Chương 1
ĐẠI CƯƠNG VỀ XÁC SUẤT

1.1. BỔ TÚC VỀ GIẢI TÍCH TỔ HỢP

1. Quy tắc cộng và quy tắc nhân

1- Quy tắc cộng

Nếu một công việc được chia ra k trường hợp để thực hiện, trường hợp 1 có n1 cách thực hiện xong công việc, trường hợp 2 có n2 cách thực hiện xong công việc, ..., trường hợp k có nk cách thực hiện xong công việc và không có bất kỳ một cách thực hiện nào ở trường hợp này lại trùng với một cách thực hiện ở trường hợp khác, thì có n1 + n2 + ... + nk cách thực hiện xong công việc.

Ví dụ 1.1. Có bao nhiêu số có ba chữ số có tổng các chữ số bằng 4?

Giải. Số cần tìm có dạng

- Trường hợp a = 4: có một số (400)
- Trường hợp a = 3: có hai số (310, 301)
- Trường hợp a = 2: có ba số (220, 211, 202)
- Trường hợp a = 1: có bốn số (130, 121, 112, 103)

Vậy theo quy tắc cộng, có 1 + 2 + 3 + 4 = 10 số thỏa mãn bài toán.

2- Quy tắc nhân

Nếu một công việc chia ra k giai đoạn, giai đoạn 1 có n1 cách thực hiện, giai đoạn 2 có n2 cách thực hiện, ..., giai đoạn k có nk cách thực hiện, thì có n1.n2 ... nk cách thực hiện xong công việc.

Ví dụ 1.2. Một thiết bị được tạo bởi ba bộ phận. Bộ phận 1 có 10 loại, bộ phận 2 có sáu loại, bộ phận 3 có hai loại. Hỏi thiết bị trên có bao nhiêu loại?

Giải. Ta chia quá trình chế tạo thiết bị ra ba giai đoạn:

- Chọn bộ phận 1: có 10 cách
- Chọn bộ phận 2: có sáu cách
- Chọn bộ phận 3: có hai cách

Vậy theo quy tắc nhân, có 10.6.2 = 120 loại thiết bị.

2. Chỉnh hợp

Một chỉnh hợp chập k từ n phần tử là một bộ có kể thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Số các chỉnh hợp chập k từ n phần tử ký hiệu là A_n^k.

Công thức tính:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ 1.3. Một lớp học có 50 sinh viên. Có bao nhiêu cách lập một ban cán sự lớp gồm một lớp trưởng, một lớp phó học tập, một lớp phó đời sống?

Giải. Mỗi cách chọn ban cán sự tương ứng với một cách chọn ba phần tử khác nhau có kể thứ tự từ 50 phần tử. Do đó số cách chọn là:

$$A_{50}^3 = 50.49.48 = 117600$$

3. Chỉnh hợp lặp

Một chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử là một bộ có kể thứ tự gồm k phần tử không cần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Số các chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử ký hiệu là $\overline{A}_n^k$

Công thức tính:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Ví dụ 1.4. Có bao nhiêu cách để tám người lên năm toa tàu?

Giải. Mỗi cách để tám người lên tàu tương ứng với một cách chọn tám phần tử có kể thứ tự không cần khác nhau từ năm phần tử. Do đó số cách lên tàu là:

$$\overline{A}_5^8 = 5^8 = 390625$$

4. Hoán vị

Một hoán vị từ n phần tử là một bộ có kể thứ tự gồm n phần tử khác nhau đã cho.

Số các hoán vị từ n phần tử ký hiệu là Pn.

Công thức tính: Pn = n!

Ví dụ 1.5. Một tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách sắp tổ này đứng thành một hàng dọc?

Giải. Mỗi cách đứng thành một hàng dọc tương ứng với một hoán vị từ 10 phần tử. Do đó số cách đứng thành một hàng dọc là:

P10 = 10! = 3628800

5. Tổ hợp

Một tổ hợp chập k từ n phần tử là một tập con gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho.

Số tổ hợp chập k từ n phần tử ký hiệu là C_n^k.

Công thức tính :

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = \overline{0,n})$$

Ví dụ 1.6. Một lớp có 50 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ba người trực lớp?

Giải. Mỗi cách chọn ba người trực lớp tương ứng với một cách chọn một tập con có ba phần tử từ 50 phần tử. Do đó số cách chọn là:

$$C_{50}^3 = \frac{50.49.48}{3!} = 19600$$

6. Công thức nhị thức Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=o}^{n} C_n^k x^k = C_n^o + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

Ví dụ 1.7. Chứng minh

a) $C_n^o + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

b) $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + \ldots + n.C_n^n = n2^{n-1}$

Giải. a) Nhận được từ đẳng thức (*) bằng cách cho x = 1

b) Lấy đạo hàm hai vế của (*) theo x

$$n(1+x)^{n-1} = 1.C_n^1 + 2.C_n^2 x + \ldots + nC_n^n x^{n-1}$$

Cho x = 1 ta có đẳng thức cần chứng minh.

1.2. BIẾN CỐ VÀ QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

1- Phép thử ngẫu nhiên. Biến cố

Phép thử ngẫu nhiên là sự thực hiện những điều kiện đã đặt ra để nghiên cứu một hiện tượng ngẫu nhiên nào đó.

Mỗi kết quả của phép thử gọi là một biến cố.

Ví dụ 1.8. a) Để nghiên cứu hiện tượng ngẫu nhiên về sự xuất hiện sấp hay ngửa khi tung một đồng tiền, ta tiến hành phép thử : tung một đồng tiền. Kết quả nhận được sẽ là S (được mặt sấp) hoặc là N (được mặt ngửa) S và N là những biến cố

b) Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp, ta được các biến cố A: sinh viên đó là nữ; B: sinh viên đó là nam; C: sinh viên đó là sinh viên giỏi...

2- Các loại biến cố

Biến cố được chia thành các loại sau:

- Biến cố trống (hay biến cố không thể có): là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử thực hiện, ký hiệu là Φ.

- Biến cố chắc chắn: là biến cố luôn luôn xảy ra khi phép thử thực hiện, ký hiệu là Ω

- Biến cố ngẫu nhiên: là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra tuỳ thuộc vào từng phép thử.

