CHƯƠNG 8
TƯƠNG QUAN VÀ HỒI QUY MẪU

Với một mẫu đồng thời của vectơ ngẫu nhiên Z = (X,Y) ta có các ước lượng của các đặc trưng của Z, có đường xấp xỉ của đường hồi quy của Y theo X (hoặc X theo Y). Sau đây ta xét một vài vấn đề cụ thể.

8.1. HỆ SỐ TƯƠNG QUAN MẪU

1. Bảng tương quan mẫu

Một mẫu kích thước n đồng thời về X và Y có dạng bảng số liệu sau đây, gọi là bảng tương quan mẫu:

Bảng 8.1

Y \ X	y_1	y_2	...	y_h	n_i
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1h}	n_1
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2h}	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{kh}	n_k
m_j	m_1	m_2	...	m_h	$\Sigma = n$

Trong bảng 8.1 ở trên:

xi ($i = \overline{1, k}$) - là các giá trị mà X nhận

yj ($j = \overline{1, h}$) - là các giá trị mà Y nhận

ni ($i = \overline{1, k}$) - là số lần X nhận xi

mj ($j = \overline{1, h}$) - là số lần Y nhận yj

ni, j ($i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, h}$) - là số lần đồng thời X nhận xi và Y nhận yj ta có:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{j=1}^{h} m_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} n_{ij} = n$$

$$\sum_{j=1}^{h} n_{ij} = n_i ; \sum_{i=1}^{k} n_{ij} = n_{ij}$$

từ đó ta có các đặc trưng sau đây:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i, \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i, \quad \hat{s}_X^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{h} y_j m_j; \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{h} y_j^2 n_j; \quad \hat{s}_Y^2 = \bar{y}^2 - \overline{y^2}$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{h} n_{ij} x_i y_j$$

2. Hệ số tương quan mẫu

Ta gọi:

$$r_{XY} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\widehat{s}_X \widehat{s}_Y}$$

là hệ số tương quan mẫu giữa X và Y.

Hệ số tương quan mẫu là một ước lượng của hệ số tương quan (xem mục 5 phần 3.4 chương 3).

Ví dụ 8.1. Số vốn đầu tư X và lợi nhuận Y trong một đơn vị thời gian của 100 quan sát, được số liệu:

X \ Y	0,3	0,7	1,0	n_i
1	20	10		30
2		30	10	40
3		10	20	30
m_j	20	50	30	n = 100

Tìm hệ số tương quan giữa X và Y.

Giải. Ta có:

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(1.30 + 2.40 + 3.30 = 2,00$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{100} 1^2.30 + 2^2.40 + 3^2.30) = 4,60$$

$$s_X^2 = 4,6 - 2,00^2 = 0,6$$

$$\overline{y} = \frac{1}{100}(0,3.20 + 0,7.50 + 1,0.30) = 0,71$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{100}(0,3^2.20 + 0,7^2.50 + 1,0^2.30) = 0,563$$

$$s_Y^2 = 0,563 - 0,71^2 = 0,0589$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{100}(0,3.20 + 0,7.10 + 1,4.30 + 2.10 + 2,1.10 + 3.20) = 1,56$$

từ đó hệ số tương quan mẫu là:

$$r_{XY} = \frac{1,56 - 2,00.0,71}{\sqrt{0,60.0,0589}} = 0,7447$$

8.2. ĐƯỜNG HỒI QUY

1. Đường hồi quy mẫu

Tiếp tục xét bảng 8.1. Với mỗi $i = \overline{1,k}$, đặt:

$$\overline{Y}_{x_i} = \left(\overline{Y}\middle|X = x_i\right) = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{h} n_{ij}y_j$$

là trung bình mẫu của Y khi X = xi.

Biểu diễn các điểm (xi,$\overline{Y}_{x_i}$) lên mặt phẳng tọa độ và nối các điểm (xi,$\overline{Y}_{x_i}$) và ($x_{i+1}, \overline{Y}_{x_{i+1}}$) bằng một đoạn thẳng (i = $\overline{1,k-1}$), ta được một đường gấp khúc,

gọi là đường hồi quy mẫu Y theo X.

