
$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{2}{x}} + 1}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} (y - x) = \lim_{x\to\infty} (xe^{\frac{2}{x}} + 1 - x) = 1 + \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right)$$

$$= 1 + \lim_{x\to\infty} x.\frac{2}{x} = 3$$

Hàm có TCX $y = x+3$

Vậy hàm đã cho có 1 TCĐ $x = 0$ và 1 TCX $y = x+3$



7.406
4.938
2.469
0
y=x+3
$y = xe^{2/x} + 1$
x
−4
−2
0
2
4

3. Tìm khỏang tăng giảm, cực trị :

Tính đạo hàm cấp 1 và giải phương trình y’ = 0

Nếu *y’>0* trong (a,b) thì *hàm tăng* trong (a,b)

Nếu *y’<0* trong (a,b) thì *hàm giảm* trong (a,b)

Nếu *y’=0* hoặc *không tồn tại y’* tại $x=x_0$ và y’ đổi dấu khi đi qua $x=x_0$ thì *hàm đạt cực trị* tại $x=x_0$

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm y=|x|(x+2)

$$y=\begin{cases} x(x+2), & x\ge 0 \\ -x(x+2), & x<0 \end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases} 2x+2, & x>0 \\ -2x-2, & x<0 \\ \nexists, & x=0 \end{cases} \qquad y'=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Như vậy, ta có 2 điểm *nghi ngờ hàm đạt cực trị* là x = 0 và x = -1

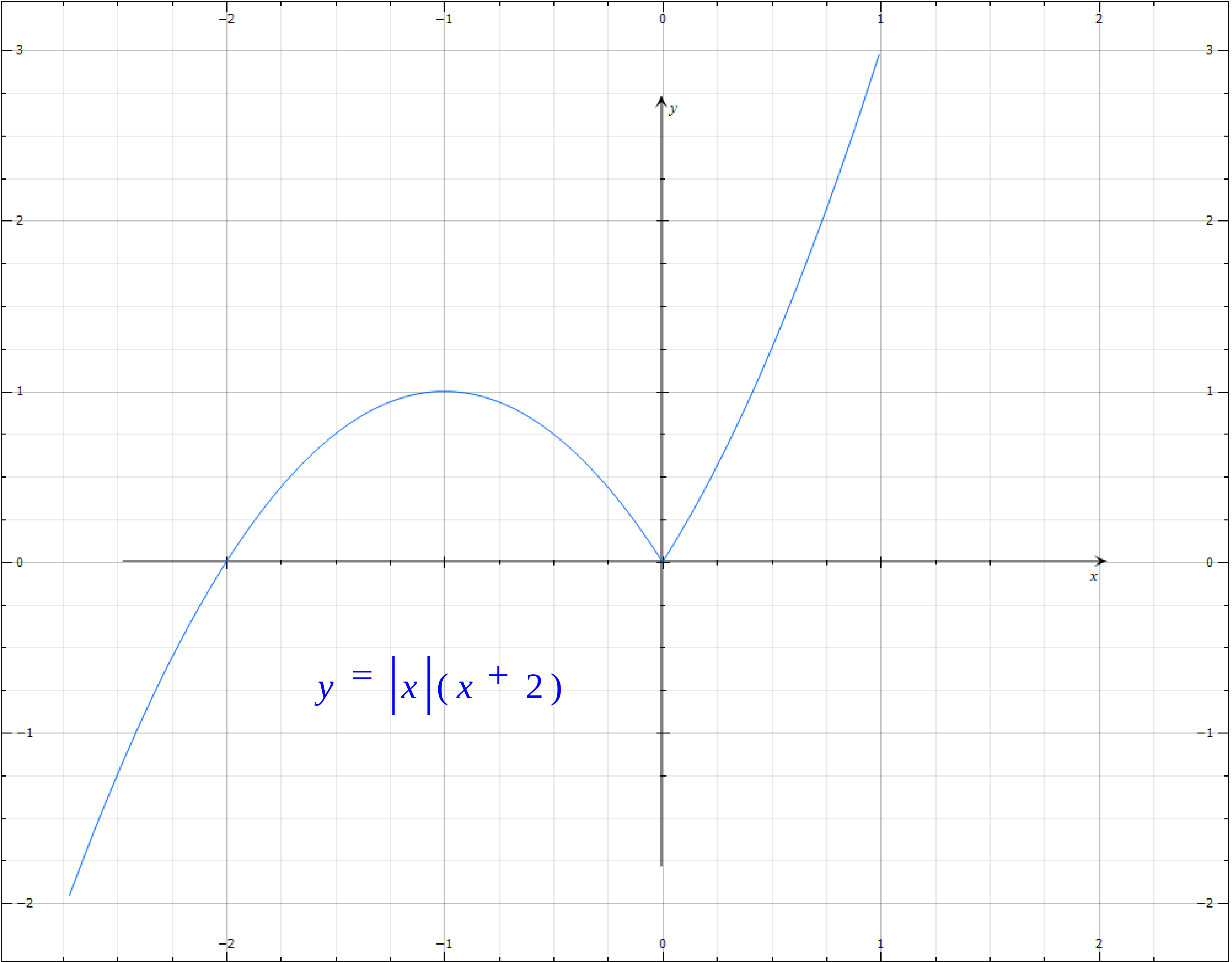
Để xác định cực trị, khỏang tăng giảm, ta lập 1 bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	‖	-	0	+	
y		↗	1	↘	0	↗	

Vậy hàm có 2 cực trị :

$y_{cđ}=y(-1)=1,$

$y_{ct}=y(0)=0$



−2
−1
0
1
2
3
2
1
0
−1
−2
y
x
y = |x|(x + 2)

Khảo sát hàm y=f(x)

