Chương 2
ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN. VECTƠ NGẪU NHIÊN

2.1. ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

1- Định nghĩa và phân loại

Định nghĩa 2.1. Giả sử A1,A2, ..., An là một nhóm đầy đủ các biến cố. Khi đó có một quy tắc X đặt mỗi biến cố với Ai với một số xi () gọi là một đại lượng ngẫu nhiên. Đại lượng ngẫu nhiên còn gọi là biến ngẫu nhiên.

Đại lượng ngẫu nhiên theo định nghĩa trên gọi là đại lượng ngẫu nhiên dạng bậc thang. Đại lượng ngẫu nhiên tổng quát là giới hạn của một dãy các đại lượng ngẫu nhiên bậc thang.

Thông thường ta hiểu một cách nôm na, đại lượng ngẫu nhiên là đại lượng đặt tương ứng mỗi biến cố với một số, tuy nhiên giữa các số này có mối liên hệ chặt chẽ chứ không phải tuỳ ý.

Ví dụ 2.1

a) Tung một con xúc xắc. Gọi X là số nút xuất hiện. Khi đó X là đại lượng ngẫu nhiên. Tập giá trị của X là {1, 2, 3, 4, 5, 6} nên ta thường viết:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) Tung một đồng tiền cho đến khi được mặt ngửa thì dừng. Gọi X là số lần tung. Khi đó X là đại lượng ngẫu nhiên:

$$X = \{1, 2, ..., n, ...\}$$

Đại lượng ngẫu nhiên X có dạng:

$$X = \{x1, x2, ..., xn\}$$

hoặc: $X = \{x1, x2, ..., xn, ...\}$

với các giá trị rời nhau, gọi là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc.

Đại lượng ngẫu nhiên có miền giá trị lấp đầy một đoạn hay khoảng nào đó gọi là đại lượng ngẫu nhiên liên tục.

Ví dụ 2.2. Trọng lượng của một loại sản phẩm, mực nước biển tại một thời điểm là những ngẫu nhiên liên tục. **Ví dụ 2.2.** Trọng lượng của một loại sản phẩm, mực nước biển tại một thời điểm là những ngẫu nhiên liên tục.

2- Bảng phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Cho X = {x1, x2, ..., xn, ...} là một đại lượng ngẫu nhiên rời rạc. Đặt pi = P(X = xi). Khi đó ta được bảng sau đây, gọi là bảng phân phối xác suất của X:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Ví dụ 2.3. Gọi X là số nút xuất hiện khi tung một con xúc xắc. Ta có bảng phân phối của X là:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ví dụ 2.4. Một hộp đựng bốn quả cầu giống nhau đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên ra hai quả. Gọi X là tổng của hai số ghi trên hai quả đó. Ta có bảng phân phối của X là:

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Định lý 2.1. Bảng phân phối xác suất có các tính chất sau:

(i) $0 \le p_i \le 1$

(iii) $\sum_i p_i = 1$

Chứng minh

(i) Là hiển nhiên.

(ii) Đặt Ai = (X = xi) thì các biến cố Ai đôi một xung khắc và:

$$\sum_i A_i = \Omega$$

nên: $$\sum_i p_i = \sum_i P(A_i) = P(\Omega) = 1$$

2.2. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT. HÀM MẬT ĐỘ XÁC SUẤT

1- Hàm phân phối xác suất

Cho X là một đại lượng ngẫu nhiên. Ta gọi hàm:

$$F(x) = P(X < x)$$

là hàm phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên.

Định lý 2.2. Hàm phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X có các tính chất sau:

(i) F(x) không giảm

(ii) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$$

(iii) $P(a \le X < b) = F(b)-F(a)$

Chứng minh

(i) Nếu a < b thì: $(x<b)=(x<a)+(a\le X<b)$

là tổng của hai biến cố xung khắc. Từ đó:

$$P(X<b)=P(X<a)+P(a\le X<b)$$

$$F(b)=F(a)+P(a\le X<b)$$

vì: $P(a\le X<b)\ge 0$

nên: $F(a)\le F(b)$

(ii) $F(-\infty)=P(\Phi)=0;\ F(+\infty)=P(\Omega)=1$

(iii) Theo chứng minh (i):

$$F(b) = F(a) + P(a \le X < b)$$

do đó:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

Nhận xét. Từ (i) và (ii) ta có: $0 \le F(x) \le 1$. Tính chất (i) và (ii) gọi là *tính chất đặc trưng* của hàm phân phối xác suất: một hàm F(x) xác định trên R có tính chất (i) và (ii) đều là hàm phân phối xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên nào đó.

