

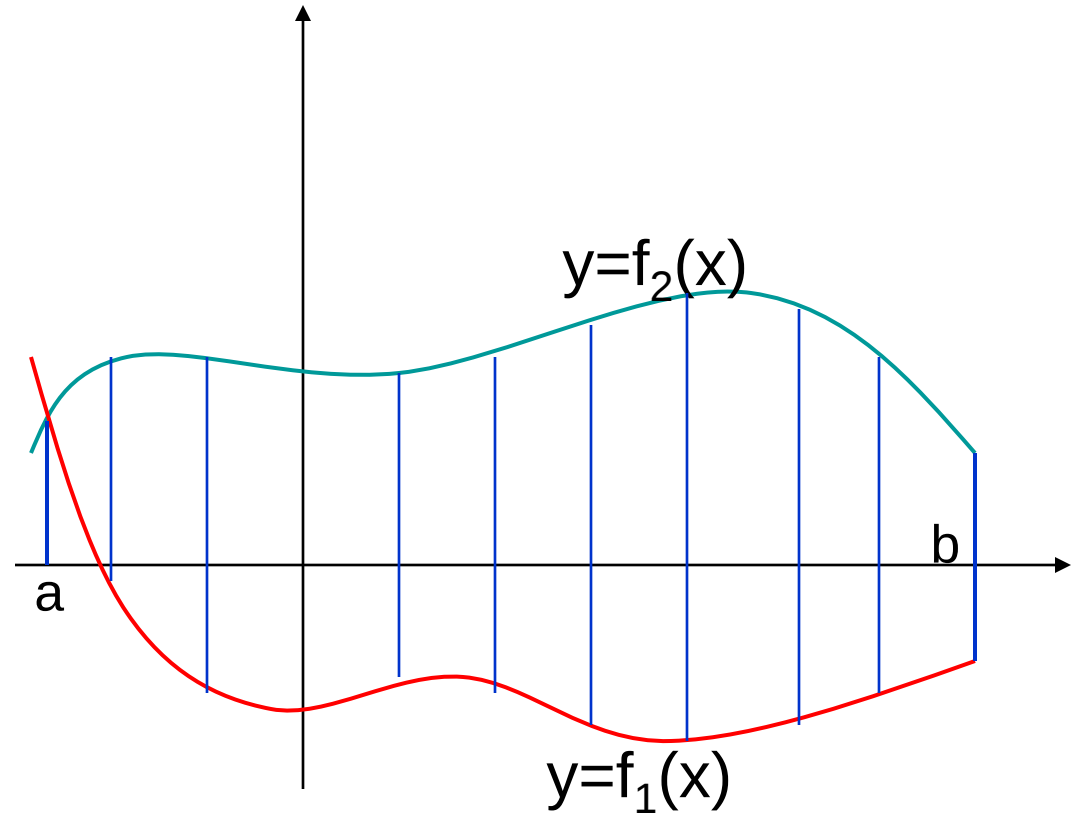
Ứng dụng của tích phân – Diện tích miền phẳng

Trong mp cho miền
D giới hạn bởi

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \end{cases}$$

Từ định nghĩa tp
xác định ta suy ra

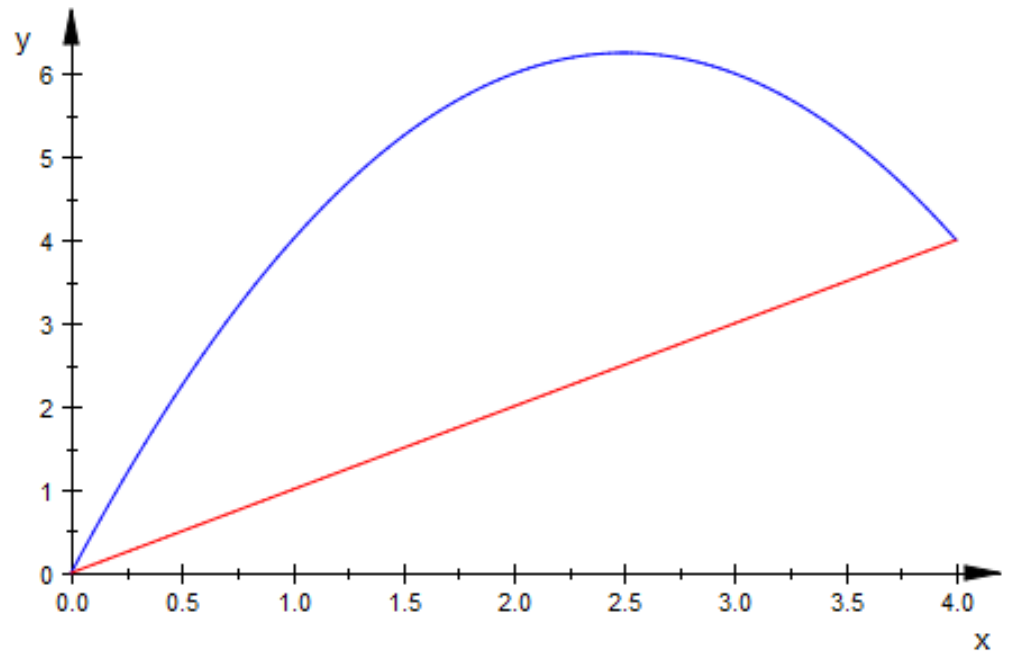
$$S(D) = \int_a^b f_2(x) - f_1(x) \, dx$$