Ví dụ 1.9. Trong ví dụ 1.8a, nếu đồng tiền có cả hai mặt đều ngửa, thì S là biến cố trống, N là biến cố chắc chắn.

Trong ví dụ 1.8b, nếu lớp học đó không có nam thì A là biến cố chắc chắn, B là biến cố trống.

Nói chung, các biến cố trong ví dụ 1.8 là biến cố ngẫu nhiên.

3- Biến cố bằng nhau

Biến cố A gọi là kéo theo biến cố B nếu A xảy ra thì B xảy ra, ký hiệu là $A \subset B$.

Nếu đồng thời có $A \subset B$ và $B \subset A$ thì các biến cố A và B gọi là bằng nhau, ký hiệu là A = B.

Ví dụ 1.10. Tung một con xúc xắc. Gọi Ai là biến cố được i nút (i =1,6), B là biến cố được số nút chia hết cho 3, C là biến cố được số nút chẵn, P2 là biến cố được số nút nguyên tố chẵn. Khi đó ta có:

$$A_2 \subset C \quad , A_3 \subset B$$

$$A_2 \subset P_2 , \quad P_2 \subset A_2 \quad , \quad A_2 = P_2$$

Từ các định nghĩa, với mọi biến cố A ta có:

$$A \subset \Omega \; , \quad \Phi \subset A$$

Do các quan hệ này nên ta có: các biến cố trống đều bằng nhau và các biến cố chắc chắn đều bằng nhau.

4- Các phép toán trên biến cố

Cho hai biến cố A và B. Khi đó ta gọi:

Tổng của A và B, hay A cộng B, là biến cố xảy ra khi A xảy ra hoặc B xảy ra, ký hiệu A + B.

Hiệu của A và B, hay A trừ B, là biến cố xảy ra nếu A xảy ra nhưng B không xảy ra, ký hiệu A – B.

Tích của A và B, hay A nhân B, là biến cố xảy ra nếu A và B đồng thời xảy ra, ký hiệu A.B hoặc AB.

Cho một biến cố A. Khi đó ta gọi đối lập của A là biến cố xảy ra nếu A không xảy ra và không xảy ra nếu A xảy ra, ký hiệu $\overline{A}$.

Với các biến cố A, B, C tuỳ ý ta có các biến cố sau:

1- A + B = B + A, A.B = B.A

2- (A + B) + C = A + (B + C), (A.B).C = A.(B.C)

3- A(B + C) = A.B + A.C, A + (B.C) = (A + B).(A + C)

4- A – (B + C) = (A – B).(A – C), A – (B.C) = (A – B) + (A – C)

5- $A \subset B$ thì A + B = B, A.B = A

6- $A = A$

7- $A + \overline{A} = \Omega$, $A.\overline{A} = \Phi$

Vì $A \subset A$, $\Phi \subset A$ và $A \subset \Omega$ nên theo 5- ta có:

A + A = A, A.A = A

A + Φ = A, A. $= \Phi$

A + Ω Ω

Vì $\overline{A} = \Omega - A$ nên theo 4- ta có:

8- $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$, $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$ (quy tắc đối ngẫu)

Với các biến cố A1, A2, ..., An ta có:

A1 + A2 + ... + An

là biến cố xảy ra khi có ít nhất một biến cố Ai xảy ra ($i = \overline{1, n}$)

A1.A2 ... An

là biến cố xảy ra khi tất cả các Ai đều xảy ra ($i = \overline{1, n}$)

$$\overline{A_1 + A_2 \ldots A_n} = \overline{A}_1 . \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$$

$$\overline{A_1 . A_2 \ldots A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n$$

Ví dụ 1.11. Với các ký hiệu như trong ví dụ 1.10 ta có:

A3 + A6 = B, A2 + A4 + A6 = C

Ai.Aj = với mọi $i \neq j$

B.C = A6

C – B = A2 + A4, C – A6 = A2 + A4

Ví dụ 1.12. Bắn ba phát vào bia. Gọi Ai là biến cố phát thứ i trúng ($i = \overline{1,3}$). Hãy biểu diễn qua A1, A2, A3 các biến cố:

A: cả ba phát đều trúng

B: có ít nhất một phát trúng

C: có một (và chỉ một) phát trúng

D: có nhiều nhất hai phát trúng.

Giải. Ta có:

$$A = A1A2A3$$

$$B = A1 + A2 + A3 = \overline{\overline{A}_1 . \overline{A}_2 . \overline{A}_3}$$

$$C = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$$

$$D = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 = \overline{A_1 A_2 A_3}$$

5- Nhóm đầy đủ các biến cố

Hai biến cố A và B gọi là *xung khắc* nếu $A.B = \Phi$.

Các biến cố A1, A2, ..., An gọi là *đôi một xung khắc* nếu hai biến cố khác nhau bất kỳ trong đó đều xung khắc, tức là:

$$Ai . Aj = \Phi \text{ với mọi } i \neq j$$

Các biến cố A1, A2, ..., An gọi là một *nhóm đầy đủ các biến cố* nếu chúng đôi một xung khắc và ít nhất một trong chúng chắc chắn xảy ra, tức là:

$$\begin{cases} A_i . A_j = \Phi \text{ với mọi } i \neq j \\ A_1 + A_2 + \ldots + A_N = \Omega \end{cases}$$

Ví dụ 1.13. a) A1, A2, A3, A4, A5, A6 trong ví dụ 1.10 là một nhóm đầy đủ các biến cố.

b) Với mọi biến cố A, hai biến cố $A, \overline{A}$ là một nhóm đầy đủ các biến cố.

1.3. ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

1. Các định nghĩa xác suất

1- Định nghĩa cổ điển

Ta gọi các trường hợp *đồng khả năng* là các trường hợp mà khả năng xảy ra của chúng ngang bằng nhau.

Ta gọi một trường hợp là *thuận lợi* cho biến cố A nếu trường hợp này xảy ra thì A xảy ra.

Ví dụ 1.14. Tung một con xúc xắc (cân đối, đồng chất) thì được 1 nút, 2 nút, ..., 6 nút là đồng khả năng; được 1 nút và được số nút lẻ là không đồng khả năng; được 1 nút là thuận lợi cho được số nút lẻ.

