Chương 6
LÝ THUYẾT ƯỚC LƯỢNG

6.1. ƯỚC LƯỢNG ĐIỂM

Cho $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ là một mẫu kích thước n từ tổng thể có kỳ vọng a, phương sai σ^2.

Số $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ gọi là một ước lượng điểm của đặc trưng θ của tổng thể, nếu ta coi $\hat{\theta}$ là một giá trị gần đúng của θ.

1- Ước lượng không chệch

Ước lượng $\hat{\theta}$ của θ gọi là không chệch nếu $E(\hat{\theta}) = \theta$

Định lý sau đây là hệ quả trực tiếp của các định lý 5.1; 5.2; 5.3 chương 5.

Định lý 6.1. Với mọi mẫu ta có:

- F là ước lượng không chệch của p
- $\overline{X}$ là ước lượng không chệch của a
- S^2 là ước lượng không chệch của σ^2.

2- Ước lượng hợp lý cực đại

Giả sử tổng thể đã biết phân phối nhưng chưa biết các tham số θ của nó. Khi đó hàm mật độ xác suất hoặc công thức tính xác suất của nó có dạng $f(x, \theta)$.

$\hat{\theta}$

Từ mẫu $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ ta có hàm:

$$L(\theta) = L(X_1, X_2, ..., X_n, \theta) = f(X_1, \theta).f(X_2, \theta)...f(X_n, \theta)$$

gọi là hàm hợp lý của các số θ.

Số $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ gọi là ước lượng hợp lý cực đại của θ, nếu ứng với giá trị này của θ hàm hợp lý đạt cực đại.

Do $L > 0$, nên nếu θ chỉ gồm một tham số thì $L(\theta)$ và $\ln L(\theta)$ có cùng điểm cực đại. Để thuận tiện cho tính toán, kể cả trường hợp θ có nhiều tham số, chẳng hạn $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, ta cũng coi ước lượng hợp lý cực đại của θ là $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, trong đó $\hat{\theta}$ là điểm cực đại của hàm hai biến $\ln L(\theta_1, \theta_2)$.

Định lý 6.2. Cho tổng thể có phân phối Poisson và mẫu:

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

Khi đó là ước lượng hợp lý cực đại của tham số a của tổng thể.

Khi đó $\overline{X}$ là ước lượng hợp lý cực đại của tham số a của tổng thể

Chứng minh. Ta có:

$$f(x,a) = e^{-a}\frac{a^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

từ đó hàm hợp lý là:

$$L(a) = f(X_1, a) \,.\, f(X_2, a) \ldots f(X_n, a)$$

$$= e^{-na} \cdot \frac{a^{X_1+X_2+\ldots+X_n}}{X_1!X_2!\ldots X_n!}$$

$$= e^{-na} a^{n\overline{X}} \cdot \frac{1}{X_1!X_2!\ldots X_n!}$$

Để tìm điểm cực đại của ln L(a), ta có:

$$\ln L(a) = -na + n\overline{X}\ln a - \ln(X_1!X_2!\ldots X_n!)$$

$$\frac{d\ln L(a)}{da} = -n + \frac{n\overline{X}}{a}; \quad \frac{d^2\ln L(\overline{X})}{da^2} = -\frac{n\overline{X}}{a^2}$$

rõ ràng: $\dfrac{d\ln L(\overline{X})}{da} = 0$ và $\dfrac{d^2\ln L(\overline{X})}{da^2} < 0$

nên $\overline{X}$ là điểm cực đại của hàm ln L(a).

Định lý 6.3. Cho tổng thể có phân phối chuẩn và mẫu:

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

Khi đó $\overline{X}$ là ước lượng hợp lý của kỳ vọng a và $\widehat{S}^2$ là ước lượng hợp lý cực đại của phương sai σ^2 của tổng thể.