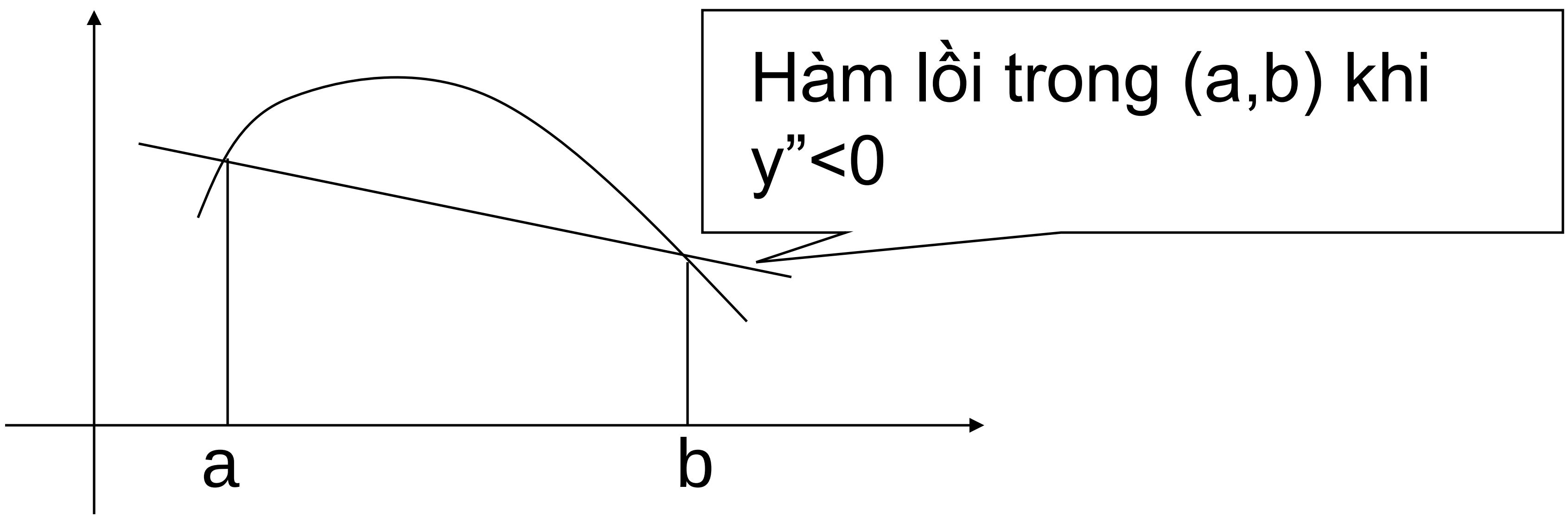
4. Tìm khỏang lồi lõm, điểm uốn

Tính đạo hàm cấp 2 và giải phương trình y” = 0

Nếu *y”>0* trong (a,b) thì *hàm lõm* trong (a,b)

Nếu *y”<0* trong (a,b) thì *hàm lồi* trong (a,b)

Nếu *y”=0* hoặc *không tồn tại y”* tại $x=x_0$ và y” đổi dấu khi đi qua $x=x_0$ thì *hàm có điểm uốn là* $(x_0, f(x_0))$



Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Tìm khỏang lồi lõm và điểm uốn của hàm $y=x^2\ln x$

$$y' = 2x\ln x + x,\ y'' = 2\ln x + 3$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

Ta cũng lập bảng biến thiên để khảo sát

x	0		$1/\sqrt{e^3}$		$+\infty$
y"		-	0	+	
y					

Vậy hàm lồi trong khỏang $(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}})$, lõm trong khỏang $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, +\infty)$ Và có điểm uốn là $(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \frac{-3}{2\sqrt{e^6}})$

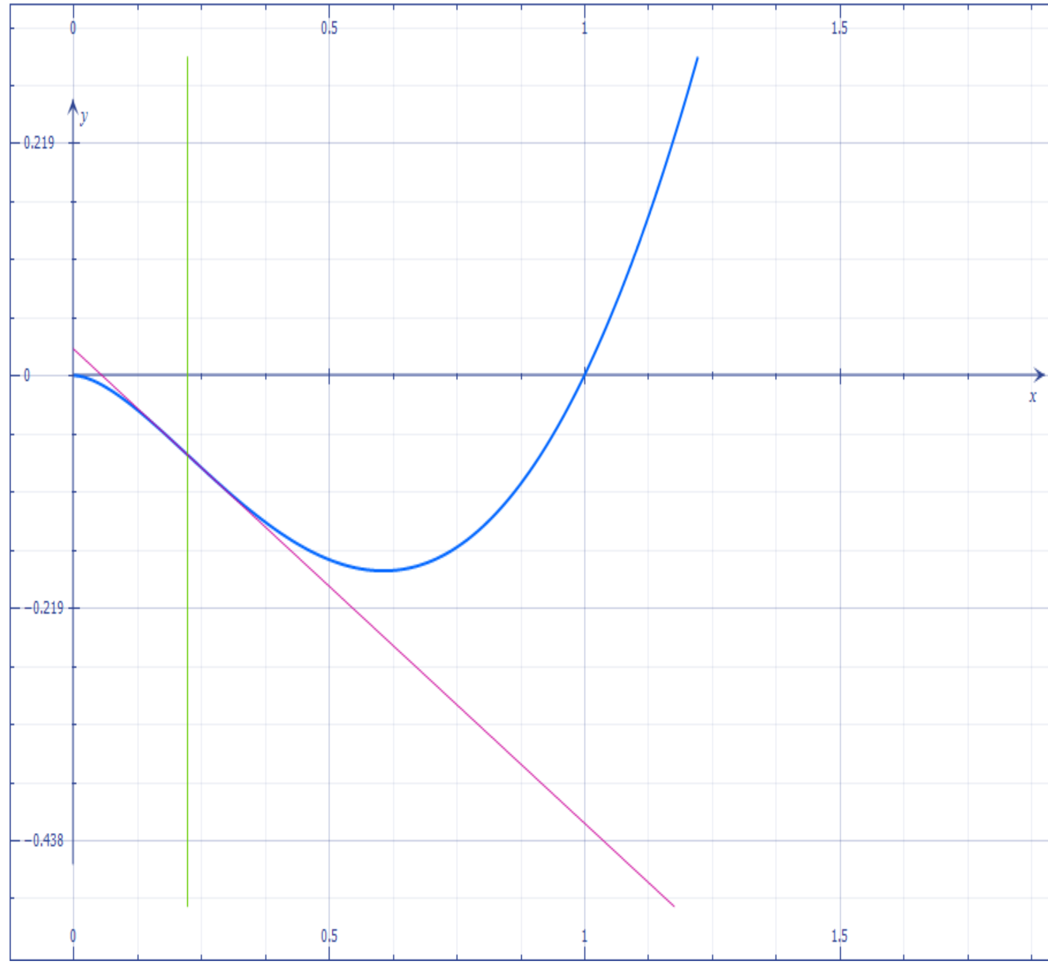
Khảo sát hàm y=f(x)

Trên hình vẽ là đt

$$x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

Tiếp tuyến

$$y = \left(x - \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{e^3}}\right) - \frac{3}{2\sqrt{e^3}}$$



Qua điểm uốn, vị trí tương đối của tiếp tuyến và đường cong thay đổi vì đồ thị đổi dáng từ lồi sang lõm

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = e^{1/x} - x$

MXĐ : R\{0}

Tiệm cận: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} e^{1/x} - x = \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{1/x} - x}{x} = -1$$

TCX: y=-x+1

$$\lim_{x \to \infty} (y + x) = \lim_{x \to \infty} e^{1/x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} (e^{1/x} - x) = +\infty$$

TCĐ: x=0

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} (e^{1/x} - x) = 0$$

Khảo sát hàm y=f(x)