Ví dụ 2.1. Chứng tỏ: $$\mathbf{F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx}$$

là hàm phân phối xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên.

Giải. Vì:

$$F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} > 0$$

nên F(x) tăng.

Mặt khác:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

nên F(x) là hàm mật độ xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên.

Định lý 2.3. Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Với x1 < x2 < ... < xn thì hàm phân phối của X là:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{nếu } x\le x_1 \\ p_1 & \text{nếu } x_1<x\le x_2 \\ p_1+p_2 & \text{nếu } x_2<x\le x_3 \\ \dots & \\ p_1+p_2+\dots+p_{n-1} & \text{nếu } x_{n-1}<x\le x_n \\ 1 & \text{nếu } x>x_n \end{cases}$$

Chứng minh. Đặt xo = – ∞, P(xo) = po = 0. Với mọi $x\in(x_i,x_{i+1}]$, ta có:

$$F(x) = P(X < x) = P(x \le x_i)$$
$$= \sum_{k=0}^{i} P(X = x_k)$$
$$= p_o + p_1 + \ldots + p_i$$

Chú ý đến po = 0 ta có biểu thức của F(x).

Nhận xét. Hàm F(x) gián đoạn tại các điểm xi nhưng liên tục bên trái tại các điểm này.

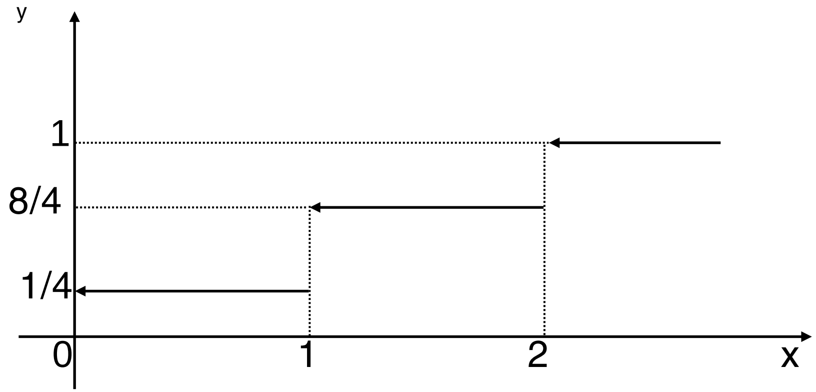
Ví dụ 2.6. Tung hai đồng tiền cân đối, đồng chất. Gọi X là số mặt ngửa xuất hiện. Tìm hàm phân phối xác suất của X.

Giải. Bảng phân phối của x là:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Do đó theo định lý 2.2 hàm phân phối xác suất của X là:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{nếu} \quad 0<\le 1 \\ \dfrac{3}{4} & \text{nếu} \quad 1<x\le 2 \\ 1 & \text{nếu} \quad x>2 \end{cases}$$



F(x) có đồ thị như hình vẽ.

Định lý 2.4. Nếu hàm phân phối F(x) của đại lượng ngẫu nhiên X liên tục tại x = a thì:

$$P(X = a) = 0$$

Chứng minh. Do: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

và F(x) liên tục tại a nên cho $b \to a+$, ta có:

$$P(X=a)=\lim_{b\to a^{+}}[F(b)-F(a)]=F(a)-F(a)=0$$

Nhận xét. Theo định lý 2.4, nếu F(x) liên tục tại a và b thì:

$$P(a \le X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X \le b)$$

2- Hàm mật độ xác suất của đại lượng ngẫu nhiên liên tục

Cho X là một đại lượng ngẫu nhiên liên tục, có hàm phân phối F(x) là một hàm có đạo hàm. Khi đó ta gọi hàm:

$$f(x) = F'(x)$$

là hàm mật độ xác suất của X.

Định lý 2.5. Hàm mật độ xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X có các tính chất sau:

(i) $f(x) \ge 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(iii) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

(iv) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Chứng minh

(i) Vì F(x) không giảm nên f(x) = F'(x) 0

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 - 0 = 1$

(iii) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

(iv) Theo công thức đạo hàm theo cận trên

$$\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right]' = f(x) = F'(x)$$

do đó:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt + C. \text{ Vì } F(-\infty) = 0 \text{ nên } C = 0$$

Vậy ta có: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Nhận xét. Tính chất (i) và (ii) của định lý 2.5 là tính chất đặc trưng của hàm mật độ xác suất: một hàm f(x) xác định trên R thoả mãn (i) và (ii) là hàm mật độ xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên X nào đó.