Chứng minh. Ta có:

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

từ đó hàm hợp lý là:

$$L(a, \sigma) = f(X_1, a, \sigma).f(X_2, a, \sigma)...f(X_n, a, \sigma)$$

$$= \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} .e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}$$

và:

$$\ln L(a, \sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - n\ln\sigma - \frac{n}{2}\ln 2\pi$$

Để tìm cực đại của hàm này, ta tính các đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial \ln L(a, \sigma)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{X} - a)$$

$$\frac{\partial \ln L(a,\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 - \frac{n}{\sigma}$$

Cho: $\dfrac{\partial \ln L(a,\sigma)}{\partial a} = 0$

ta được: $a = \overline{X}$

Từ đó, cho: $\dfrac{\partial \ln L(a,\sigma)}{\partial \sigma} = 0$

ta được: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 - n\sigma^2 = 0$

hay: $\sigma^2 = \widehat{S}^2$

Dễ thấy: $\dfrac{\partial^2 \ln L(\overline{X},\widehat{S})}{\partial a^2} = -\dfrac{n}{\widehat{S}^2}$, $\dfrac{\partial^2 \ln L(\overline{X},\widehat{S})}{\partial a \partial \sigma} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L(\overline{X},\widehat{S})}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{2n}{\widehat{S}^2}$

nên $(\overline{X},\widehat{S}^2)$ là điểm cực đại của hàm $\ln L(a,\sigma)$.

6.2. ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG

1. Khái niệm chung

Khoảng (c,d) gọi là khoảng ước lượng của θ nếu ta coi $\theta \in (c,d)$. Xác suất: $$P[\theta \in (c,d)] = 1-\alpha$$ gọi là độ tin cậy của ước lượng.

Nếu $\hat{\theta}$ là một ước lượng không chệch của θ thì khoảng ước lượng của θ có dạng $(\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon)$ gọi là khoảng ước lượng đối xứng, số $\varepsilon > 0$ gọi là độ chính xác của ước lượng.

Giả sử $(\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon)$ là khoảng ước lượng đối xứng của θ với độ tin cậy $1 - \alpha$ thì: $$P\left[\theta \in (\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon)\right] = P\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| < \varepsilon\right) = 1-\alpha$$

2. Ước lượng khoảng của tỷ lệ

Bài toán. Cho mẫu có kích thước n, tỷ lệ mẫu f. Tìm khoảng ước lượng (đối xứng) của tỷ lệ tổng thể p với độ tin cậy $1 - \alpha$.

Phương pháp giải khi $n \geq 30$. Ta có:

$$P\left(|F-p| < \varepsilon\right) = P\left(\frac{|F-p|}{\sqrt{f(1-f)}}\sqrt{n} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{f(1-f)}}\right) = 1-\alpha$$

Đặt: $$Z_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{f(1-f)}}$$

Theo mục 2 phần 5.3 chương 5:

$$\frac{F - p}{\sqrt{f(1-f)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

nên theo định lý 4.9 chương 4, ta có:

$$2\Phi(Z_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$$

Tra bảng tích phân Laplace ta tìm được $Z\alpha$. Từ đó ta có:

$$\varepsilon = \frac{Z_\alpha \sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}$$

và có khoảng ước lượng của p là $(f - \varepsilon, f + \varepsilon)$.

Ví dụ 6.1. Điểm danh ngẫu nhiên 50 sinh viên thấy có 6 người bỏ học. Ước lượng tỷ lệ bỏ học của sinh viên với độ tin cậy 95%.

Giải. $n = 50$, $f = \frac{6}{50} = 0{,}12$. Tìm khoảng ước lượng của tỷ lệ sinh viên bỏ học p với $1 - \alpha = 95\%$.

$$2\Phi(Z_\alpha) = 0{,}95; \quad \Phi(Z_\alpha) = 0{,}475$$

Tra bảng ta được $Z\alpha = 1{,}96$

$$\varepsilon = \frac{1{,}96\sqrt{0{,}12.0{,}88}}{\sqrt{50}} = 0{,}0900$$

Vậy $p = 0{,}12 \pm 0{,}09$ hay $0{,}03 < p < 0{,}21$.

3. Ước lượng khoảng của trung bình

Bài toán. Cho mẫu có kích thước n, trung bình mẫu $\overline{x}$, phương sai mẫu hiệu chỉnh s^2. Tìm khoảng ước lượng của trung bình (kỳ vọng) tổng thể a với độ tin cậy $1 - \alpha$.

1- Trường hợp $n \geq 30$

Ta có: $$P\left(\left|\overline{X} - \alpha\right| < \varepsilon\right) = P\left(\frac{\left|\overline{X} - a\right|}{s}\sqrt{n} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}\right) = 1 - \alpha$$

Đặt $Z_\alpha = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}$. Theo mục 2 phần 5.3 chương 5:

$$\frac{\overline{X} - a}{s} \sim N(0,1)$$

nên: $$2\Phi(Z_\alpha) = 1 - \alpha$$

Tra bảng ta tìm được $Z\alpha$.