Ứng dụng của tích phân – Diện tích miền phẳng

Ví dụ: Tính dt miền D giới hạn bởi $y=x$ và $y=5x-x^2$

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_0^4 (5x - x^2) - x \, dx \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$



Ứng dụng của tích phân – Diện tích miền phẳng

Ta có thể dùng MatLab để giải Ví dụ trên như sau
Tìm giao điểm tức là cận tp bằng cách giải hpt:

$$f1=y-x$$

$$f2 = y-5*x+x^2$$

$$[x \ y]=solve(f1,f2)$$

Ta sẽ được ma trận với 2 nghiệm của hpt $x=0, 4$ và $y=0, 4$. Tức là ta có cận tp $0 \leq x \leq 4$

Để tính $S(D)$, ta đi dùng lệnh

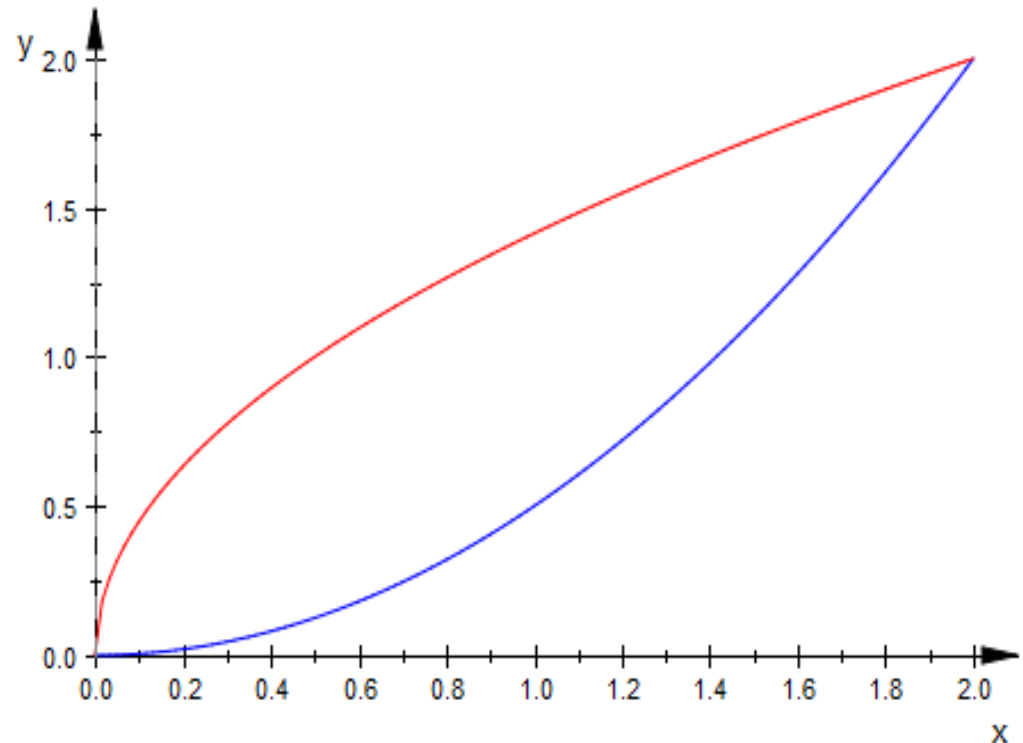