Ví dụ 2.7. Cho hàm:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{nếu } x\in[0,1] \\ 0 & \text{nếu } x\notin[0,1] \end{cases}$$

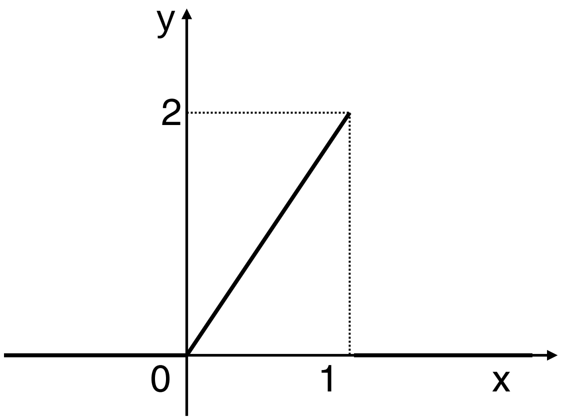
a) Chứng tỏ f(x) là hàm mật độ xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên X

b) Tìm hàm phân phối xác suất F(x) của X

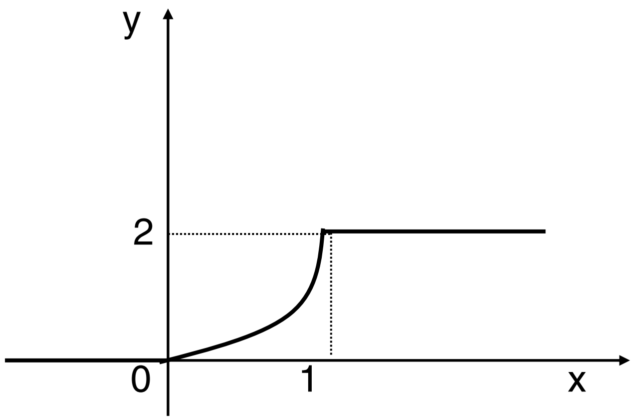
c) Tính xác suất $P(0<X<\frac{1}{2})$.

Giải. a) Hiển nhiên $f(x)\geq 0$. Mặt khác:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} 2xdx = x^2\Big|_{0}^{1} = 1$$



Đồ thị hàm F(x)



Đồ thị hàm F(x)

c) $$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

2.3. VECTƠ NGẪU NHIÊN

1. Khái niệm vectơ ngẫu nhiên

Cho các đại lượng ngẫu nhiên X1, X2 ..., Xn xác định trên các kết quả của một phép thử. Khi đó ta gọi:

$$Z = (X1, X2, ..., Xn)$$

là một *vectơ ngẫu nhiên* n - chiều.

Ví dụ 2.8. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Gọi X1 là điểm môn toán, X2 là điểm môn lý, X3 là điểm môn ngoại ngữ thì:

$$Z = (X1, X2, X3)$$

là một vectơ ngẫu nhiên 3 - chiều.

Sau đây ta xét một số vấn đề về vectơ ngẫu nhiên 2 - chiều Z = (X,Y). Tương tự như đại lượng ngẫu nhiên, vectơ ngẫu nhiên cũng có hai loại: rời rạc và liên tục.

2. Vectơ ngẫu nhiên rời rạc 2 - chiều

1- Bảng phân phối xác suất đồng thời

Cho X = {x1, x2, ..., xm}; Y = {y1, y2, ..., yn}.

Đặt pij = P(X = xi, Y = yj); ta có bảng sau đây gọi là bảng phân phối xác suất đồng thời của Z = (X,Y):

X \ Y	y_1	y_2	...	Y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}

x_2				
...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	P_{m2}	...	p_{mn}

ta có: $0 \le p_{ij} \le 1$ và . $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

2- Phân phối lề của X và Y

Đặt: $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = P(X = x_i), i = \overline{1, m}$

Ta được bảng phân phối xác suất của X:

X	x_1	x_2	X_m
P	p_1	p_2	p_m

Đặt: $q_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = (Y = y_j), j = \overline{1, n}$

Ta được bảng phân phối xác suất của Y:

X	y_1	y_2	...	y_n
P^Y	q_1	q_2	...	q_n

Các phân phối này thực chất là cộng dòng hay cộng cột của bảng phân phối xác suất đồng thời ra lề nên gọi là các phân phối lề của (X,Y).