Từ đó $\varepsilon = \dfrac{Z_\alpha . s}{\sqrt{n}}$ và khoảng ước lượng của a là $(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$.

Ví dụ 6.2. Khảo sát 100 sinh viên chọn ngẫu nhiên thấy điểm trung bình môn toán là 5,12, phương sai mẫu hiệu chỉnh là $(0,26)^2$. Ước lượng điểm trung bình môn toán của sinh viên với độ tin cậy 97%.

Giải. n = 100; $\overline{x}$ = 5,12; s = 0,26. Tìm khoảng ước lượng điểm trung bình môn toán a của sinh viên với 1 - α = 0,97.

$$\Phi(Z_\alpha) = \frac{0,97}{2} = 0,485$$

Tra bảng ta được Zα = 2,17

$$\varepsilon = \frac{2,17.0,26}{\sqrt{100}} = 0,06$$

Vậy a = 5,12 ± 0,06 hay 5,06 < a < 5,18.

2- Trường hợp tổng thể có phân phối chuẩn, đã biết phương sai σ2

Vì $\frac{\overline{X} - a}{\sigma} \sim N(0,1)$, nên tìm khoảng ước lượng như trong trường hợp 1 với $\varepsilon = \frac{Z_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$.

Chú ý rằng trường hợp này không phân biệt n.

3- Trường hợp n < 30, tổng thể có phân phối chuẩn, chưa biết phương sai

Ta có: $$P\left(\left|\overline{X}-a\right|<\varepsilon\right)=P\left(\frac{\left|\overline{X}-a\right|}{s}\sqrt{n}<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}\right)=1-\alpha$$

Đặt $T_\alpha = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}$. Theo mục 2 phần 5.3 chương 5:

$$\frac{\overline{X}-a}{s} \sim T(n-1)$$

Tra bảng phân phối Student (tức là bảng $P\left(\left|T_k\right|<T_\alpha^k\right)=1-\alpha$) cột α, dòng n – 1, ta tìm được $T_\alpha = T_\alpha^k$. Từ đó $\varepsilon = \dfrac{T_\alpha . s}{\sqrt{n}}$ và khoảng ước lượng của a là $(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$.

Ví dụ 6.3. Chiều dài của một loại sản phẩm theo luật phân phối chuẩn. Đo ngẫu nhiên 10 sản phẩm được chiều dài trung bình là 10,02 m; độ lệch mẫu hiệu chỉnh là 0,04 m. Tìm khoảng ước lượng chiều dài trung bình của loại sản phẩm này với độ tin cậy 95%.

Giải. n = 10; $\overline{x}$ = 10,02; s = 0,04. Tìm khoảng ước lượng của chiều dài trung bình a với 1 – α = 0,95.

$$T_\alpha = t_{0,05}^{9} = 2,262$$

$$\varepsilon = \frac{T_\alpha . s}{\sqrt{n}} = \frac{2,262.0,04}{\sqrt{10}} = 0,03$$

Vậy a = 10,02 ± 0,03 hay 9,99 < a < 10,05.

4. Bảng phân phối và bảng phân vị

1- Giới thiệu các bảng

Cho X là một đại lượng ngẫu nhiên. Bảng để tìm số Mα sao cho:
$P(|X| < M_\alpha) = 1 - \alpha$, gọi là bảng phân phối

Bảng để tìm số mα sao cho:
$P(X < m_\alpha) = \alpha$, gọi là bảng phân vị của X.

Nếu X ~ N(0,1) thì ta ký hiệu Mα là Zα, mα là uα

Nếu X ~ T(k) thì ta ký hiệu Mα là T^k_α, mα là t^k_α

Nếu X ~ X^2(k) thì ta ký hiệu Mα = m1-α là $X^2_k(\alpha)$ (trong trường hợp này dễ dàng thấy rằng $M_\alpha = m_{1-\alpha}$ vì $X \geq 0$).