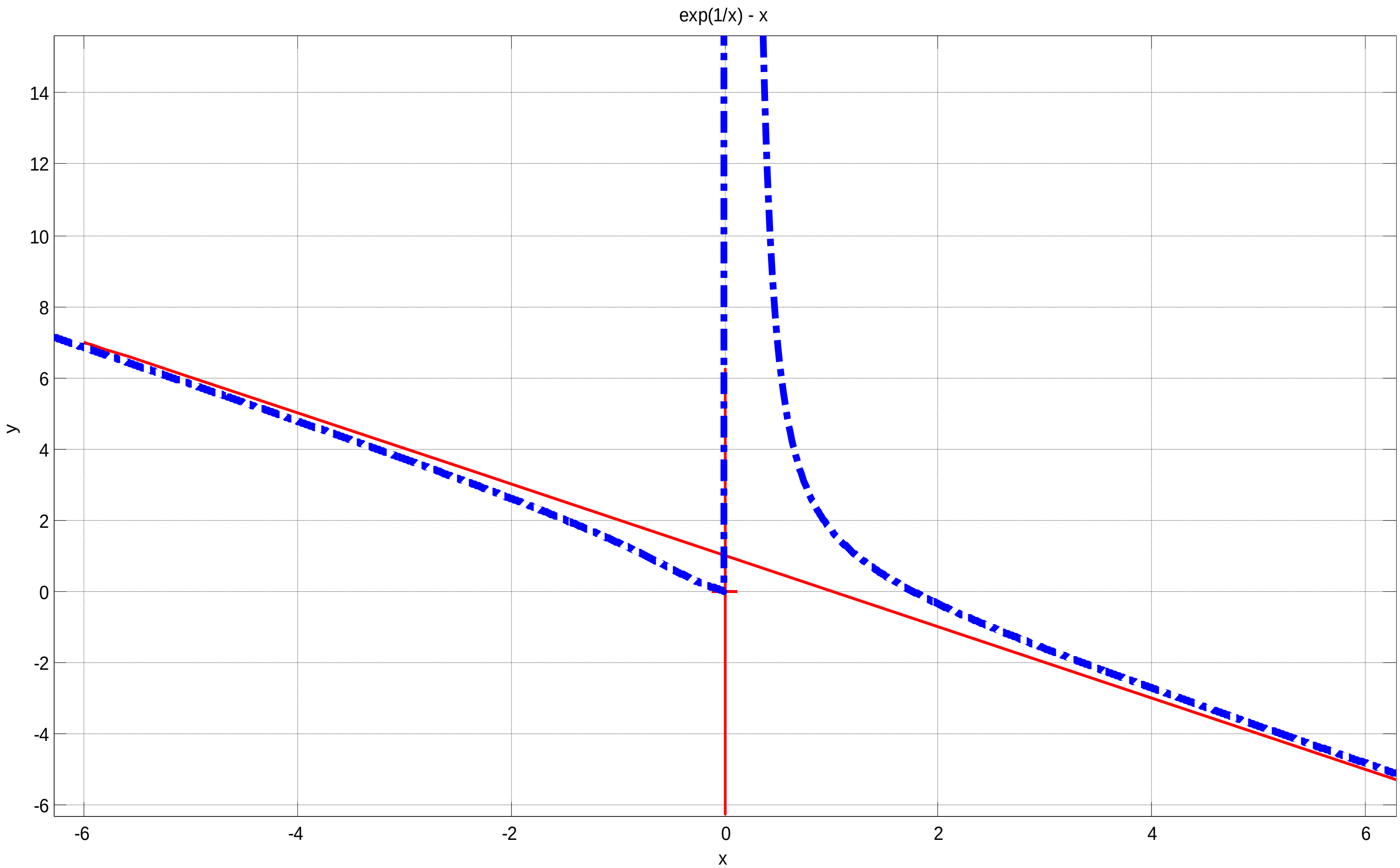
$$y = e^{1/x} - x$$

Cực trị: $y' = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} - 1 = -\frac{e^{1/x} + x^2}{x^2}$

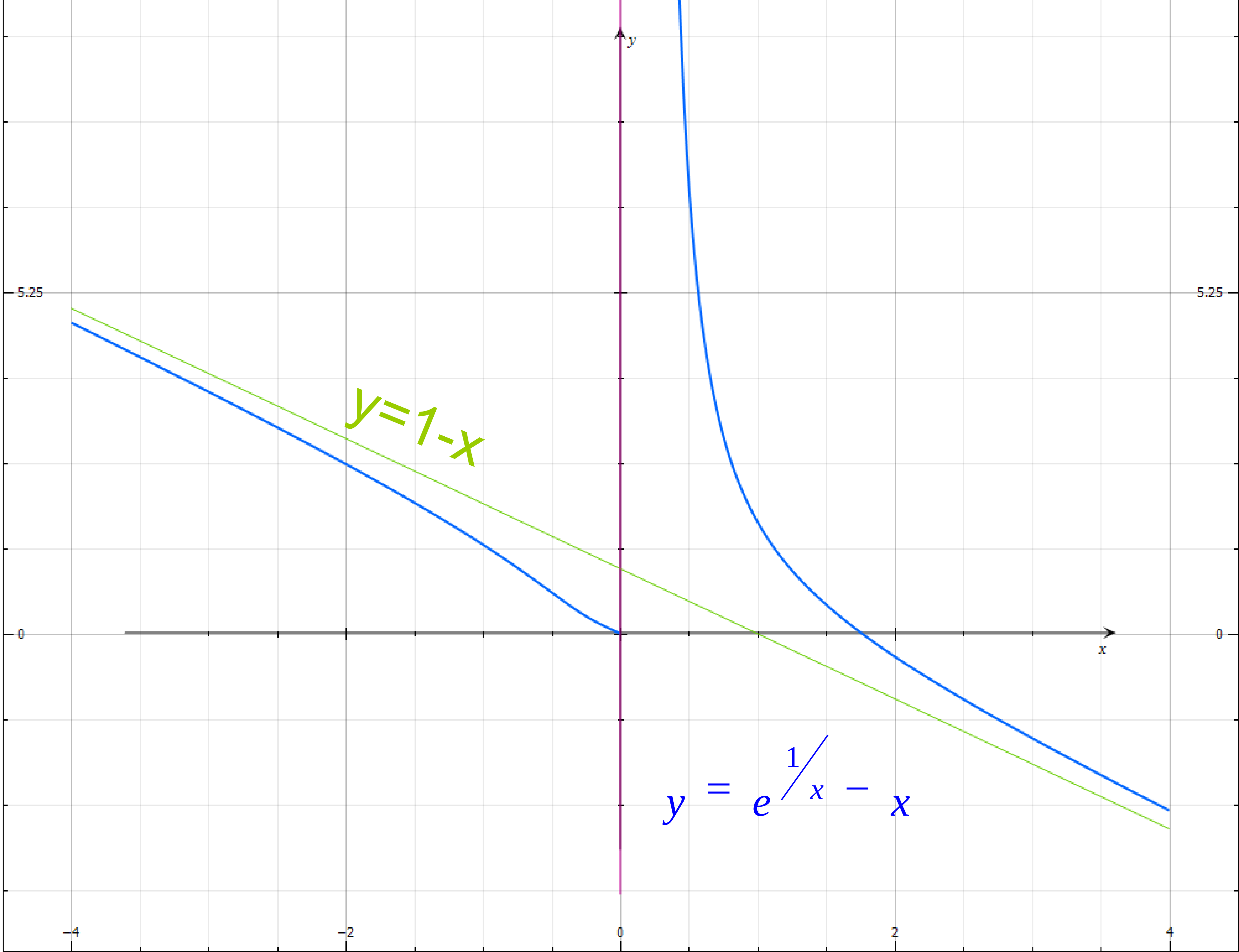
$$y' < 0, \forall x \in R^*$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'			‖		
y	$+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Khảo sát hàm y=f(x)