Định nghĩa 1.1. Giả sử phép thử có n trường hợp đồng khả năng, trong số đó có m trường hợp thuận lợi cho biến cố A. Khi đó ta gọi xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Như vậy, xác suất của biến cố A là tỷ số về khả năng biến cố xuất hiện.

Ví dụ 1.15. a) Tung một đồng tiền cân đối, đồng chất.

Gọi S là biến cố được mặt sấp, N là biến cố được mặt ngửa. Ta có:

$$P(S) = \frac{1}{2}, \quad P(N) = \frac{1}{2}$$

b) Tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất, với ký hiệu như trong ví dụ 1.10, ta có:

$$P(A1) = P(A2) = \ldots P(A6) = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 1.16. Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 10 nữ. Chọn ngẫu nhiên ba người trực lớp. Tính xác suất của biến cố A: trong ba người được chọn có đúng một người nữ.

Giải. Số trường hợp đồng khả năng: chọn ba người từ 30 người là . Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $C_{10}^{1}.C_{20}^{2}$. Từ đó xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{C_{10}^{1}.C_{20}^{2}}{C_{30}^{3}} = \frac{95}{203}$$

2- Định nghĩa hình học

Ta gọi độ đo của một tập trên một đường là độ dài, trong một mặt là diện tích, trong không gian là thể tích của tập đó.

Trong mặt phẳng các tập nằm trên một đường có độ đo bằng 0, trong không gian các tập nằm trên một mặt có độ đo bằng 0.

Định nghĩa 1.2. Giả sử các trường hợp đồng khả năng đặt tương ứng với các điểm tạo thành một tập có độ đo M, các trường hợp thuận lợi cho biến cố A tương ứng với các điểm tạo thành một tập có độ đo m. Khi đó ta gọi xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{m}{M}$$

Ví dụ 1.17. (Bài toán gặp gỡ). Hai người bạn hẹn gặp nhau tại một địa điểm theo quy ước như sau:

- Mỗi người độc lập đến điểm hẹn trong khoảng từ 7 giờ đến 8 giờ
- Mỗi người đến nếu không gặp người kia thì đợi 30 phút hoặc đến 8 giờ thì không đợi nữa

Tính xác suất hai người gặp nhau.

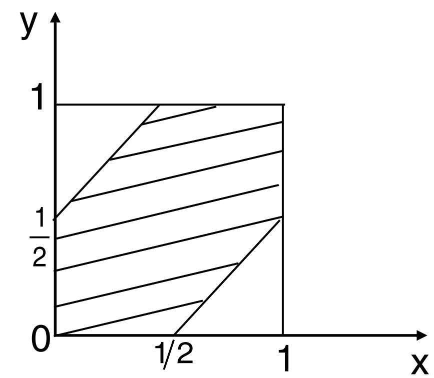
Giải. Gọi 7 + x, 7 + y là thời điểm mà hai người này đến điểm hẹn, $0 \le x, y \le 1$ Các trường hợp đồng khả năng tương ứng với các điểm (x,y) tạo thành hình vuông có cạnh bằng 1, có diện tích (độ đo) bằng 1.

Các trường hợp thuận lợi cho biến cố A (hai người gặp nhau) tương ứng với các điểm (x,y) thỏa mãn:

$$|x - y| \le \frac{1}{2}$$

Các điểm này tạo thành hình có gạch chéo trong hình vẽ. Diện tích hình này là:

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$



từ đó: $P(A)=\frac{3/4}{1}=\frac{3}{4}$

3- Định nghĩa thống kê

Giả sử trong n phép thử với điều kiện như nhau biến cố A xuất hiện k lần. Khi đó ta gọi:

$$f_n(A)=\frac{k}{n}$$

là tần suất xuất hiện biến cố A trong n phép thử.

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} f_n(A)$$

Theo định lý Bernoulli (định lý 4.15 chương 4), giới hạn này luôn tồn tại. Trong thực tế người ta thường lấy:

$$P(A)\approx f_n(A)$$

với n khá lớn.

Ví dụ 1.18. Theo dõi mỗi 10.000 bé mới sinh, thấy có 5097 bé trai. Ta có xác suất sinh con trai là gần bằng:

$$p = \frac{5097}{10000} = 0{,}5097$$

4- Định nghĩa xác suất theo tiên đề

Xác suất của một biến cố A dù định nghĩa theo cổ điển, hình học hay thống kê đều có ba tính chất sau đây:

(i) $0 \le P(A) \le 1$ với mọi biến cố A

(ii) $P(\Omega) = 1,\ P(\Phi) = 0$

(iii) Nếu A và B xung khắc thì: P(A + B) = P(A) + P(B).

Từ đó ta có thể đưa ra định nghĩa xác suất theo phương pháp tiên đề nhằm thống nhất các định nghĩa (định nghĩa cổ điển, định nghĩa hình học và định nghĩa thống kê).

Định nghĩa 1.3. Ký hiệu A là tập hợp các biến cố trong một phép thử. Ta gọi xác suất là một quy tắc đặt mỗi A với một số P(A) thỏa mãn các tiên đề:

(I) $0 \le P(A) \le 1,\ A \in \mathcal{A}$

(II) $P(\Omega) = 1,\ P(\Phi) = 0$

(III) Với mọi dãy biến cố đôi một xung khắc (An) A

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Bởi vì (I) – (III) (i) – (iii) nên mọi xác suất đều có các tính chất (i) – (iii). Nếu A hữu hạn thì (i) – (iii) (I) – (III). Do đó trong trường hợp này, có thể dùng (i) – (iii) thay cho (I) – (III) trong định nghĩa xác suất.

2. Xác suất của biến cố đối lập

Định lý 1.1. Với mọi biến cố A ta có:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Chứng minh. Theo (iii) và (i):

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

$$P(A + \overline{A}) = P(\overline{A}) = 1$$

do đó: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

3. Định lý cộng xác suất

Theo (iii) ta có định lý cộng trong trường hợp các biến cố đôi một xung khắc.

Định lý 1.2. Nếu A1, A2, ..., An là các biến cố đôi một xung khắc thì:

$$P(A1 + A2 + ... + An) = P(A1) + P(A2) + ... + P(An)$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý trong trường hợp tổng quát.