$$f=f1-f2$$

$$S=abs(int(f,0,4))$$

Ứng dụng của tích phân – Diện tích miền phẳng

Ví dụ: Tính dt miền D giới hạn bởi $y^2=2x$ và $2y=x^2$

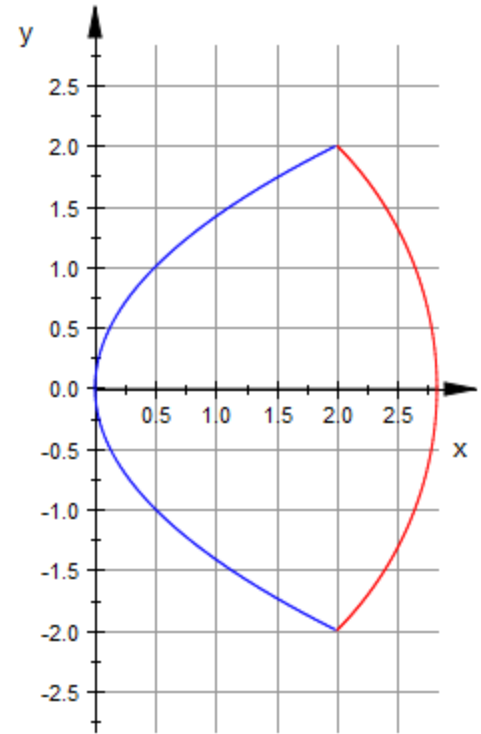
$$S(D) = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{4}{3}$$



Ứng dụng của tích phân – Diện tích miền phẳng

Ví dụ: Tính dt miền D giới hạn bởi $x^2+y^2=8$, $2x=y^2$, $x>0$

$$S(D) = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2\pi + \dots$$



Ứng dụng của tích phân – Thể tích vật thể tròn xoay

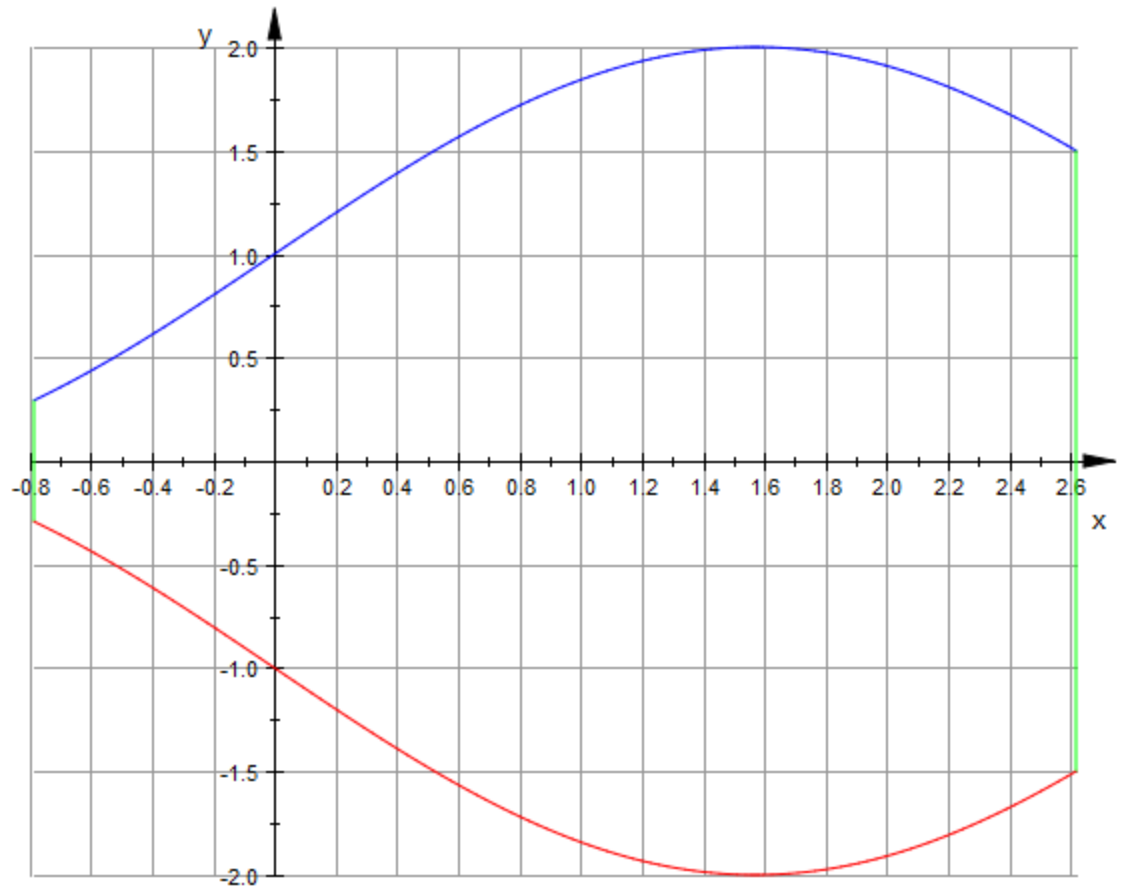
Miền phẳng D giới hạn bởi
Quay quanh
trục Ox tạo
thành vật thể
tròn xoay