$$y = e^{1/x} - x$$



y
5.25
5.25
y=1-x
0
0
x
$y = e^{1/x} - x$
-4
-2
0
2
4

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

MXĐ: R

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} = \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$$

Hàm không có tiệm cận

Cực trị: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1)^2 + 2\sqrt[3]{x}(x-1) = \dfrac{(7x-1)(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1/7 \end{array}\right.$$

Và y'(0)=+∞

Khảo sát hàm y=f(x)

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(x-1)^2 + 2\sqrt[3]{x}(x-1) = \frac{(7x-1)(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Vì đạo hàm cấp 2 phức tạp nên ta sẽ không tính

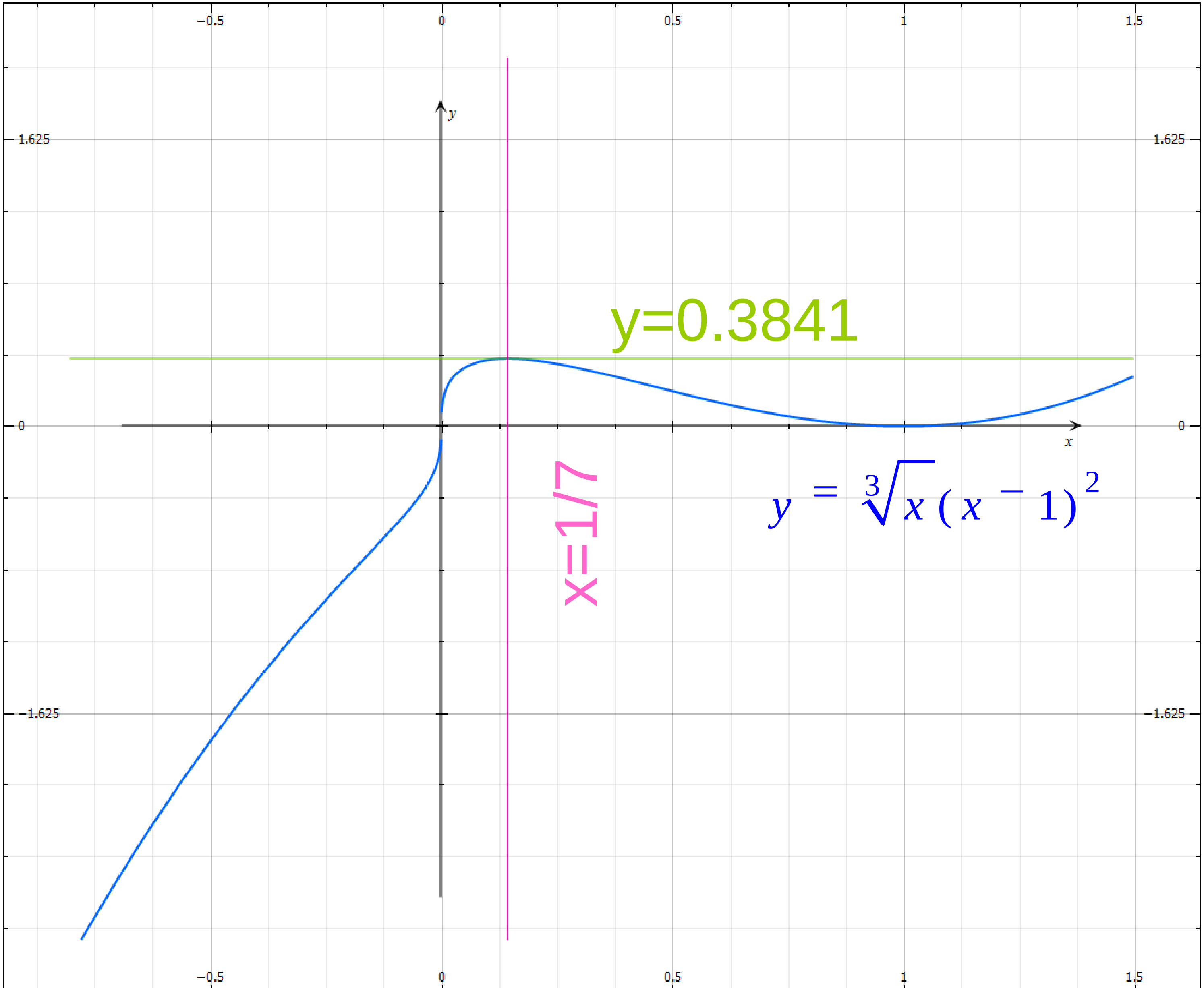
Bảng biến thiên

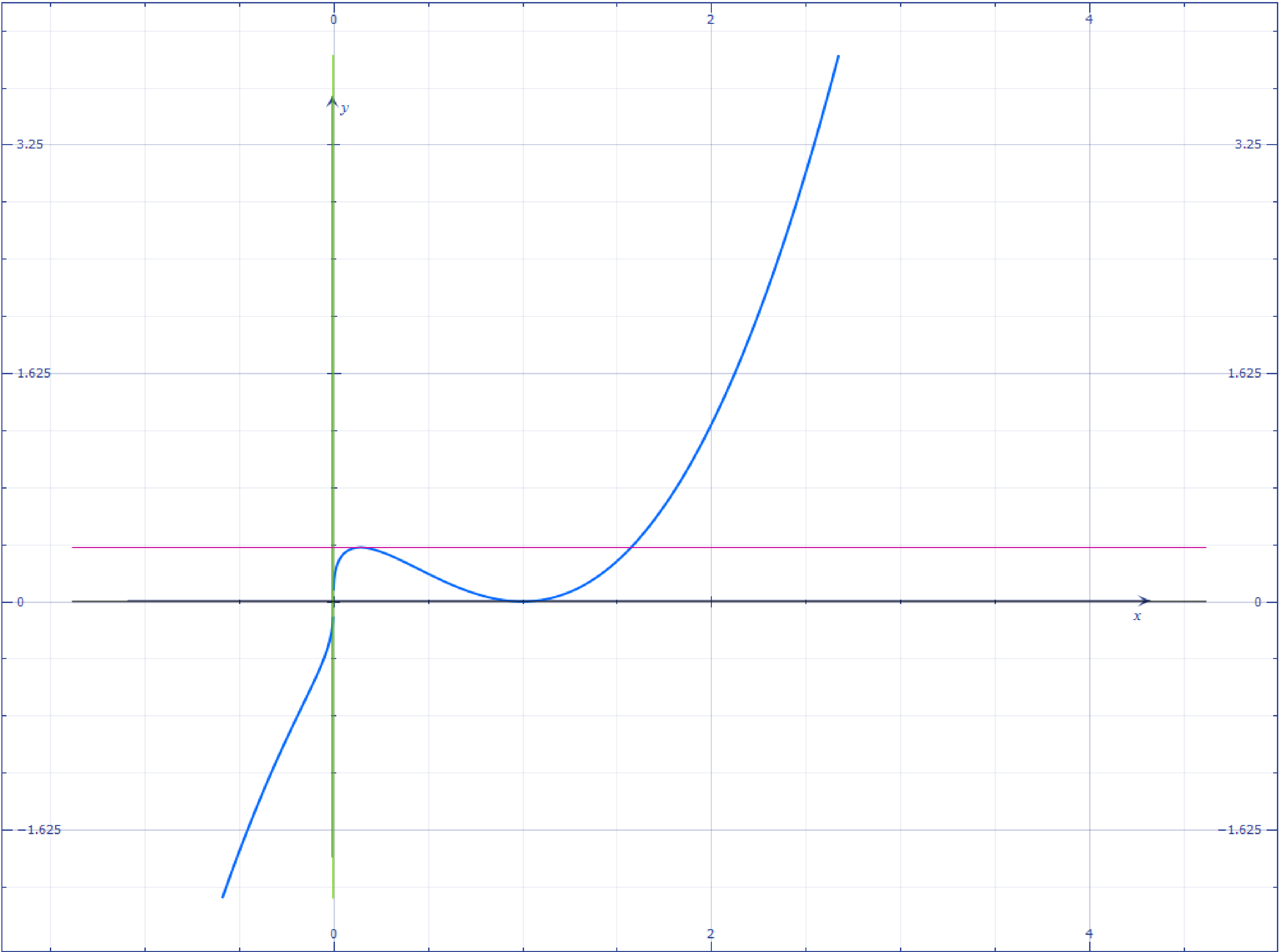
x	$-\infty$		0		1/7		1		$+\infty$