Định lý 1.3. Với các biến cố tuỳ ý A và B ta có:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$$

Chứng minh. Vì $BA \subset A$ nên theo tính chất 5- mục 4 phần 1.2:

$$A + BA = A$$

từ đó: $A + B = A + B(A + \overline{A}) = A + BA + B\overline{A} = A + B\overline{A}$

Do A và B xung khắc nên theo (iii):

$$P(A + B) = P(A) + P(B\overline{A}) \qquad (1.1)$$

tương tự: $B = B\overline{A} + BA$ nên

$$P(B) = P(B\overline{A}) + P(BA)$$

hay: $P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB) \qquad (1.2)$

từ (1.1) và (1.2) ta có:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$$

Áp dụng định lý 1.3 và bằng quy nạp ta có:

Định lý 1.3'. Cho A1, A2, ..., An là các biến cố bất kỳ, khi đó:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_iA_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

Ví dụ 1.19. Trong 50 học sinh của lớp có 20 giỏi văn, 25 giỏi toán, 10 giỏi cả văn và toán. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp. Tính xác suất học sinh này giỏi văn hoặc giỏi toán.

Giải. Gọi A và B lần lượt là biến cố học sinh được chọn giỏi văn và giỏi toán.

Khi đó A + B là biến cố học sinh được chọn giỏi văn hoặc giỏi toán. Theo định lý 1.3:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A.B)=\frac{20}{50}+\frac{25}{50}-\frac{10}{50}=0{,}7$$

1.4. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

1. Định nghĩa và công thức tính

Cho hai biến cố A và B. Ta gọi xác suất của biến cố A khi biến cố B đã xảy ra là xác suất của A với điều kiện B, ký hiệu là P(A/B).

Ví dụ 1.20. Với các ký hiệu như trong ví dụ 1.8, ta có:

$$P(A1/C) = 0\ ;\ P(A2/C) = \frac{1}{3}\quad ;\ P(B/C) = \frac{1}{3}$$

Định lý 1.4. $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp phép thử có n trường hợp đồng khả năng. Giả sử trong n trường hợp này có m trường hợp thuận lợi cho B, k trường hợp thuận lợi cho A.B. Vì B đã xảy ra nên số trường hợp đồng khả năng lúc này là m, số trường hợp thuận lợi cho A trong đó chính là số trường hợp thuận lợi cho AB, tức là k. Vì vậy:

$$P(A/B)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

2. Định lý nhân xác suất. Tính độc lập của các biến cố

Định lý 1.5. Với các biến cố tuỳ ý A và B, ta có:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

Chứng minh. Theo định lý 1.4:

$$P(AB) = P(B)P(A/B)$$

vì: $P(AB) = P(BA)$

nên ta cũng có: $P(AB) = P(A)P(B/A)$

Áp dụng định lý 1.5 và bằng quy nạp ta có:

Định lý 1.5'. P(A1A2...An) = P(A1)P(A2/A1)...P(A1/A1A2...An−1)

Bây giờ ta đưa ra điều kiện để xác suất của tích bằng tích của các xác suất.

Hai biến cố A và B gọi là *độc lập* nếu xác suất của biến cố này không phụ thuộc vào sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia, tức là:

$$P(A/B) = P(A) \text{ và } P(B/A) = P(B)$$

Chú ý rằng chỉ cần thỏa mãn một trong hai điều kiện này thì sẽ thỏa mãn điều kiện kia. Thật vậy, nếu P(A/B) = P(A) thì:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B).P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Các biến cố A1, A2, ..., An gọi là *độc lập toàn thể* nếu xác suất của mỗi biến cố trong đó không phụ thuộc vào sự xảy ra hay không xảy ra của một tổ hợp bất kỳ của các biến cố khác.

Từ định lý 1.5 và 1.5' ta có:

Định lý 1.6. Nếu A và B độc lập thì:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Nếu A1,A2, ..., An độc lập toàn thể thì:

$$P(A1,A2, ..., An) = P(A1)P(A2) ... P(An)$$

Chú ý rằng nếu A, B độc lập thì các cặp A,$\overline{B}$; $\overline{A}$, B; $\overline{A}$, $\overline{B}$ cùng độc lập. Tính độc lập toàn thể của nhiều biến cố cũng có tính chất tương tự.

Ví dụ 1.21. Có ba hộp bi, mỗi hộp bi có 10 bi. Trong hộp thứ i có i bi đỏ, 10 – i bi xanh ($i = \overline{1,3}$). Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một bi.

a) Tính xác suất cả ba bi lấy ra đều đỏ

b) Tính xác suất ba bi lấy ra có hai đỏ, một xanh

c) Biết ba bi lấy ra có hai đỏ, một xanh, tính xác suất bi lấy ra từ hộp thứ hai màu xanh.

Giải. Gọi Ai là biến cố bi lấy ra từ hộp i đỏ ($i = \overline{1,3}$). Ta nhận xét rằng A1, A2, A3 độc lập toàn thể.

a) Biến cố ba bi lấy ra đều đỏ là A1A2A3.

$$P(A1A2A3) = P(A1)P(A2)P(A3) = \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10} = 0{,}006$$

b) Biến cố ba bi lấy ra có hai đỏ, một xanh là:

$$F = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$$

vì F là tổng của ba biến cố đôi một xung khắc nên:

$$P(F) = P(A_1\ A_2\ \overline{A}_3) + P(A_1\ \overline{A}_2\ A_1) + P(\overline{A}_1\ A_2\ A_3)$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{3}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10} = 0{,}092$$

c) Ta cần tính $P(\overline{A}_2/F)$. Theo công thức tính xác xuất có điều kiện

$$P(\overline{A}_2/F) = \frac{P(\overline{A}_2.F)}{P(F)} = \frac{P(A_1\overline{A}_2A_3)}{P(F)} = \frac{0{,}24}{0{,}92} = \frac{6}{23}$$

Ví dụ 1.22. Một lô hàng 10 sản phẩm trong đó có ba phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từng sản phẩm ra kiểm tra đến khi gặp đủ ba phế phẩm thì dừng lại.

a) Tính xác suất dừng lại ở lần kiểm tra thứ ba

b) Tính xác suất dừng lại ở lần kiểm tra thứ tư

c) Biết đã dừng lại ở lần kiểm tra thứ tư, tính xác suất ở lần kiểm tra thứ hai gặp phế phẩm.