Định lý 6.4. Với $\alpha_1, \alpha_2 > 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha < 1$ ta có:

$$P(m_{\alpha_1} < X < m_{1-\alpha_2}) = 1 - \alpha$$

Chứng minh. Với điều kiện của định lý ta có $\alpha_1 < 1 - \alpha_2$ và $m_{\alpha_1} < m_{1-\alpha_2}$,
từ đó: $P(m_{\alpha_1} < X < m_{1-\alpha_2}) = P(X < m_{1-\alpha_2}) - P(X < m_{\alpha_1})$

$$= (1 - \alpha_2) - \alpha_1 = 1 - \alpha$$

2- Khoảng ước lượng không đối xứng

Trở lại bài toán ở mục 3 phần 6.2 với n ≥ 30. Vì:

$$\frac{\overline{X} - a}{s}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

nên theo định lý 6.4, với $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha < 1$ ta có:

$$P\left(u_{\alpha 1} < \frac{\overline{X} - a}{s}\sqrt{n} < u_{1-\alpha 2}\right) = 1 - \alpha$$

hay: $$P\left(\overline{X} - u_{1-\alpha 2}\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} - u_{\alpha 1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (*)$$

Do tính đối xứng của phân phối chuẩn nên:

$$\begin{aligned} P(X < -u_{\alpha_1}) &= P(X < u_{\alpha_1}) - P(-u_{\alpha_1} < X < u_{\alpha_1}) \\ &= P(X < u_{\alpha 1}) - 2P(0 < X < u_{\alpha 1}) \\ &= P(X < u_{\alpha 1}) - 2\left(P(X < u_{\alpha 1}) - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - P(X < u_{\alpha 1}) = 1 - \alpha_1 \end{aligned}$$

Vậy $-u_{\alpha 1} = u_{1-\alpha 1}$. Theo (*) ta có khoảng ước lượng của a với độ tin cậy 1 - α là:

$$\left(\overline{x} - u_{1-\alpha 2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + u_{1-\alpha 1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Khoảng ước lượng này không đối xứng (không nhận $\overline{x}$ làm tâm).

Trường hợp đặc biệt $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ thì ta nhận lại được khoảng ước lượng đối xứng:

$$\left(\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

So sánh kết quả ở đây với mục 3 phần 6.2 ta có:

$$Z_\alpha = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

số này có thể tra từ bảng tích phân Laplace hoặc bảng phân vị chuẩn, tương tự ta cũng có:

$$T_\alpha^k = t^k_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

số này có thể tra ở bảng phân phối Student hoặc phân vị Student.

5. Ước lượng khoảng của phương sai

Bài toán. Cho mẫu kích thước n, phương sai mẫu hiệu chỉnh s^2. Tìm khoảng ước lượng của phương sai tổng thể σ^2 với độ tin cậy $1 - \alpha$.

Phương pháp giải trong trường hợp tổng thể có phân phối chuẩn: Theo mục 2 phần 5.3 chương 5:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X\,2(n-1)$$

Với $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, theo định lý 6.4. ta có:

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha_1}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha_2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

Từ đó, với một mẫu cụ thể ta có khoảng ước lượng của σ^2 là:

$$\left(\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\alpha_2}(n-1)};\ \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\alpha_1}(n-1)}\right)$$

Để thuận tiện cho tra bảng, trong các bài toán tìm khoảng ước lượng của σ^2 ta luôn xét với $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$. Khi đó khoảng ước lượng của σ^2 là:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)};\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

Nói chung, khoảng ước lượng này không đối xứng.

Ví dụ 6.4. Cân kiểm tra 15 gói mì ta được số liệu:

Trọng lượng (g)	84	84.5	85	85.5
Số gói	2	3	8	2

Biết trọng lượng này theo luật phân phối chuẩn. Hãy tìm khoảng ước lượng của phương sai với độ tin cậy 1 - α = 90% $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$.

Giải. Từ mẫu trên ta có $s^2 = 0{,}02$. Tra bảng phân phối X^2 với n – 1 = 14, ta có:

$$X_{0,05}(14) = 23{,}7;\ X_{0,95}(14) = 6{,}57$$

Vậy khoảng ước lượng muốn tìm là:

$$\left(\frac{14.0{,}20}{23{,}5};\ \frac{14.0{,}20}{6{,}57}\right)$$

hay: (0,199; 0,426)

6. Xác định độ tin cậy và kích thước mẫu

1- Trường hợp ước lượng tỷ lệ

Từ:
$$Z_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{f(1-f)}}$$

và $$2\Phi(Z_\alpha) = 1 - \alpha$$

ta có: $$1 - \alpha = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{f(1-f)}}\right); \quad n = \frac{Z_\alpha^2 f(1-f)}{\varepsilon^2}$$

Khi công thức tính n không là số nguyên thì ta chọn:

$$n = \left[\frac{Z_\alpha^2 f(1-f)}{\varepsilon^2}\right] + 1$$

Ví dụ 6.5. Lấy ngẫu nhiên 200 sản phẩm trong một kho hàng thấy có 25 phế phẩm.

a) Nếu muốn độ chính xác của ước lượng là $\varepsilon = 0{,}035$ thì độ tin cậy của ước lượng là bao nhiêu?

b) Nếu muốn độ chính xác là 0,001; độ tin cậy 95% thì cần kiểm tra thêm bao nhiêu sản phẩm?