3- Phân phối có điều kiện

Bảng xác suất của X với điều kiện $Y = y_j (j = \overline{1, n})$ là:

... ...

X	x_1	x_2	...	x_m
P^{X/y_j}	$\dfrac{p_{1j}}{q_j}$	$\dfrac{p_{2j}}{q_j}$		$\dfrac{p_{mj}}{q_j}$

Bảng phân phối xác suất của Y đối với điều kiện $X = x_i (i = \overline{1, m})$ là:

Y	y_1	y_2	...	y_n
P^{Y/x_i}	$\dfrac{p_{i1}}{p_i}$	$\dfrac{p_{i2}}{p_i}$		$\dfrac{p_{in}}{p_i}$

4- Điều kiện độc lập của X và Y

X và Y độc lập $\Leftrightarrow P(X = xi, Y = yj) = P(X = xi).P(Y = yj)\ \forall\ i, j$

$\Leftrightarrow pij = piqj\ \forall i, j.$

5- Hàm phân phối của (X, Y)

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}$$

Ví dụ 2.9. Tung hai đồng tiền cân đối và đồng chất. Gọi X là số mặt sấp xuất hiện, Y là số mặt ngửa xuất hiện.

a) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X,Y). Tìm các phân phối lề.

b) X và Y có độc lập không?

Giải. a) Ta có bảng phân phối đồng thời và phân phối lề như sau:

Y / X	0	1	2	P^X
0	0	0	1/4	1/4
1	0	1/2	0	½
2	1/4	0	0	1/4
P^Y	1/4	1/2	1/4	1

b) X và Y không độc lập vì:

$$P(X = 0, Y = 0) = 0;\ P(X = 0).\ P(Y = 0) = \frac{1}{16}$$

Ví dụ 2.10. Có ba lô sản phẩm, mỗi lô có 10 sản phẩm, trong lô thứ i có i phế phẩm, . Tung hai đồng tiền. Nếu không có mặt sấp nào thì chọn lô 1, có
một mặt sấp thì chọn lô 2, có hai mặt sấp thì chọn lô 3. Từ lô được chọn lấy ra một sản phẩm. Gọi X là số mặt sấp khi tung hai đồng tiền, Y là số phế phẩm được lấy ra.

a) Lập bảng phân phối đồng thời của (X,Y). Tìm các phân phối lề.

b) Tìm phân phối có điều kiện của X khi Y = 1, của Y khi X = 1.

Giải. a) Ta có X = {0,1,2}, Y = {0,1}. Theo định lý nhân ta có

$$P_{ij} = P(X = i).P(Y = j \mid X = i)$$

Từ đó ta có bảng phân phối đồng thời và phân phối

X \ Y	0	1	P^X
0	9/40	1/40	1/4
1	2/5	1/10	1/2
2	7/40	3/40	1/4
P^Y	4/5	1/5	1

b) Phân phối của X khi Y = 1:

X	0	1	1
$P^{X/Y=1}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

Phân phối của Y khi X = 13.

Y	0	1
$P^{Y/X=1}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Vectơ ngẫu nhiên liên tục 2 - chiều

1- Hàm mật độ đồng thời

Hàm mật độ đồng thời của vectơ ngẫu nhiên (X,Y) là hàm f(x,y) xác định trên toàn mặt phẳng có các tính chất:

(i) $f(x,y) \geq 0$

(ii) $\iint_{R^2} f(x,y)dxdy = 1$

(iii) $P[(X,Y) \in D] = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy$

Tính chất (i) và (ii) là tính chất đặc trưng của hàm mật độ đồng thời: hàm f(x,y) thoả mãn (i) và (ii) là hàm mật độ xác suất của một vectơ ngẫu nhiên (X,Y) nào đó.

2- Mật độ lề của X và Y

Cho vectơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm mật độ đồng thời là f(x,y). khi đó:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad \text{là hàm mật độ của X;}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad \text{là hàm mật độ của Y.}$$

Các hàm mật độ này cũng gọi là các mật độ lề của (X,Y).

3- Mật độ có điều kiện

Hàm mật độ của X với điều kiện Y = y là:

$$f_{X/y} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Hàm mật độ của Y với điều kiện X = x là:

$$f_{Y/x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

4- Điều kiện độc lập của X và Y

Hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y gọi là độc lập nếu:

$$f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

Trong trường hợp này, với mọi khoảng A, B R, ta có:

$$P(X \in A, Y \in B) = \iint\limits_{(A\times B)} f(x,y)dxdy = \int_A f_X(x)dx.\int_B f_Y(y)dy$$
$$= P(X \in A).P(Y \in B)$$

tức là xác suất của tích bằng tích của các xác suất.