Giải. Gọi Ai là biến cố lần kiểm tra thứ i gặp phế phẩm $i=\overline{1,10}$.

a) Biến cố dừng lại ở lần kiểm tra thứ ba là A1 A2 A3:

P(A1 A2 A3) = P(A1)P(A2/A1)P(A3/A1 A2)

$$=\frac{3}{10}.\frac{2}{9}.\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$$

b) Biến cố dừng lại ở lần kiểm tra thứ tư là:

$$F = A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4$$

ta có: $P(A_1A_2\overline{A}_3A_4) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(\overline{A}_3/A_1A_2)P(A_4/A_1A_2\overline{A}_3)$

$$=\frac{3}{10}.\frac{2}{9}.\frac{7}{8}.\frac{1}{7}=\frac{1}{120}$$

tương tự ta cũng có:

P(A12A3A4) = P(1A2A3A4) = $\frac{1}{120}$

Vì F là tổng của ba biến cố đôi một xung khắc nên:

$$P(F)=3.\frac{1}{120}=\frac{1}{40}$$

c) Ta cần tính:

$$P(A_2/F) = \frac{P(A_2.F)}{P(F)} = \frac{P(A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_2A_3A_4)}{P(F)}$$

$$= \frac{2.\frac{1}{120}}{3.\frac{1}{120}} = \frac{2}{3}$$

3. Công thức xác suất đầy đủ. Công thức Bayès

Cho A1, A2, ..., An là một nhóm đầy đủ các biến cố (phần 1.2).

Định lý 1.7

a) Với mọi biến cố F ta có:

P(F) = P(A1).P(F/ A1) + P(A2).P(F/ A2) + ... + P(An).P(F/ An)

(công thức xác suất đầy đủ).

b) Với mỗi k ($k = \overline{1,n}$), ta có:

$$P(A_k / F) = \frac{P(A_k).P(F/A_k)}{P(F)} = \frac{P(A_k).P(F/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(F/A_i)}$$

(công thức Bayès).

Chứng minh

a) Ta có:

$$F = F.\Omega = F(A_1 + A_2 + ... + A_n)$$
$$= FA_1 + FA_2 + ... + FA_n$$

Vì $FA_1, FA_2, ..., FA_n$ đôi một xung khắc nên:

P(F) = P(F A1) + P(F A2) + ... + P(F An)

= P(A1).P(F/ A1) + P(A2).P(F/ A2) + ... + P(An).P(F/ An)

b) Theo định lý 1.4 và 1.5 ta có:

$$P(A_k / F) = \frac{P(A_k F)}{P(F)} = \frac{P(A_k).P(F / A_k)}{P(F)}$$

Ví dụ 1.23. Có 20 kiện hàng, mỗi kiện có 10 sản phẩm. Trong số đó có tám kiện loại 1, mỗi kiện có một phế phẩm; bảy kiện loại 2, mỗi kiện có ba phế phẩm; năm kiện loại 3, mỗi kiện có năm phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một kiện, rồi từ kiện lấy ngẫu nhiên một sản phẩm.

a) Tính xác suất sản phẩm lấy ra là phế phẩm

b) Biết sản phẩm lấy ra là phế phẩm, tính xác suất kiện lấy ra là loại 2.

Giải. Gọi Ai là biến cố kiện lấy ra thuộc loại i (). Khi đó A1, A2, A3 là một nhóm đầy đủ các biến cố. Gọi F là biến cố sản phẩm lấy ra từ kiện là phế phẩm.

a) Theo công thức xác suất đầy đủ:

P(F) = P(A1).P(F/ A1) + P(A2).P(F/ A2) + P(A3).P(F/ A3)

$$= \frac{8}{20}.\frac{1}{10}.+\frac{7}{20}.\frac{3}{10}+\frac{5}{20}.\frac{5}{10} = 0{,}27$$

b) Theo công thức Bayès:

$$P(A_2/F) = \frac{P(A_2).P(F/A_2)}{P(F)} = \frac{\frac{21}{200}}{\frac{54}{200}} = \frac{7}{8}$$

4. Dãy phép thử Bernoulli. Công thức Bernoulli

1- Công thức Bernoulli

Một dãy n phép thử gọi là một dãy n phép thử Bernoulli nếu:

- Các phép thử độc lập với nhau

- Trong mỗi phép thử xác suất của biến cố A mà ta quan tâm có xác suất P(A) = p không đổi.

Xác suất p gọi là xác suất thành công, số lần A xuất hiện trong n phép thử gọi là số lần thành công trong dãy phép thử Bernoulli.

Ký hiệu Pn(k) = Pn(k,p) là xác suất để có k lần thành công;
q = 1 – p.

Định lý 1.8. $P_n(k,p) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = \overline{0,n}$ (công thức Bernoulli).

Chứng minh. Ký hiệu Ai là biến cố phép thử thứ i thành công (). Gọi F là biến cố có k lần thành công thì F là tổng của biến cố đôi một xung khắc có dạng:

$$A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k} \overline{A}_{i_{k+1}} \ldots \overline{A}_{i_n}$$

trong đó: $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$

Do tính độc lập nên:

$$P(A_{i_1} \ldots A_{i_k} \overline{A}_{i_{k+1}} \ldots \overline{A}_{i_n}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k}) P(\overline{A}_{i_{k+1}}) \ldots P(\overline{A}_{i_n})$$

$$= p^k (1-p)^{n-k}$$

từ đó:

- $$P_n(k,p) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Ký hiệu Pn(k1,k2) là xác suất để có từ k1 đến k2 lần thành công trong dãy n phép thử Bernoulli. Theo công thức Bernoulli ta có:

$$P_n(k_1k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

Nhận xét. Trong mục 4.4 cho ta cách tính gần đúng Pn(k) và Pn(k1,k2).

Ví dụ 1.24. Hàng trong kho có 20% phế phẩm.

a) Lấy ngẫu nhiên năm phế phẩm. Tính xác suất trong năm sản phẩm này: 1) Có hai phế phẩm

2) Có ít nhất một phế phẩm

b) Cần lấy ít nhất bao nhiêu sản phẩm để xác suất có ít nhất một phế phẩm không nhỏ hơn 0,99?