y'		+	||	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	0.3841	↘	0	↗	$+\infty$

Tiếp tuyến nằm ngang

Khảo sát hàm y=f(x)

Đồ thị





0
2
4
3.25
1.625
0
−1.625
y
x

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = \ln x - x + 1$

MXĐ: R^+

Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} (\ln x - x + 1) = -\infty$$ Hàm có *TCĐ x = 0*

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} (\ln x - x + 1) = 1 + \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x - x + 1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to +\infty} (y + x) = \lim_{x\to +\infty} (\ln x - x + 1 + x) = \lim_{x\to +\infty} \ln x + 1 = +\infty$$

Hàm không có TCX

Khảo sát hàm y=f(x)

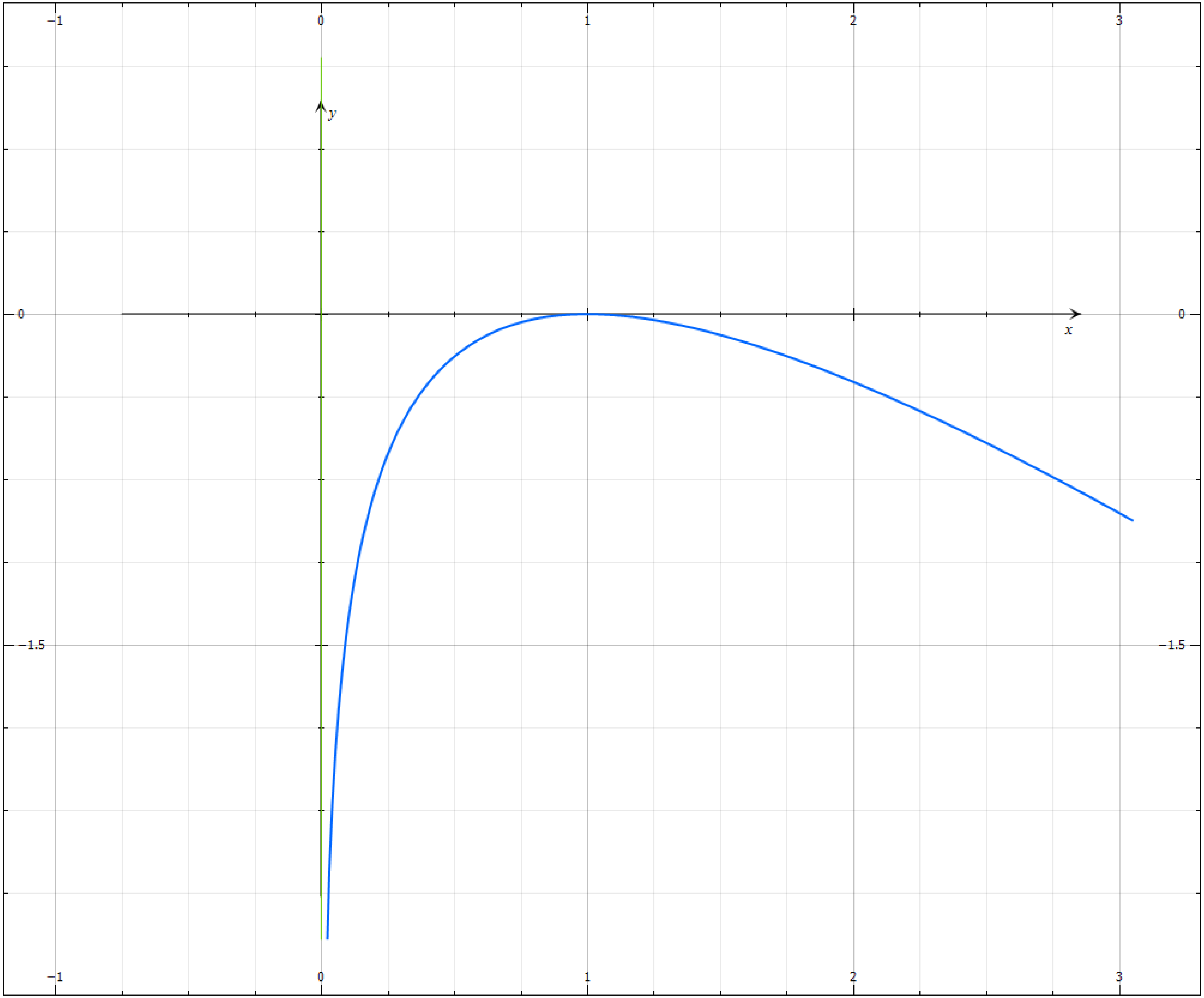
Cực trị: $y' = \frac{1}{x} - 1$ $\quad y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0		1		+∞
y’		+	0	-	
y	-∞		0		-∞