5- Hàm phân phối của (X,Y)

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

Ví dụ 2.11. Cho hàm:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Chứng tỏ f(x,y) là hàm mật độ của một vectơ ngẫu nhiên Z = (X,Y)

b) Tìm các hàm mật độ lề

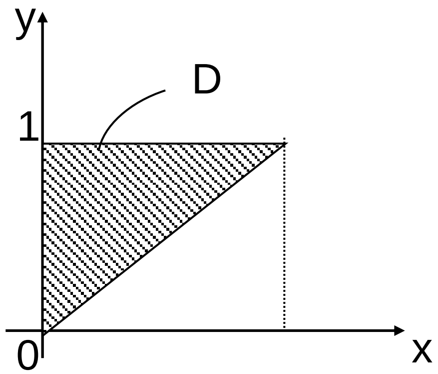
c) X và Y có độc lập không?

d) Tìm hàm phân phối F(x,y) của Z.

Giải. Miền khác 0 của f(x,y) là miền D như trong hình vẽ.

a) Hiển nhiên $f(x,y) \ge 0$

$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy = \iint_D 2dxdy = 2.S_D = 1$$



Vậy f(x,y) là hàm mật độ xác suất.

b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin (0,1) \\ \int_x^1 2dy & \text{nếu } y \in (0,1) \end{cases}$$

vậy:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{nếu } x \in (0,1) \\ 0 & \text{nếu } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Tương tự:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,f)dx = \begin{cases} 2y & \text{nếu } y \in (0,1) \\ 0 & \text{nếu } y \notin (0,1) \end{cases}$$

c) $f_X(x).f_Y(y) \neq f(x,y)$ nên X,Y không độc lập

d) $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \text{ hoặc } y \le 0 \\ x(2y-x) & \text{nếu } 0 < x < y < 1 \\ y^2 & \text{nếu } 0 < y < 1, x \ge 1 \\ x(2-x) & \text{nếu } 0 < x < x, y \ge 1 \\ 1 & \text{nếu } x \ge 1, y \ge 1 \end{cases}$$

Ví dụ 2.12. Cho (X,Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{nếu } 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm các hàm mật độ lề. Chứng tỏ X và Y độc lập

b) Tìm hàm phân phối của (X,Y).

Giải. a) Ta có:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 4xydy & \text{nếu } x \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Tương tự ta có: $f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{nếu } y \in [0,1] \\ 0 & \text{nếu } y \notin [0,1] \end{cases}$

vì f(x,y) = fX(x).fY(y) nên X và Y độc lập.

b) $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \text{ hoặc } y < 0 \\ x^2y^2 & \text{nếu } 0 \le x, y \le 1 \\ y^2 & \text{nếu } 0 \le y \le 1,\ x > 1 \\ x^2 & \text{nếu } 0 \le x \le 1, y > 1 \\ 1 & \text{nếu } x \ge 1,\ y \ge 1 \end{cases}$$

2.4. HÀM CÁC ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

1. Hàm của một đại lượng ngẫu nhiên

1- Trường hợp rời rạc

Giả sử $Y = \varphi(X)$, X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc. Bằng cách tính các giá trị $\varphi(x_i)$, ta tìm được các giá trị mà Y nhận. Xác suất tương ứng để Y nhận yj là:

$$P(Y=y_j)=\sum_{\varphi(x_i)=y_j} p_i$$

từ đó ta có bảng phân phối xác suất của Y.

Ví dụ 2.13. Cho X có bảng phân phối xác suất:

X	–1	0	1	2
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Tìm bảng phân phối của Y = X2.

Giải. Ta có Y = {0,1,4}

P(Y = 0) = P(X = 0) = 0,3

P(Y = 1) = P(X = –1) + P(X = 1) = 0,5

P(Y = 4) = P(X = 2) = 0,2

Vậy:

X	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Ví dụ 2.14. Cho X có bảng phân phối xác suất

X	1	2	...	n	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

Tìm bảng phân phối xác suất của $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$

Giải. Ta có:

$$Y = -1 \quad \text{khi } x = 4k+3$$
$$Y = \ \ 0 \quad \text{khi } x = 2k$$
$$Y = \ \ 1 \quad \text{khi } x = 4k+1$$

Ta cũng có:

$$P(Y=-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+3}} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^4}} = \frac{2}{15}$$

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=1)=\sum_{k=01}^{\infty}\frac{1}{2^{4k+1}}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{8}{15}$$

Vậy bảng phân phối xác suất của Y là:

X	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

2- Trường hợp liên tục

Giả sử , X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ fX(x).