$$V = \sum_{i=1}^n \pi f^2(M_k) \Delta x_k$$

D quay quanh trục
Oy

$$V_y = 2\pi \int_a^b |xf(x)| dx$$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

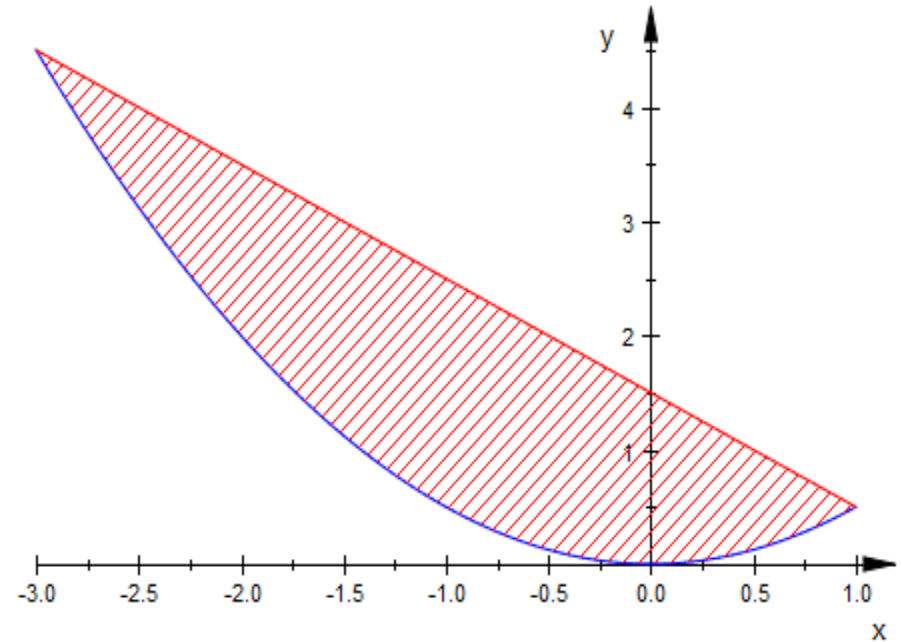


Ứng dụng của tích phân – Thể tích vật thể tròn xoay

Ví dụ 1: Tính thể tích vật thể tạo ra khi quay miền D giới hạn bởi $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$ quanh trục Ox

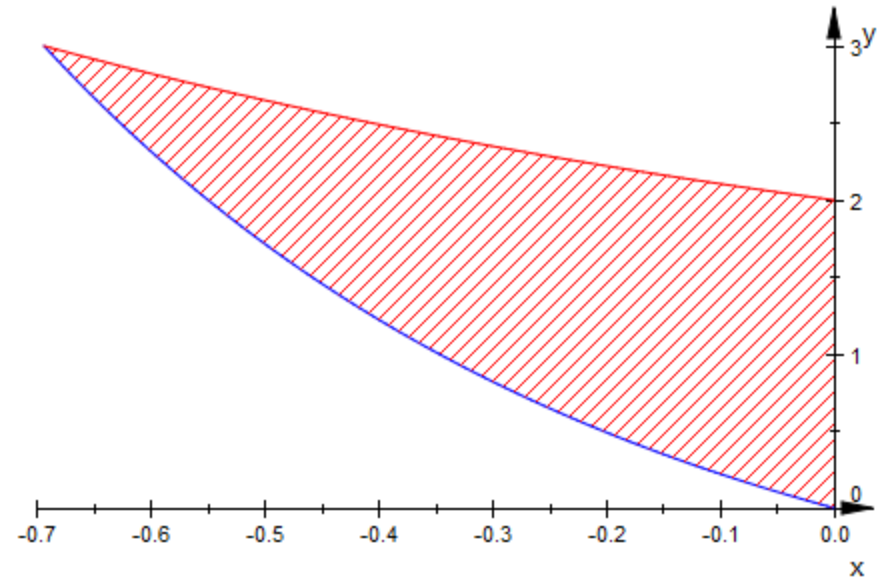
$$V_x = \pi \int_{-3}^1 \left(\left(\frac{3}{2} - x \right)^2 - \frac{x^4}{4} \right) dx$$