Khảo sát hàm y=f(x)

Đồ thị



Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = \sqrt{\left|x^2 - 2\right|^3}$

MXĐ R

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\left|x^2 - 2\right|^3} = +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\left|x^2 - 2\right|^3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\left|x^2 - 2\right|^3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (-1)\sqrt{\frac{\left(x^2 - 2\right)^3}{x^2}} = \infty$$

Hàm không có tiệm cận

Khảo sát hàm y=f(x)

Cực trị:

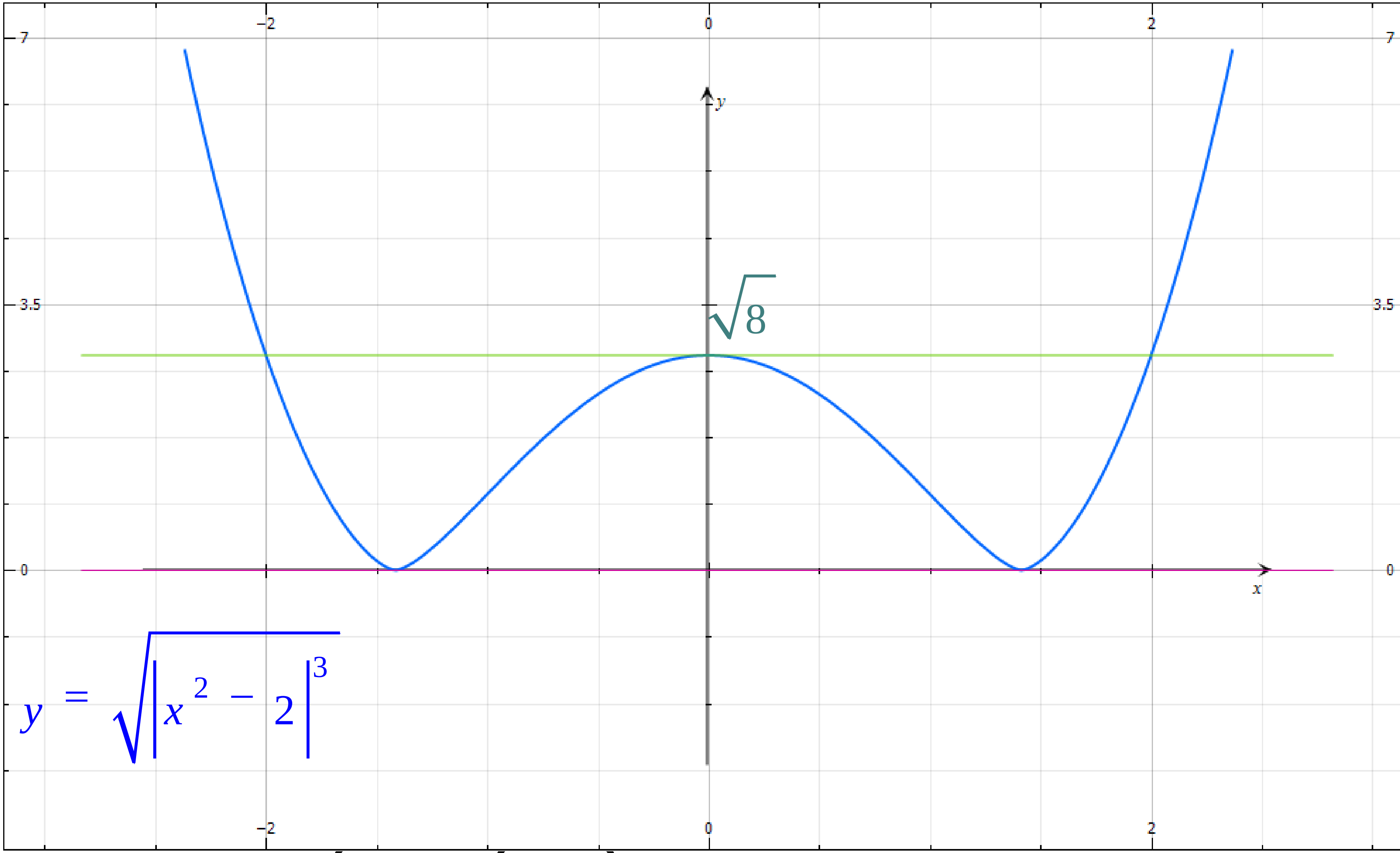
$$y=\begin{cases}(x^2-2)^{3/2}, & |x|\ge\sqrt{2}\\(2-x^2)^{3/2}, & |x|<\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}3x(x^2-2)^{1/2}, & |x|\ge\sqrt{2}\\-3x(2-x^2)^{1/2}, & |x|<\sqrt{2}\end{cases}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x=0,\pm\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y’			0	$+$	0		0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khảo sát hàm y=f(x)



Hàm có 2 tiếp tuyến nằm ngang ứng với 3 nghiệm của pt *y'=0* là y=0 và $y = \sqrt{8}$

Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

MXĐ : R

Tiệm cận: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} = \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x\ \ x-1\ \ ^2}{x^3}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} (y-x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-2x)}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2} = -\frac{2}{3}$$

Hàm có TCX $y = x - \frac{2}{3}$

Khảo sát hàm y=f(x)

Cực trị: $y' = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}} = \dfrac{3x - 1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$ $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 1/3$