- Từ miền giá trị của X ta tìm được miền giá trị của Y
- Tìm hàm phân phối của Y

$$FY(x) = P(Y < x) = P(\varphi(X) < x) = \int_A f_X(u)du$$

với: $A = (u:\varphi(u)< x)$

- Lấy đạo hàm của FY(x) ta có fY(x).

Ví dụ 2.15. Cho X có hàm mật độ fX(x). Tìm hàm mật độ của:

$$Y = 2X + 3$$

Giải. $$F_Y(x) = P(2X+3<x) = P(X<\frac{x-3}{2}) = F_X(\frac{x-3}{2})$$

từ đó: $$f_Y(x) = F_Y'(x) = \left[F_X(\frac{x-3}{2})\right]' = \frac{1}{2} f_X(\frac{x-3}{2})$$

Ví dụ 2.16. Cho X là hàm mật độ fX(x). Tìm hàm mật độ của Y = X2.

Giải

Ta có: FY(x) = P(Y < x) = (X2 < x)

Rõ ràng $x \le 0$ thì P(X2 < x) = 0. Nếu x > 0 thì:

$$P(X^2 < x) = P(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x})$$

$$= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

từ đó: $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \le 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{nếu} \quad x > 0 \end{cases}$$

Lấy đạo hàm của FY(x) ta được:

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \;\; x \le 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left[f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})\right] & \text{nếu} \;\; x > 0 \end{cases}$$

2. Hàm của hai đại lượng ngẫu nhiên

1- Trường hợp rời rạc

Giả sử $Z = \varphi(X, Y)$, đã biết bảng phân phối xác suất đồng thời của (X,Y). Ta cần tìm phân phối xác suất của Z.

Bằng cách tính φ(xi,yj) ta tìm được các giá trị có thể nhận của Z. Xác suất tương ứng để Z nhận zk là:

$$P(Z = z_k) = \sum_{\varphi(x_i, y_j) = z_k} p_{ij}$$

Ví dụ 2.17. Bảng phân phối đồng thời của (X,Y) là:

x \ y	–1	0	1
0	0,1	0,2	0,3
1	0,2	0,1	0,1

Tìm bảng phân phối xác suất của Z = X – Y + 1.

Giải. Các giá trị có thể nhận của Z:

z y x	−1	0	1
0	2	1	0
1	3	2	1

Từ đó ta có bảng phân phối xác suất của Z là:

Z	0	1	2	3
P	0,3	0,2 + 0,1	0,1 +0,1	0,2

Trường hợp liên tục

Giả sử f(x,y) là hàm mật độ đồng thời của (X,Y). Ta cần tìm hàm mật độ của Z = .

Theo định nghĩa, ta có hàm phân phối của Z:

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P[(\varphi(X,Y) < z)] = \iint\limits_{\varphi(x,y) < z} f(x,y)\,dxdy$$

Lấy đạo hàm FZ(z) ta tìm được hàm mật độ fZ(z) của Z.

Ví dụ 2.18. Cho X và Y độc lập, có hàm mật độ là:

$$f_X(x)=f_Y(y)=\begin{cases}1 & \text{nếu } x\in[0,1]\\ 0 & \text{nếu } x\notin[0,1]\end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của Z = X – Y.

Giải. Vì X và Y độc lập nên hàm phân phối của (X,Y) là:

$$f_X(x)=f_Y(y)=\begin{cases}1 & \text{nếu } 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{nếu trái lại}\end{cases}$$

Ký hiệu D là miền: $0\le x\le y\le 1$.

khi đó:

$$F_Z(z)=P(Z<z)=P(X-Y<z)=\iint\limits_{(x-y<z)} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D\cap(x-y<z)} dxdy \;=D_{D\cap(x-y<z)}$$

Vậy:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad z < -1 \\ \left(\dfrac{1+z}{2}\right)^2 & \text{nếu} \ -1 \le z < 0 \\ 1 - \left(\dfrac{1+z}{2}\right)^2 & \text{nếu} \ 0 \le z \le 1 \\ 1 & \text{nếu} \ z > 1 \end{cases}$$

Lấy đạo hàm của FZ(z) ta được:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1+z & \text{nếu} \quad -1 \le z \le 0 \\ 1-z & \text{nếu} \ 0 < z \le 1 \\ 0 & \text{nếu} \ x < -1 \ \text{ hoặc } \ z > 1 \end{cases}$$

3. Phép toán các đại lượng ngẫu nhiên

Cho hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y. Khi đó phân phối của X + Y chính là phân phối của $\varphi(X, Y) = X + Y$; phân phối của X.Y chính là phân phối của $\varphi(X, Y) = X.Y$.