Giải. a) Số phế phẩm trong năm sản phẩm lấy ra là số lần thành công trong dãy năm phép thử Bernoulli với xác suất thành công p = 0,2.

1) $P_5(2) = C_5^2(0,2)^2.(0,8)^3 = 0,2048$

2) $P_5(1,5) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0(0,2)^0(0,8)^5$

$$= 1 - (0,8)^5 = 0,67232$$

b) Gọi n là số sản phẩm cần lấy ra. Khi đó xác suất có ít nhất một phế phẩm là:

$$P_n(1,n)=1-P_n(0)=1-(0,8)^n$$

Ta cần tìm n nhỏ nhất để:

$$1-(0,8)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow (0,8)^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}=20,64$$

Vậy ít nhất phải lấy ra n = 21 sản phẩm.

2- Số có khả năng nhất

Trong dãy n phép thử Bernoulli, số m có xác suất Pn(m) lớn nhất gọi là số có khả năng nhất.

Định lý 1.9. Số có khả năng nhất bằng [np – q] hoặc [np – q] + 1.

Chứng minh. Ta có:

$$P_n(m) \leq P_n(m+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad C_n^m p^m q^{n-m} \leq C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n!}{m!(n-m)!} q \leq \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} p$$

$$\Leftrightarrow \quad (m+1)q \le (n-m)p$$

$$\Leftrightarrow \quad m \le np - q$$

vì vậy nếu: $m \le [np-q]$ thì $P_n(m) \le P_n(m+1)$

$$m \ge [np-q]+1 \text{ thì } P_n(m) \ge P_n(m+1)$$

Do đó, số có khả năng nhất là:

[np – q] hoặc [np –q] + 1

Ví dụ 1.25. Tung một con xúc xắc 500 lần. Số mặt 6 nút có khả năng xuất hiện nhất là bao nhiêu?

Giải. Số mặt 6 nút xuất hiện là số lần thành công trong dãy 500 phép thử Bernoulli với xác suất thành công p = $1/6$. Theo định lý 1.9, số có khả năng nhất là:

$$[500.\frac{1}{6} - \frac{5}{6}] = [82,5] = 82 \text{ hoặc } 82 + 1 = 83$$

BÀI TẬP

1.1. a) Có bao nhiêu số điện thoại gồm bảy chữ số, số đầu khác 0 và khác 1?

b) Có bao nhiêu số điện thoại gồm bảy chữ số, số đầu khác 0, khác 1 và tổng của bảy chữ số đó là số chẵn?

c) Có bao nhiêu số điện thoại gồm bảy chữ số, số đầu khác 0, khác 1 và bảy chữ số đôi một khác nhau?

1.2. a) Có bao nhiêu số chẵn gồm sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ?

b) Có bao nhiêu số chẵn gồm sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó có đúng ba chữ số lẻ và ba chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác 0)?

1.3. a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm sáu chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0), trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bảy chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0), biết rằng chữ số 2 có mặt đúng hai lần, chữ số 3 có mặt đúng ba lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

1.4. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm sáu ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho sáu học sinh trường A và sáu học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bất cứ hai học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau

b) Bất cứ hai học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

1.5. Có bao nhiêu cách xếp 10 người ngồi thành hàng ngang sao cho A và B ngồi cạnh nhau, còn C và D thì không ngồi cạnh nhau?

1.6. Một loại biển số xe gồm một số kí hiệu và bốn chữ số sau cùng (ví dụ như 50AB, 3507; 60NN, 0369; ...). Hỏi có thể có:

a) Bao nhiêu biển số xe cùng một loại?

b) Bao nhiêu biển số xe cùng loại mà có bốn số sau cùng đều khác nhau?

1.7. Để lập 700 bảng đăng ký, mỗi bảng gồm ba ký số, cần phải dùng ít nhất bao nhiêu chữ số nếu:

a) Các chữ số có thể trùng nhau trong một bảng?

b) Các chữ số không thể trùng nhau trong một bảng?

1.8. Có bao nhiêu trường hợp ta nhận được các số khác nhau khi tung cùng một lúc:

a) Hai xúc xắc?

b) Ba xúc xắc?

1.9. Cho P(x,y,z) là điểm trong không gian ba chiều với các tọa độ nguyên dương chỉ gồm một chữ số. Hỏi:

a) Có bao nhiêu điểm như vậy?

b) Có thể lấy một hệ gồm nhiều nhất mấy điểm như vậy sao cho không có bất cứ hai điểm nào cùng nằm trong một mặt phẳng vuông góc với trục Ox?

c) Có bao nhiêu hệ gồm một số điểm như vậy mà trong mỗi hệ không có bất cứ hai điểm nào cùng nằm trong một mặt phẳng vuông góc với trục Ox?

1.10. Trên mặt phẳng có 10 điểm, trong đó có bốn điểm thẳng hàng, ngoài ra không có bất cứ ba điểm nào nữa thẳng hàng. Có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh tại các điểm đã cho?

1.11. Tính tổng:

a)

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k$$

b) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n$

c) $\sum_{i=0}^{n}\left(C_n^i\right)^2$

1.12. Một lô 20 bóng đèn, trong đó có sáu bóng 110V và 14 bóng 220V. Hỏi:

a) Có mấy cách lấy một lúc bốn bóng đèn từ lô ra?

b) Có mấy cách lấy một lúc bốn bóng đèn sao cho trong đó có hai bóng 110V?

c) Có mấy cách lấy một lúc bốn bóng đèn sao cho trong đó có ít nhất hai bóng 110V?

1.13. Có bao nhiêu cách sắp xếp 15 cuốn sách khác nhau vào ba ngăn kéo sao cho ngăn thứ nhất có sáu cuốn, ngăn thứ hai có bảy cuốn?

1.14. Có bao nhiêu người tham gia vào cuộc đấu cờ, nếu biết rằng cuộc đấu đó có tất cả 10 ván cờ và mỗi đấu thủ phải đấu với mỗi đấu thủ khác một ván?

1.15. Giải các phương trình:

a) $A_{(x-2)}^{2} + C_{2}^{(x-2)} = 101$

b) $\dfrac{C_1^x}{C_x^2} = 1$

c) $C_{(n+1)}^{(m+1)} : C_{(n+1)}^{m} : C_{(n+1)}^{(m-1)} = 5:5:3$, theo các biến m, n.