Đường hồi quy mẫu là một xấp xỉ của đường hồi quy, tức là đồ thị của hàm f(x) = E(Y | X=x) (xem phần 3.4 chương 3).

Tương tự ta cũng có đường hồi quy mẫu X theo Y.

Ví dụ 8.2. Điểm kiểm tra chất lượng môn toán (X) và môn văn (Y) của 100 học sinh, có số liệu:

Y / X	3	4	5	6	7	8	9	n_i
3	1	2						3
4		3	5	4				12
5			11	13	4			28
6				7	23	7		37
7					4	8	3	15
8						3	2	5
n_j	1	5	16	24	31	18	5	n = 100

Lập đường hồi quy mẫu Y theo X.

Giải. Ta có:

$$\overline{Y}_3 = \frac{1}{3}(3.1 + 4.2) = 3{,}67$$

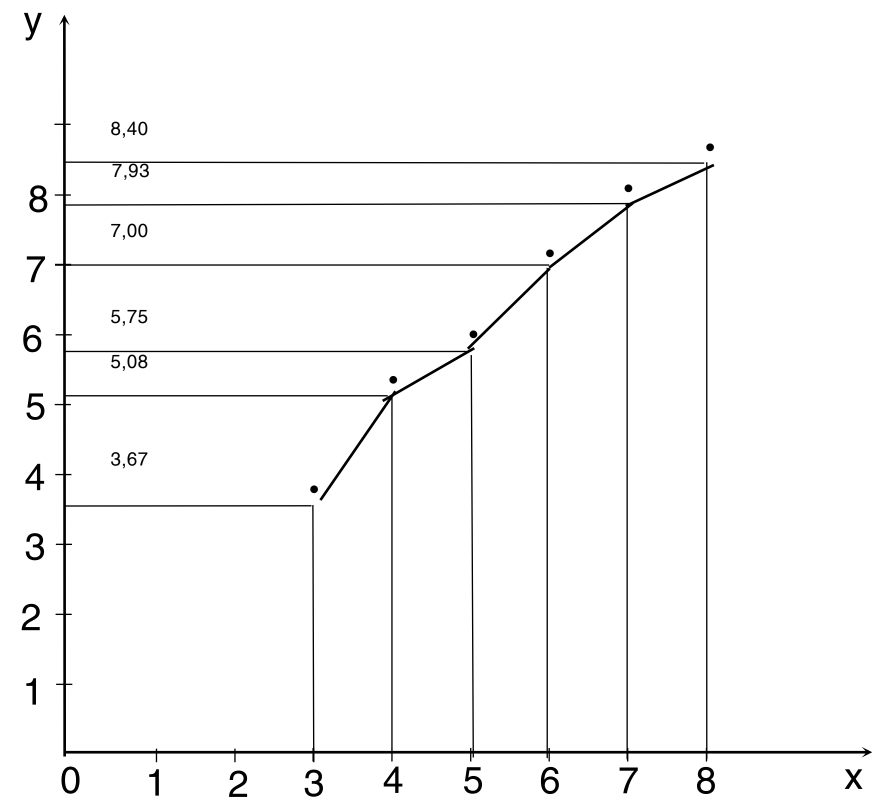
$$\overline{Y}_4 = \frac{1}{12}(4.3 + 5.5 + 6.4) = 5{,}08$$

$$\overline{Y}_5 = \frac{1}{28}(5.11 + 6.13 + 7.4) = 5{,}75$$

$$\overline{Y}_6 = \frac{1}{37}(6.7 + 7.23 + 8.7) = 7,00$$

$$\overline{Y}_7 = \frac{1}{15}(7.4 + 8.8 + 9.3) = 7,93$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{5}(8.3 + 9.2) = 8,40$$



Ta có đường hồi quy mẫu Y theo X như trong hình vẽ.