Trường hợp X và Y rời rạc thì X + Y và X.Y có bảng phân phối xác suất lần lượt là:

X + Y	z_1	z_2	...	z_s
P	p_1^*	p_2^*		p_s^*

trong đó: zk - là các giá trị khác nhau của xi + yj = zk, $p_k^* = \sum\limits_{x_i + y_j = z_k} p_{ij}$.

Đặt biệt, nếu X và Y độc lập thì pij = piqj.

Ví dụ 2.19. Cho X và Y độc lập có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2
P	0,2	0,3	0,5

Y	–1	0	1
P	0,4	0,3	0,3

Khi đó, X + Y và X.Y có bảng phân phối xác suất là:

X + Y	−1	0	1	2	3
P	0,08	0,18	0,35	0,24	0,15

X.Y	−2	−1	0	1	2
P	0,20	0,12	0,44	0,09	0,15

Trường hợp X và Y liên tục có hàm mật độ đồng thời của (X,Y) là f(x,y) thì hàm mật độ của X + Y và X.Y lần lượt là:

$$f_{X+Y}(z) = \iint\limits_{x+y<z} f(x,y)dxdy\,;\; f_{X.Y}(z) = \iint\limits_{x.y<z} f(x,y)dxdy$$

Đặc biệt, nếu X và Y độc lập thì f(x,y) = fX(x).fY(y).

BÀI TẬP

2.1. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi X và Y là các biến ngẫu nhiên chỉ số chấm xuất hiện ở mặt trên của các con xúc xắc đó.

a) Lập bảng phân phối xác suất của các biến ngẫu nhiên

Z1 = max (X,Y) và Z2 = min (X,Y)

b) Tìm các hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên Z1, Z2.

2.2. Một cơ quan có ba ô tô hoạt động. Xác suất để trong tuần làm việc các ô tô bị hỏng tương ứng là 0,1; 0,1; 0,3. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số ô tô bị hỏng trong một tuần làm việc.

a) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X

b) Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X.

2.3. Một hộp gồm bốn bi trắng và ba bi xanh cùng cỡ. Lấy ngẫu nhiên từng bi cho đến khi gặp bi trắng thì dừng lại. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số bi được lấy ra.

a) Lập bảng phân phối của biến ngẫu nhiên X

b) Tìm hàm phân phối của X.

2.4. Xác suất để một người bắn trúng bia là p. Người đó được phát từng viên đạn để bắn cho đến khi trúng bia. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số đạn bắn trượt. Hãy lập bảng phân phối cho biến ngẫu nhiên X.

2.5. Gieo ba lần một đồng tiền, xác suất mặt sấp xuất hiện mỗi lần là 0,5. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số lần xuất hiện mặt sấp trong ba lần gieo.

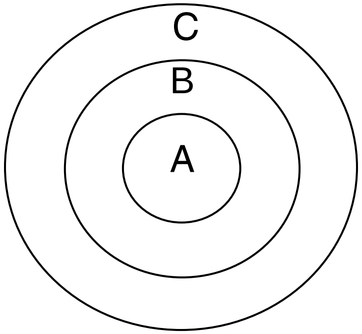
a) Hãy lập dãy phân phối

b) Tìm hàm phân phối F(x).

2.6. Tiến hành thử độ tin cậy của năm máy. Mỗi máy chỉ được thử nếu máy trước chịu đựng được phép thử. Lập dãy phân phối của số máy được thử, biết xác suất chịu đựng được phép thử của mỗi máy là 0,9.

2.7. Hai cầu thủ bóng rổ lần lượt ném bóng vào rổ cho đến chừng nào một người ném lọt rổ thì thôi. Lập dãy phân phối của số lần ném của mỗi người, nếu xác suất lọt rổ của người thứ nhất là 0,4 và người thứ hai là 0,6.