1.16. Trong một ngăn buồng trên xe lửa có hai dãy ghế đối mặt nhau, mỗi dãy có năm chỗ ngồi có đánh số. Trong số 10 hành khách vào ngăn đó có bốn người muốn quay mặt về hướng tàu đi, ba người muốn quay mặt về hướng ngược lại. Hỏi có thể có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho họ sao cho các yêu cầu trên đều được thỏa?

1.17. Mô tả biến cố đối lập của các biến cố sau:

a) Hai mặt hình lật lên khi tung hai đồng tiền kim loại

b) Được bi trắng khi rút một bi từ hộp gồm hai bi trắng, ba bi đen và bốn bi đỏ

c) Khi bắn ba phát thì trúng cả ba

d) Ít nhất một phát trúng khi bắn năm phát

e) Trúng không quá hai phát khi bắn năm phát

f) Đấu thủ thứ nhất thắng trong một ván cờ vua.

1.18. Bắn ba phát vào bia. Gọi Ai là phát thứ i trúng (i = 1, 2, 3). Biểu diễn các biến cố sau qua các Ai và các biến cố đối lập của chúng:

a) Cả ba phát đều trúng

b) Cả ba phát đều trật

c) Ít nhất một phát trúng

d) Ít nhất một phát trật

e) Không ít hơn hai phát trúng

f) Không quá một phát trúng

g) Trúng không sớm hơn phát thứ ba.

1.19. Một lớp học có 36 học sinh, trong đó có một nửa là nam, một nửa là nữ được chia đôi một cách ngẫu nhiên ra thành hai nửa: nửa 1 và nửa 2. Tìm xác suất để trong mỗi nửa số nam và số nữ bằng nhau.

1.20. Một nhà có 10 lầu, bảy người vào thang máy ở tầng trệt. Tìm xác suất để mỗi người lên một lầu (coi rằng mỗi người lên một lầu độc lập với nhau).

1.21. Lấy ngẫu nhiên một số điện thoại gồm bảy chữ số, số đầu khác 0 và khác 1.

a) Tìm xác suất để được bảy chữ số đó đều khác nhau

b) Tìm xác suất để số điện thoại đó chia hết cho 5

c) Tìm xác suất để tổng của bảy chữ số đó là một số lẻ.

1.22. Có một lô bóng đèn màu gồm 36 bóng, trong đó có bốn bóng màu xanh. Lấy ngẫu nhiên lần lượt, không hoàn lại hai bóng. Tìm xác suất sao cho:

a) Lần thứ 2 lấy được bóng màu xanh, nếu chưa biết lần thứ nhất bóng màu gì

b) Lần thứ 2 lấy được bóng màu xanh, nếu lần thứ nhất lấy được bóng màu xanh.

1.23. Một hệ thống phục vụ có bốn máy tự động. Xác suất để trong một ngày làm việc, máy thứ nhất cần người đứng máy là 0,7; máy thứ hai là 0,8; máy thứ ba là 0,9; máy thứ tư là 0,85. Tìm xác suất để trong một ngày làm việc:

a) Cả bốn máy cần người đứng

b) Cả bốn máy không cần người đứng

c) Ít nhất một máy cần người đứng

d) Ít nhất một máy không cần người đứng.

1.24. Trong một hộp có M bi trắng và N-M bi đen. Rút ngẫu nhiên n viên bi theo cách rút có hoàn lại (mỗi lần rút một bi xem nó màu gì, ghi lại rồi trả vào hộp). Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Lần rút thứ k được bi trắng

b) Lần rút thứ k và thứ m đều được các viên bi trắng

c) Tròn n lần rút được đúng i viên bi trắng.

1.25. Trong mặt phẳng ta kẻ những đường thẳng song song cách đều nhau một khoảng 2a, gieo ngẫu nhiên một cây kim có độ dài bằng 2t ($t < a$) lên mặt phẳng ấy. Tìm xác suất để cây kim cắt một đường thẳng.

1.26. Chọn ngẫu nhiên một điểm A trên đoạn [0,1], tức là với cùng một khả năng như nhau A có thể là bất cứ điểm nào trong [0,1]. Điểm A chia đoạn [0,1] thành hai đoạn nhỏ: gọi T1 là độ dài đoạn ngắn hơn và T2 là độ dài đoạn dài hơn. Tìm $P(T1 < x)$ và $P(T2 < x)$ cho mọi số thực x.

1.27. Cho hình vuông mỗi cạnh dài một đơn vị. Lấy ngẫu nhiên một điểm A trong hình ấy, tức là với cùng một khả năng như nhau A có thể là bất cứ điểm nào trong hình vuông. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Khoảng cách từ A đến một cạnh hình vuông không quá x

b) Khoảng cách từ A đến cạnh gần nhất không quá x

c) Khoảng cách từ A đến tâm hình vuông không quá x

d) Khoảng cách từ A đến một đỉnh cố định của hình vuông không quá x.

1.28. Bỏ ngẫu nhiên năm lá thư vào năm phong bì đã đề địa chỉ trước. Tìm xác suất để:

a) Cả năm lá đều đúng người nhận

b) Lá thư thứ nhất đúng người nhận

c) Lá thư thứ nhất và lá thư thứ hai đúng người nhận

d) Chỉ một lá thư đúng người nhận.

1.29. Xếp ngẫu nhiên năm người lên bảy toa tàu được đánh số. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Năm người lên cùng một toa

b) Năm người lên năm toa đầu

c) Năm người lên năm toa khác nhau

d) A và B cùng lên toa đầu

e) A và B lên cùng toa

f) A và B lên cùng toa, ngoài ra không có ai khác lên toa này.

1.30. Cho một hộp bi cùng cỡ gồm ba bi xanh, bốn bi trắng và năm bi đỏ. Từ hộp rút ngẫu nhiên, lần lượt không hoàn lại từng bi cho đến khi được bi đỏ thì dừng lại. Tìm xác suất để:

a) Có hai bi trắng và một bi xanh được rút ra

b) Không có bi trắng nào được rút ra.