Giải. a) $n = 200$; $f = 0{,}125$; $\varepsilon = 0{,}035$

$$\Rightarrow Z_\alpha = \frac{0{,}035.\sqrt{200}}{\sqrt{0{,}125.0{,}875}} = 1{,}50$$

Từ đó độ tin cậy là: $1-\alpha = 2\Phi(1{,}50) = 2.0{,}4332 = 0{,}8664$

b) $f = 0{,}125; \varepsilon = 0{,}001; 1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow Z_\alpha = 1{,}96$

$$n = \left[\frac{1{,}96^2.0{,}125.0{,}875}{0{,}001}\right] + 1 = 421$$

Vậy cần phải kiểm tra thêm 421 – 200 = 221 sản phẩm.

2- Trường hợp ước lượng trung bình

Từ: $Z_\alpha = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}$ và $2\Phi(Z_\alpha) = 1-\alpha$, ta có:

$$1-\alpha = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{s}\right); \quad n = \left(\frac{Z_\alpha.s}{\varepsilon}\right)^2$$

Khi công thức tính n không là số nguyên thì ta chọn:

$$n = \left[\left(\frac{Z_\alpha.s}{\varepsilon}\right)^2\right] + 1$$

Ví dụ 6.6. Đo đường kính của 100 chi tiết do một máy sản xuất được số liệu:

Đường kính (cm)	9,75	9,80	9,85	9,90
Số chi tiết	5	37	42	16

a) Với độ chính xác ε = 0,006, hãy xác định độ tin cậy.

b) Muốn độ chính xác là 0,003; độ tin cậy 95% thì cần kiểm tra bao nhiêu chi tiết?

Giải. Từ mẫu ta có s = 0,04.

a) $$Z_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{s} = \frac{0{,}006.\sqrt{100}}{0{,}04} = 1{,}5$$

Từ đó độ tin cậy là: $1 - \alpha = 2\Phi(1{,}5) = 0{,}8664$

b) $$n = \left[\left(\frac{1{,}96.0{,}04}{0{,}003}\right)^2\right] + 1 = 683$$

BÀI TẬP

6.1. Giả sử rằng các mẫu ở các bài tập 5.1; 5.2; 5.3; 5.4; 5.5; 5.6; 5.7; 5.8 là các mẫu trong phân phối chuẩn N(a, σ^2), với độ tin cậy $\gamma = 0,95$, hãy tìm khoảng tin cậy cho kỳ vọng a và phương sai σ^2 ứng với các mẫu trong bài tập trên.

6.2. Hao phí nguyên liệu cho một đơn vị sản phẩm là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo quy luật chuẩn N(a, σ^2), với độ lệch chuẩn $\sigma = 0,03$.

Người ta sản xuất thử 36 sản phẩm và thu được bảng số liệu sau:

Mức hao phí nguyên liệu (gam) x_i	19,5 – 19,7	19,7 – 19,9	19,9 – 20,1	20,1 – 20,3
n_i	6	8	18	4

với độ tin cậy $\gamma = 0,99$. Hãy tìm khoảng tin cậy của mức hao phí nguyên liệu trung bình cho một đơn vị sản phẩm.

6.3. Để ước lượng lượng xăng hao phí trung bình cho một loại xe ô tô chạy trên đoạn đường từ A đến B nếu chạy thử 49 lần trên đoạn đường này ta có bảng số liệu:

Lượng xăng hao phí (lít)	9,6 -9,8	9,8 - 10,0	10,0 - 10,2	10,2 - 10,4	10,4 -10,6
Số lần (n_i)	4	8	25	8	4

a) Với độ tin cậy $\gamma = 0,95$, hãy tìm khoảng tin cậy cho mức hao phí xăng trung bình của loại ô tô trên.

b) Với độ tin cậy $\gamma = 0,99$, tìm khoảng tin cậy cho phương sai. Biết rằng mẫu trên xét trong tập chuẩn.