2.8. Một bia gồm miền tròn A và hai vành khăn B, C như hình vẽ. Mỗi phát đạn trúng miền A được tính 10 điểm,trúng miền B được năm điểm và trúng miền C được hai điểm. Xác suất bắn trúng miền A, B, C tương ứng là: 0,5; 0,3 ; 0,2. Lập dãy phân phối của tổng số điểm đạt được khi bắn ba phát đạn.



2.9. Từ một lô sản phẩm 100 chiếc có 10 phế phẩm, người ta chọn ngẫu nhiên năm chiếc để kiểm tra chất lượng. Hãy lập dãy phân phối của số phế phẩm trong mẫu chọn ra.

2.10. Hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X có dạng:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ A + B\arcsin\dfrac{x}{2} & \text{khi } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$$

a) Với các giá trị nào của A và B thì hàm F(x) là hàm liên tục?

b) Tính $P\left(-\dfrac{1}{2} < X < \dfrac{1}{2}\right)$

c) Tính mật độ phân phối f(x) của X.

2.11. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ \sin 2x & \text{khi } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 1 & \text{khi } x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ $\varphi(x)$

b) Tính $P\left(\frac{\pi}{6} \le X \le \frac{\pi}{4}\right)$

2.12. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a\cos x & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

a) Tìm hệ số a và xác suất $P\left(0 \le X \le \frac{\pi}{4}\right)$

b) Tìm hàm phân phối F(x).

2.13. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Tính xác suất để trong ba phép thử độc lập có hai lần X nhận giá trị trong khoảng $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

2.14. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{9} & x\in(0,3)\\ 0 & x\notin(0,3)\end{cases}$$

Tìm xác suất để trong ba phép thử độc lập có hai lần X nhận giá trị trong khoảng (1,3).

2.15. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối:

$$F(x) = A + B\mathrm{arctg}x\ ,\ x\in R$$

a) Tìm A, B

b) Tính xác suất $P(-1\le X\le 1)$

2.16. Cho vectơ ngẫu nhiên (X,Y) có phân phối đều trên hình chữ nhật D giới hạn bởi các đường thẳng x = 4, x = 6, y = 10, y = 15. Hãy tìm hàm mật độ đồng thời và hàm phân phối đồng thời của (X,Y). .

Chú ý: vectơ ngẫu nhiên (X,Y) có phân phối đều trên tập D nếu hàm mật độ của (X,Y) là:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(D)} & \text{nếu } (x,y)\in D\\ 0 & \text{nếu } (x,y)\notin D\end{cases}$$

ở đây m(D) là diện tích của tập D.

2.17. Cho vectơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm mật độ đồng thời:

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}a\sin(x+y) & (x,y)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\\ 0 & (x,y)\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

a) Tìm số a và hàm phân phối đồng thời của (X,Y)

b) Tính $P\left(0\le X\le\dfrac{\pi}{6};\ 0\le Y\le\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.18. Cho vectơ ngẫu nhiên (X,Y) có hàm phân phối đồng thời:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y} & \text{nếu} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ 0 & \text{ở những nơi khác} \end{cases}$$

a) Tính $P(1 \leq X \leq 2; 3 \leq Y \leq 5)$

b) Tìm hàm mật độ đồng thời

c) X, Y có độc lập không?

2.19. Cho vectơ ngẫu nhiên (X,Y) liên tục có hàm mật độ đồng thời:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)}$$

a) Tìm các hàm mật độ lề của (X,Y)

b) Tìm các hàm mật độ có điều kiện của (X,Y).

2.20. Cho vectơ ngẫu nhiên (X,Y) liên tục có hàm phân phối đều trên hình tròn . Tìm hàm mật độ đồng thời và các hàm mật độ lề của (X,Y).

2.21. Cho hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối đều trên khoảng [0,1].

a) Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên Z1 = – lnX

b) Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên Z2 = X – Y

Chú ý: biến ngẫu nhiên X gọi là có phân phối đều trên đoạn [a, b] nếu X có hàm mật độ là:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{nếu } x \in [a,b] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [a,b] \end{cases}$$

2.22. Cho X1, X2, ..., Xn là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối mũ:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

Tìm phân phối của các biến ngẫu nhiên

Y = max (X1, X2, ..., Xn)

Y = min (X1, X2, ..., Xn).

2.23. Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên [1,3]. Tìm phân phối của biến ngẫu nhiên Y = 3X + 2.

2.24. Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên khoảng (0,1). Hãy tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên Y = X2.