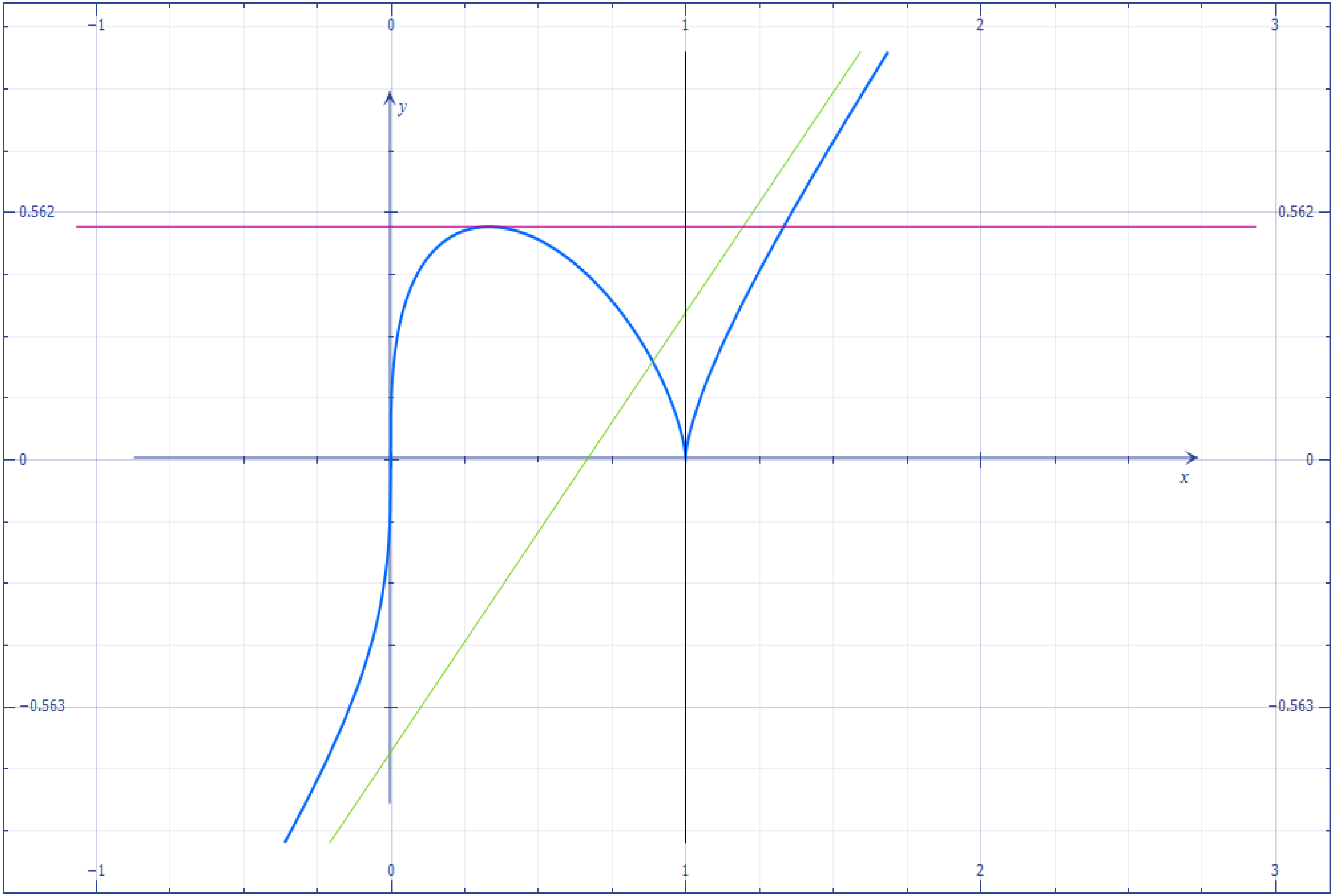
$, \quad y'(0) = +\infty, \quad y'_-(1) = -\infty, \quad y'_+(1) = +\infty$

Tại (1,0) tiếp tuyến trái và phải trùng nhau nên ta có tiếp tuyến thẳng đứng. Tại (0,0) ta có TT đứng thứ hai

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$1/3$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	0		‖	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	0	↗	$+\infty$
			TTĐ		TTN		TTĐ		

Khảo sát hàm y=f(x)



Khảo sát hàm y=f(x)

Ví dụ: Khảo sát và dựng đồ thị hàm $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

MXĐ : $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Tiệm cận :

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} \right) = 1$$

Hàm có TCX : y=x+1 khi $x \to +\infty$

Khảo sát hàm y=f(x)

Tương tự, khi $x \to -\infty$ Hàm có TCX : *y* = - *x* - *1*

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = 0$$

Hàm không có TC

$$\lim_{x \to 2^+} y = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = +\infty$$

Hàm có TCĐ : x=2

Cực trị :

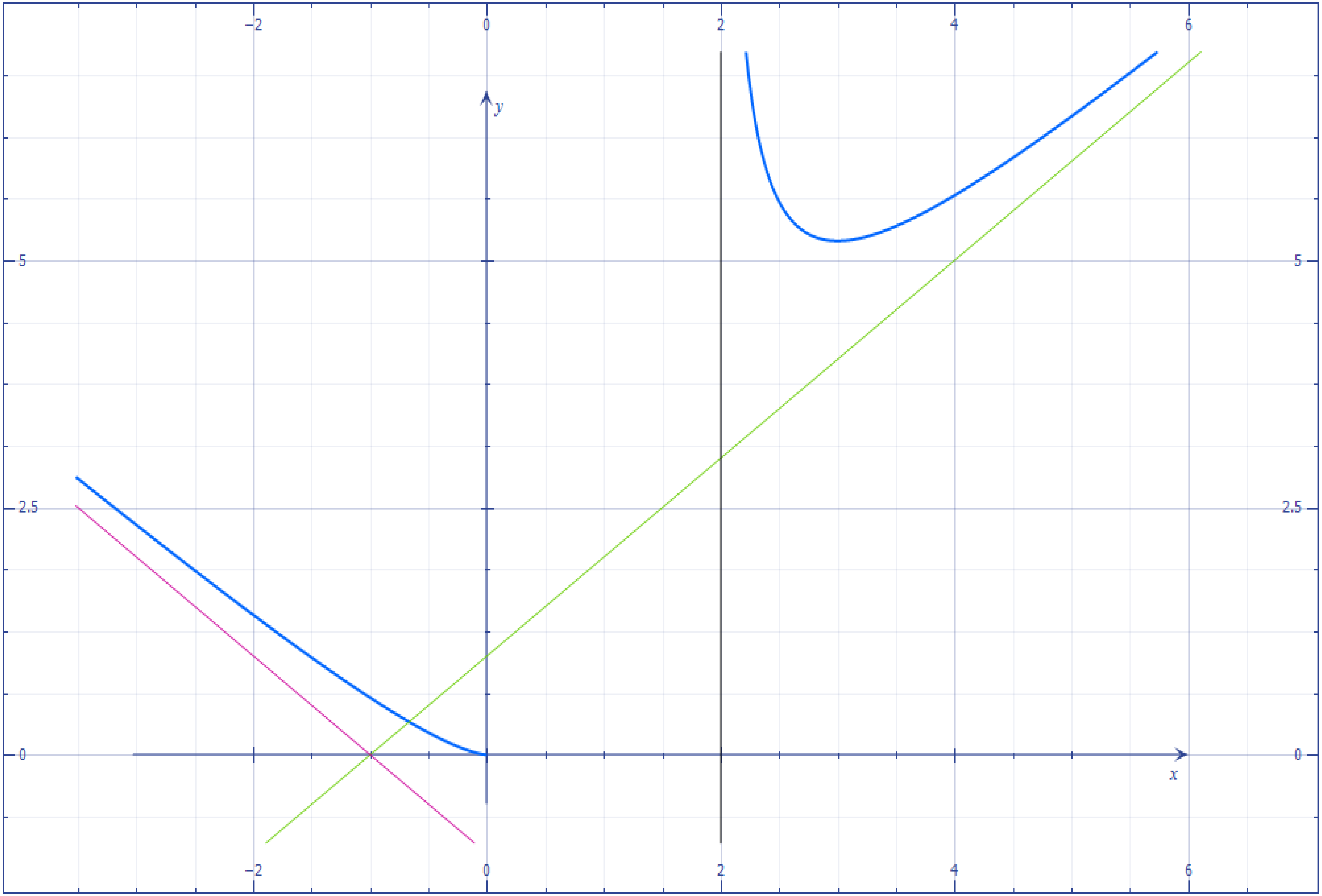
$$y' = x(x-2)\sqrt{\frac{x^3}{(x-2)^3}} \qquad y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Khảo sát hàm y=f(x)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		−				−	0	+	
y	$+\infty$	↘	0		$+\infty$	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Khảo sát hàm y=f(x)