6.4. Để định mức gia công một chi tiết máy, người ta theo dõi ngẫu nhiên quá trình gia công của 25 chi tiết máy, ta thu được bảng số liệu:

Thời gian gia công (phút)	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25	25 - 27
Số chi tiết máy tương ứng (n_i)	1	3	4	12	3	2

a) Với độ tin cậy $\gamma = 0,95$, hãy tìm khoảng tin cậy cho thời gian gia công trung bình một chi tiết máy.

b) Với độ tin cậy $\gamma = 0,95$, tìm khoảng tin cậy cho phương sai. Biết rằng mẫu trên tuân theo quy luật chuẩn.

6.5. Để xác định giá trung bình của một loại hàng hóa trên thị trường, người ta điều tra ngẫu nhiên tại 100 cửa hàng và thu được bảng số liệu:

Giá nghìn đồng (x_i)	83	84	85	86	87	88	89	90
Số cửa hàng x_i	6	7	12	15	30	10	10	10

với độ tin cậy $\gamma = 0{,}95$. Hãy tìm khoảng tin cậy giá trung bình của loại hàng hóa tại thời điểm đang xét.

6.6. Đo chiều sâu của biển bằng một loại dụng cụ đo có sai số tuân theo quy luật chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 20$ m. Phải đo bao nhiêu lần độc lập với nhau để kết quả có sai số không quá 15 m với độ tin cậy $\gamma =$ 0,95?

6.7. Chiều dài (X) của loại sản phẩm A do một máy tự động sản xuất là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo quy luật chuẩn với độ lệch chuẩn σ = 3cm. Để ước lượng chiều dài trung bình của loại sản phẩm nói trên với độ tin cậy $\gamma = 0{,}95$, người ta tiến hành đo 36 sản phẩm có =20 cm.

a) Tìm khoảng tin cậy của chiều dài trung bình của sản phẩm đó

b) Với độ tin cậy $\gamma = 0{,}99$, độ dài tin cậy không vượt quá 0,2 cm thì cần phải đo bao nhiêu sản phẩm?

6.8. Trọng lượng (X) của một loại chi tiết là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo quy luật chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 1,2$ kg. Phải chọn ít nhất bao nhiêu chi tiết điều tra nếu độ dài khoảng tin cậy là $\varepsilon = 0,2$ với độ tin cậy $\gamma = 0,95$.

6.9. Hãy ước lượng tỷ lệ chính phẩm của một nhà máy với độ tin cậy $\gamma = 0,95$, biết rằng khi kiểm tra 400 sản phẩm thấy có 20 phế phẩm, mẫu được xét trong tập chuẩn.

6.10. Bằng khoảng tin cậy đối xứng hãy ước lượng tỷ lệ hạt nảy mầm với độ tin cậy $\gamma = 0,99$. Trên cơ sở kết quả thực nghiệm gieo 1000 hạt, có 860 hạt nảy mầm.

6.11. Một kho có 100000 hộp thịt. Người ta mở kiểm tra ngẫu nhiên 100 hộp thì có 5 hộp bị hỏng. Với độ tin cậy $\gamma = 0,95$, hãy xét xem trong kho có khoảng bao nhiêu hộp bị hỏng.

6.12. Trong một đợt vận động bầu cử ở một bang có khoảng 4 triệu cử tri. Người ta phỏng vấn 1600 cử tri thì được biết có 960 người bỏ phiếu cho ứng cử viên A. Với độ tin cậy $\gamma = 0,99$, ứng cử viên A có khoảng được bao nhiêu phiếu ở bang này?

6.13. Để điều tra số cá trong một hồ, cơ quan quản lý đánh bắt 300 con, làm dấu rồi thả xuống hồ, lần hai bắt ngẫu nhiên 400 con thấy có 60 con có dấu. Hãy xác định số cá trong hồ với độ tin cậy $\gamma = 0,95$.

6.14. Cần phải lập một mẫu ngẫu nhiên với kích thước bao nhiêu để tỷ lệ phế phẩm của mẫu là 0,2; độ dài khoảng tin cậy đối xứng là 0,02 và độ tin cậy $\gamma = 0,95$.

6.15. Người ta đo một đại lượng không đổi 25 lần bằng một dụng cụ đo không có sai số hệ thống và sai số trung bình bằng 0. Giả sử sai số tuân theo quy luật chuẩn và mômen gốc cấp 2 mẫu bằng 0,5.

a) Với độ tin cậy $\gamma = 0,95$, hãy tìm khoảng tin cậy cho phương sai của sai số đo.

b) Tính xác suất để sai số đo không vượt quá 0,5.