2. Đường hồi quy tuyến tính mẫu

1- Phương trình đường hồi quy tuyến tính mẫu

Đường hồi quy tuyến tính mẫu Y theo X là đường thẳng có phương trình: $y = ax + b$

"gần" với đường hồi quy mẫu Y theo X nhất, theo nghĩa (a,b) là điểm cực tiểu của hàm:

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\overline{Y}_{x_i} - (ax_i - b)\right]^2$$

Định lý 8.1. Phương trình hồi quy mẫu Y theo X là:

$$y = ax + b$$

trong đó: $$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}.\overline{y}}{\widehat{s}_X^2};\ \ b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Chứng minh. Q(a,b) là hàm hai biến có các đạo hàm riêng liên tục, bị chặn dưới bởi O nên Q có giá trị nhỏ nhất. Ta sẽ chỉ ra Q có một điểm dừng duy nhất, khi đó tọa độ của điểm dừng chính là (a,b) muốn tìm.

Ta có:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overline{Y}_{x_i} - ax_i - b\right).x_i$$

$$= 2\left(a\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i + b\sum_{i=1}^{k} n_i x_i - \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \overline{Y} x_i\right)$$

$$= 2\left(na\overline{x}^2 + nb\overline{x} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} n_{ij} x_i x_j\right)$$

$$= 2n\left(a\overline{x}^2 + b\overline{x} - \overline{xy}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overline{Y}_{x_i} - ax_i - b\right).x_i$$

$$= 2\left(a\sum_{i=1}^{k} n_i x_i + b\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} n_i \overline{Y} x_i\right)$$

$$= 2\left(na\overline{x} + nb - \sum_{j=1}^{k} n_{ij} y_j\right)$$

$$= 2n\left(a\overline{x} + b - \overline{y}\right)$$

từ đó ta có điểm dừng là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\overline{x}^2 + b\overline{x} = \overline{xy} \\ a\overline{x} + b = \overline{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases}$$

hay:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\widehat{s}_X^2};\ \ b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Hoàn toàn tương tự ta có đường hồi quy tuyến tính mẫu X theo Y.

Ví dụ 8.3. Với số liệu như trong ví dụ 8.2, hãy tìm đường hồi quy tuyến tính Y theo X.

Giải. Ta có:

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(3.3 + 4.12 + 5.28 + 6.37 + 7.15 + 8.5) = 5{,}64$$

$$\overline{x}^2 = \frac{1}{100}(3^2.3 + 4^2.12 + 5^2.28 + 6^2.37 + 7^2.15 + 8^2.5) = 33{,}06$$

$$\widehat{s}_X^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 33{,}.6 - 5{,}64^2 = 1{,}25$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{100}(3.1 + 4.5 + 5.16 + 6.24 + 7.31 + 8.18 + 9.5) = 6{,}53$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{100}(3.3.1 + 3.4.2 + 4.4.3 + 4.5.5 + 4.6.4 + 5.5.11 + 5.6.13 + 5.7.4 +$$

$$+ 6.6.7 + 6.7.23 + 6.8.7 + 7.7.4 + 7.8.8 + 7.9.3 + 8.8.3 + 8.9.2)$$

$$= 38{,}05$$

từ đó:

$$a = \frac{38{,}05 - 5{,}64.6{,}53}{1{,}25} = 0{,}9\ ; \quad b = 6{,}53 - 0{,}98.5{,}64 = 1{,}00$$

Đường hồi quy tuyến tính mẫu Y theo X là:

$$y = 0{,}98x + 1{,}00$$

2- Ý nghĩa của đường hồi quy tuyến tính mẫu

Nếu X và Y có tương quan xấp xỉ tuyến tính thì đường hồi quy cho ta khả năng dự báo một cách đơn giản:

$$X = x_o \Rightarrow Y \approx y_o = ax_o + b$$

Ví dụ 8.4. Với số liệu như trong ví dụ 8.2, ta có:

$$X = 9 \Rightarrow Y \approx 0{,}98.9 + 1{,}00 = 9{,}82$$

Điều này có ý nghĩa là, một học sinh có điểm toán 9 thì có khả năng điểm môn văn là 10.

BÀI TẬP

8.1. Điều tra độ mòn lưỡi dao của một xưởng kim khí, ta đo độ dày lưỡi dao và thu được bảng số liệu sau:

Y (chiều dày lưỡi dao: mm)	**X** (thời gian sử dụng: ngày)		
	2	3	5
2,6		1	2
2,8	1	2	
3,0	3	2	

a) Tại sao nói X và Y là phụ thuộc tương quan?

b) Viết phương trình tương quan tuyến tính của Y đối với X.