$$= \frac{272}{25} \pi$$



Ứng dụng của tích phân – Thể tích vật thể tròn xoay

Ví dụ: Tính thể tích vật thể tạo ra khi quay miền D giới hạn bởi $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$ quanh trục Ox



$$V_x = \pi \int_{-\ln 2}^0 (e^{-x} + 1)^2 - (e^{-2x} - 1)^2 dx = \frac{11}{4}\pi$$

Ứng dụng của tích phân – Thể tích vật thể tròn xoay

Ví dụ: Tính thể tích vật thể tạo ra khi quay miền D giới hạn bởi $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$ quanh trục Oy

$$V_x = 2\pi \int_{-\ln 2}^0 |x| (e^{-x} + 1) - (e^{-2x} - 1) dx$$

$$= 2\pi \left(\ln^2 2 - \frac{1}{4} \right)$$

Ứng dụng của tích phân – Thể tích vật thể tròn xoay

Ví dụ: Tính thể tích vật thể tạo ra khi quay miền D giới hạn bởi $y=x^2+1$, $y=5$ quay quanh

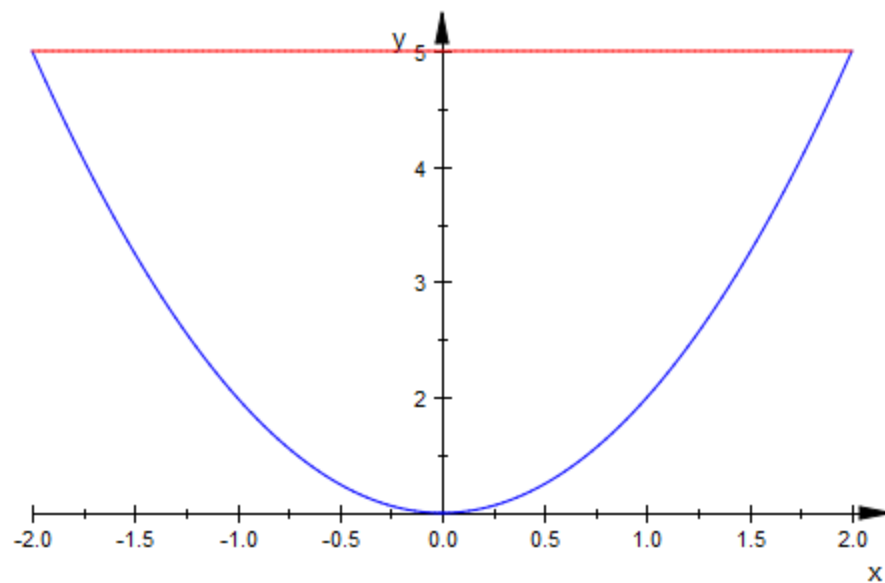
a. Trục Oy

b. Đt $y=5$

a. Quay quanh trục Oy:

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^2 |x| (5 - (x^2 + 1)) dx \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

b. Quay quanh đt $y=5$



Ta đổi hệ trục tọa độ để trục quay trùng với 1 trong 2 trục tọa độ

$$V_X = \pi \int_0^2 (X^2 - 4)^2 dX = \frac{256}{15} \pi$$

Ứng dụng của tích phân – Diện tích mặt tròn xoay

Phần đường cong $y=f(x)$ với $a \leq x \leq b$ quay quanh trục Ox sẽ tạo thành 1 mặt cong.