1.31. Bắn ba phát vào máy bay địch, phát thứ nhất trúng đích với xác suất 0,5; phát thứ hai trúng đích với xác suất 0,6 và phát thứ ba trúng đích với xác suất 0,8. Biết rằng khi bị trúng một phát, máy bay rơi với xác suất 0,3; khi bị trúng hai phát máy bay rơi với xác suất 0,6; khi bị trúng ba phát thì chắc chắn máy bay rơi. Tìm xác suất để máy bay rơi.

1.32. Có hai hộp, hộp 1 chứa hai bi trắng tám bi đen, hộp 2 chứa ba bi trắng hai bi đen. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một bi bỏ đi, sau đó số bi còn lại của hai hộp bỏ chung vào một hộp rỗng thứ ba. Từ hộp thứ ba lấy ngẫu nhiên ra một bi. Tìm xác suất để bi lấy được là trắng.

1.33. Có 12 cái hộp gồm

a) Sáu hộp thành phần A1: mỗi hộp chứa sáu bi trắng, bốn bi đen

b) Ba hộp thành phần A2: mỗi hộp chứa hai bi trắng, tám bi đen

c) Hai hộp thành phần A3: mỗi hộp chứa sáu bi trắng, bốn bi đen

d) Một hộp thành phần A4: chứa bốn bi trắng, sáu bi đen.

Lấy ngẫu nhiên một hộp rồi từ đó lấy ra một bi thì thấy được bi trắng. Tìm xác suất để bi đó được lấy ra từ hộp có thành phần A3.

1.34. Hai xạ thủ mỗi người bắn trúng một phát đạn vào bia, xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,9 và người thứ hai là 0,7. Tính các xác suất:

a) Có đúng một phát trúng

b) Cả hai phát đều trúng

c) Có ít nhất một phát trúng.

1.35. Có một chuyến tàu hỏa gồm n toa dừng bánh tại một ga. Có k hành khách mới lên tàu ($k \geq n$). Coi rằng mỗi người có thể lên một toa bất kỳ, hãy tính xác suất sao cho mỗi toa đều có hành khách mới ngồi.

1.36. Để sản xuất một loại sản phẩm, có thể dùng một trong hai máy. Tỉ lệ phế phẩm đối với máy thứ nhất là 0,03; đối với máy thứ hai là 0,02. Từ một kho gồm 2/3 sản phẩm của máy thứ nhất và 1/3 sản phẩm của máy thứ hai, người ta rút hú họa một sản phẩm. Tính xác suất sao cho sản phẩm đó không phải phế phẩm

1.37. Có hai lô chi tiết, một lô gồm 12 chiếc và lô kia gồm 10 chiếc, mỗi lô có một phế phẩm. Rút hú họa một chi tiết từ lô thứ nhất trộn vào lô thứ hai rồi tiếp đó từ lô thứ hai rút ra hú họa một chi tiết. Hãy tính xác suất để chiếc đó là phế phẩm.

1.38. Có một tin tức điện báo tạo thành từ các tín hiệu (.) và (-). Qua thống kê cho biết là do tạp âm, bình quân 2/5 tín hiệu (.) và 1/3 tín hiệu (-) bị méo. Biết rằng tỉ số các tín hiệu chấm và vạch trong tin truyền đi là 5 : 3. Tính xác suất sao cho nhận đúng tín hiệu đi nếu:

a) Nhận được (.)

b) Nhận được (-).

1.39. Trong số 18 xạ thủ, năm người bắn trúng đích với xác suất 0,8; bảy người bắn trúng đích với xác suất 0,7; bốn người bắn trúng đích với xác suất 0,6 và hai người bắn trúng đích với xác suất 0,5. Chọn hú họa một xạ thủ và cho anh ta bắn một phát, nhưng kết quả không trúng bia. Hỏi xạ thủ ấy có khả năng thuộc nhóm nào nhiều nhất?

1.40. Tỉ lệ người nghiện thuốc lá ở một vùng là 30%. Biết rằng tỉ lệ người bị viêm họng trong số những người nghiện là 60%, còn tỉ lệ người bị viêm họng trong số những người không nghiện là 10%.

a) Lấy ngẫu nhiên một người thấy rằng người ấy bị viêm họng. Tính xác suất người ấy nghiện thuốc

b) Nếu người đó không bị viêm họng, tính xác suất người đó nghiện thuốc.

1.41. Trong một thành phố nọ, người ta thống kê được như sau:

Số con trong gia đình (n)	0	1	2	3	4	5
Tỉ lệ phần trăm gia đình có n con (trong tổng số các gia đình)	15	20	30	20	10	5

Cho rằng xác suất để một trẻ sinh ra là trai hoặc gái đều là 0,5 và không phụ thuộc vào các trẻ khác

a) Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong thành phố đó. Tìm xác suất để gia đình đó có đúng hai con gái

b) Chọn ngẫu nhiên một đứa con trong số những đứa con của các gia đình ấy. Tìm xác suất để đứa con ấy thuộc gia đình có đúng 2 con gái như trong phần a).

1.42. Có hai hộp bi cùng cỡ, hộp 1 chứa bốn bi trắng và sáu bi xanh, hộp 2 chứa năm bi trắng và bảy bi xanh. Lấy ngẫu nhiên một hộp, từ hộp đó lấy ngẫu nhiên một bi thì được bi trắng. Tìm xác suất để viên bi tiếp theo, cũng lấy từ hộp trên ra, là bi trắng.

1.43. Xác suất để sản xuất ra một chi tiết điện tử loại tốt là 1/3. Tìm xác suất để trong một lô 15 chi tiết có:

a) Năm chi tiết loại tốt

b) Từ bốn đến bảy chi tiết loại tốt.

1.44. Từ một ngăn gồm 20 quả cầu trắng và hai quả cầu đen, người ta rút ra 10 lần, mỗi lần một quả đồng thời hoàn lại sau khi rút. Tính số lần chắc nhất xuất hiện một quả cầu đen và xác suất tương ứng.

1.45. Ở một đoạn đường phố trong một giây có một xe qua với xác suất p, không có xe nào qua với xác suất q = 1 – p, không phụ thuộc vào khoảng thời gian khác. Một người đi bộ muốn băng qua đường cần có ba giây không có xe nào đi ngang qua. Tìm xác suất để người đi bộ đứng ở lề đường phải chờ:

a) 3 giây

b) 4 giây

c) 5 giây.