Khảo sát hàm y=f(x) – Phụ lục

Tìm tiệm cận của các hàm

$y = x\ln(e + \frac{1}{x})$	$x = -\frac{1}{e},\ y = x + \frac{1}{e}$
$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$	$y = x - \frac{1}{3}$
$y = \frac{\sin x}{x}$	$y = 0$
$y = \frac{1}{x} e^{-1/x}$	$x = 0,\ y = 0$

Khảo sát hàm y=f(x) – Phụ lục

Tìm cực trị của các hàm

$$y = x\sqrt{1 - x^2} \qquad y_{min} = y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\ y_{max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \frac{x}{\ln x} \qquad y_{min} = y(e)$$

$$y = \frac{|x - 1|}{x^2} \qquad y_{min} = y(1),\ y_{max} = y(2)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 2x} \qquad y_{min} = y(1)$$

Khảo sát hàm y=f(x) – Phụ lục

Khảo sát và vẽ đồ thị

$$1.\ y = (1+x)^{1/x}$$

$$2.\ y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$3.\ y = \frac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$$

$$4.\ y = x + \sqrt{x^2-1}$$

$$5.\ y = e^{4x-x^2}$$

$$6.\ y = x^3 e^{-x}$$

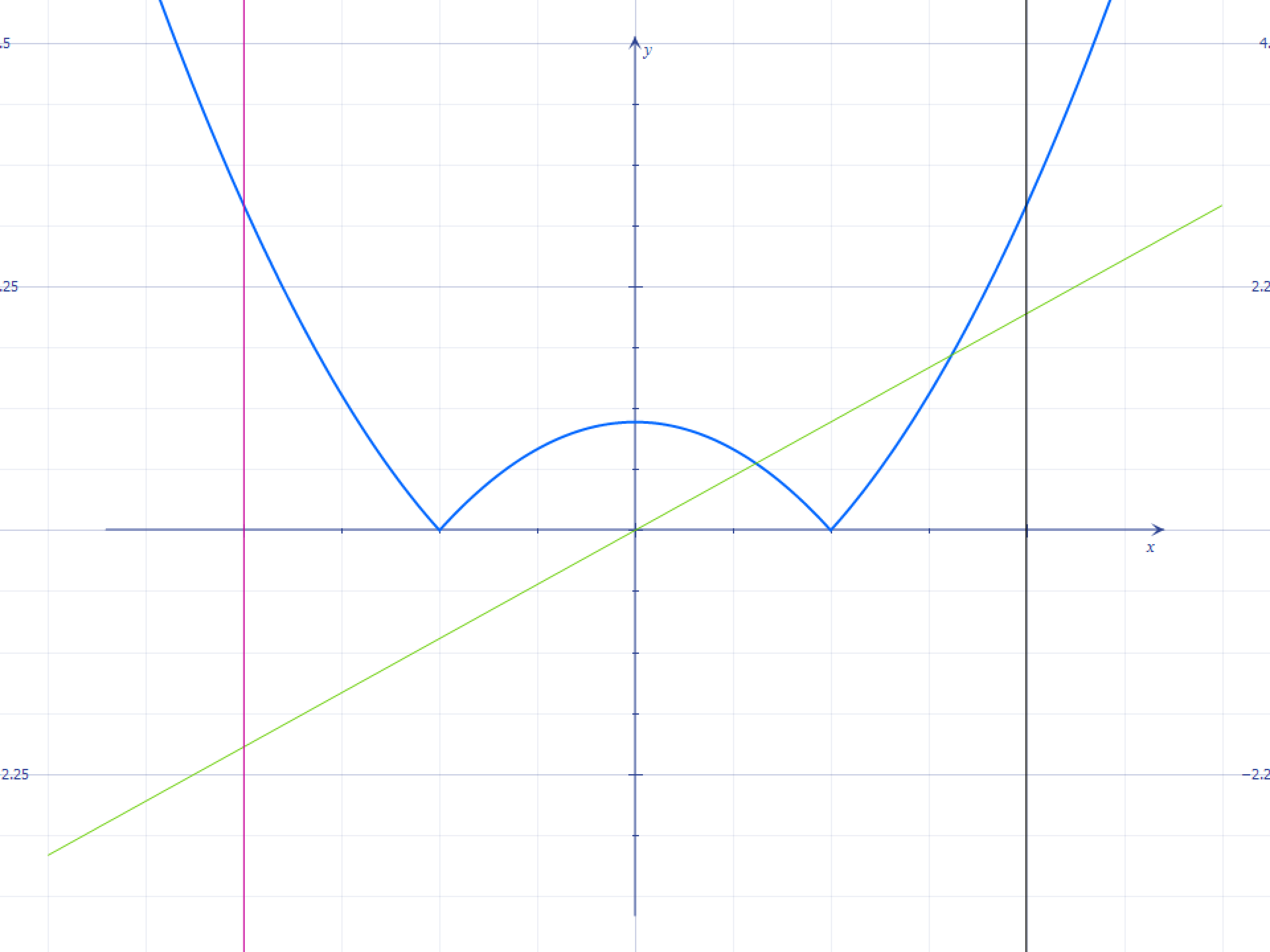
$$7.\ y = \frac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$$

$$8.\ y = \frac{x^2+1}{x^2-4x+5}$$

$$9.\ y = \frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$10.\ y = x^2 \ln x$$

$$11.\ y = \sqrt[3]{x^2-2x}$$



.5
4.
y
.25
2.2
x
2.25
−2.2