$$S = 2\pi \int_a^b y dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

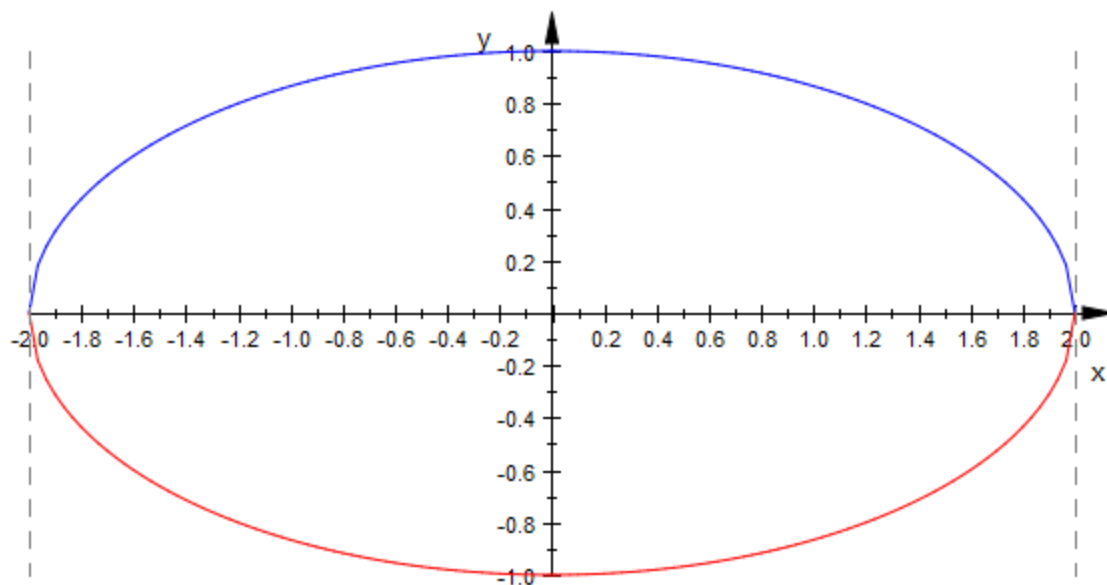
Khi quay quanh trục Oy , ta đổi vai trò của x và y bằng cách tính $x=x(y)$ từ pt $y=f(x)$

Ứng dụng của tích phân – Diện tích mặt tròn xoay

Ví dụ: Tính dt mặt tròn xoay tạo ra khi quay ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{quanh trục Ox}$$

Đường ellipse cũng nhận Ox là trục đối xứng nên ta cũng chỉ cần lấy nửa phía trên hoặc dưới quay như khi tính thể tích vật thể tròn xoay



Ứng dụng của tích phân – Diện tích mặt tròn xoay

Áp dụng công thức trên cho nửa trên ellipse tức là đường cong :

$$y = \sqrt{1 - x^2 / 4}, -2 \leq x \leq 2$$

$$S_x = 2\pi \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \frac{\sqrt{16 - 3x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \pi \int_{-2}^2 \sqrt{16 - 3x^2} dx$$

$$= 2\pi + \frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$$

Ứng dụng của tích phân – Diện tích mặt tròn xoay

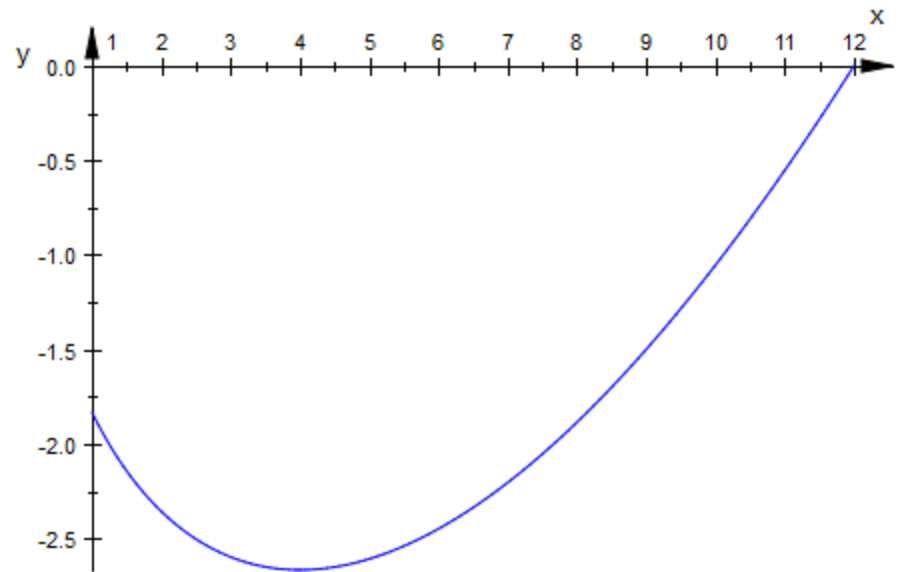
Ví dụ: Tính dt mặt tròn xoay tạo ra khi quay cung

$$y = \frac{\sqrt{x}}{6}(x - 12), 1 \leq x \leq 12 \quad \text{quanh trục Ox}$$

$$y' = \frac{x - 12}{12\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{6} = \frac{3x - 12}{12\sqrt{x}}$$

$$S_x = 2\pi \int_1^{12} \frac{x - 4}{4\sqrt{x}} \frac{x + 4}{4\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{143}{32} - \ln 12 \right)$$

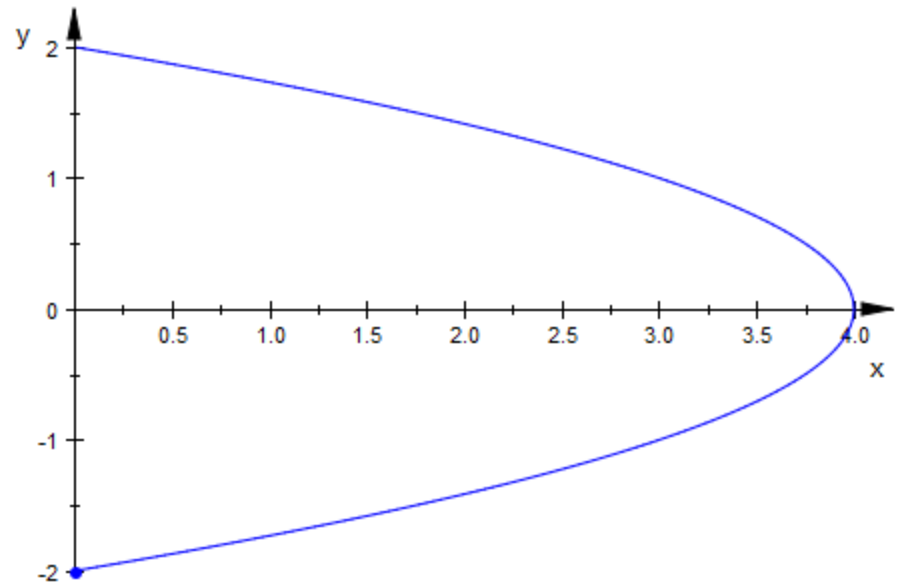


Ứng dụng của tích phân – Diện tích mặt tròn xoay

Ví dụ: Tính dt mặt tròn xoay tạo ra khi quay cung

$$x = 4 - y^2, -2 \leq y \leq 2 \quad \text{quanh trục Oy}$$

$$\begin{aligned} S_y &= 2\pi \int_{-2}^2 x \sqrt{1 + x'^2} dy \\ &= \frac{\pi}{16} (65 \ln \sqrt{17} + 124 \sqrt{17}) \end{aligned}$$



Ứng dụng của tích phân – Độ dài cung

Cho phần đường cong $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$. Độ dài phần này là

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ví dụ: Tính độ dài phần parabol $y=x^2$ nằm dưới đt $y=1$

Phần parabol nằm dưới đt $y=1$ ứng với $-1 \leq x \leq 1$

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{2} + \sqrt{5}$$

Ứng dụng của tích phân – Độ dài cung

Ví dụ: Tính độ dài phần đường cong nằm trong parabol $y^2 = 2x$, với $x \leq 1$

$$2x = \frac{8(x-1)^2}{27} \Leftrightarrow x = \frac{35 \pm 3\sqrt{129}}{8}$$

$$y = \frac{2\sqrt{2}(1-x)}{3\sqrt{3}}$$

$$L = 2 \int_{\frac{35-3\sqrt{129}}{8}}^1 \sqrt{\frac{35}{27}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{35}{27}} \frac{3\sqrt{129} - 27}{4}$$