8.2. Tính hệ số tương quan và tìm hàm hồi quy ước lượng dạng tuyến tính của Y đối với X dựa vào số liệu cho trong bảng tương quan sau đây:

x_i	1	2	2	3	3	4
y_i	3	4	5	5	6	7
n_i	3	2	1	2	1	1

8.3. Tìm hàm ước lượng của hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X dựa vào các bảng số liệu sau:

a)

Y	**X**			
	0,1	0,15	0,2	0,25
10	1			
12	2	3	2	1
14	1	4	2	4

Y	X			
	1	2	3	4
5				2
4			1	2
3		2	2	
2		1	2	
1	2	1		

8.4. Theo dõi trọng lượng Y và tháng tuổi X của một loại con giống thu được bảng số liệu sau:

X	Y			
	5	6	7	9
1	8	2		
2	1	6	4	4
3			8	7
4			5	5

a) Hãy vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X

b) Tìm hàm hồi quy ước lượng dạng tuyến tính của Y đối với X.

8.5. Hãy tìm hàm hồi quy ước lượng dạng tuyến tính biểu diễn sự phụ thuộc giữa mức suy giảm hàm lượng đường Y (%) và thời gian chế biến X trên cơ sở bảng số liệu sau:

X	Y				
	30	35	40	45	50
2	1				
4	1	3	1	2	
6		1	2	3	
8			2	1	1
10					2

8.6. Tìm hàm hồi quy ước lượng dạng tuyến tính của Y đối với X dựa vào các bảng số liệu sau đây:

a)

X	Y			
	10	20	30	40
0,4	3		6	7
0,6		2	6	4
0,8	3	19		

b)

X	Y		
	15	20	25
1			1
2		1	1
3	1	2	
4	4		

8.7. Bảng dưới đây chỉ kết quả thu hoạch Y theo lượng phân bón X của một loại hoa màu trên 100 thửa ruộng:

Y	X				
	1	2	3	4	5
14	10	8			
15		12	7		
16			28	6	
17				8	9
18					12

a) Hãy vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X

b) Tìm hệ số tương mẫu

c) Tìm phương trình hồi quy tuyến tính của Y đối với X.

8.8. Nghiên cứu mối liên hệ giữa X là số tiền đầu tư cho việc phòng bệnh tính theo đầu người và Y là tỉ lệ người mắc bệnh ở 50 địa phương ta thu được bảng tương quan thực nghiệm sau đây:

X (đồng)	**Y** (%)				
	2	2,5	3	3,5	4
100				2	3
200			3	6	2
300		4	6	3	
400	1	6	4	1	
500	6	3			

a) Tìm phương trình hồi quy tuyến tính của Y đối với X qua mẫu trên

b) Tìm hệ số tương quan tuyến tính

c) Nếu năm sau đầu tư cho phòng bệnh là 600 đ/người thì tỷ lệ mắc bệnh là bao nhiêu phần trăm?

8.9. Tìm hàm ước lượng của hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X và của X đối với Y dựa vào các bảng tương quan sau đây:

a)

X	Y		
	10	20	30
1			1
2		1	1
3	1	2	
4	4		

b)

X	Y			
	1	2	3	4
10	8	3		
12	1	7	1	
14	1		9	10

8.10. Cho bảng tương quan:

Y	X				
	1	2	3	4	5
1	3				3
2	2	2		2	2
3		1	2	1	
4			2		

a) Vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X

b) Tính hệ số tương quan mẫu r

c) Từ các kết quả trên hãy nhận xét về dạng hàm hồi quy của Y đối với X.

8.11. Cho bảng tương quan các số liệu về mức độ tăng năng suất lao động X(%) và tổng sản lượng của các xí nghiệp công nghiệp Y (% so với năm trước).

X	Y					
	85	95	105	115	125	135
85	1	1				
95	1	2	2			
105	1	3	6	5		
115		1	4	4	2	2
125			3	2	2	1
135				1	2	1
145					1	2

a) Vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X

b) Tìm hàm ước lượng của hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X.

8.12. Các số liệu của việc phân tích 100 mẫu quặng sắt được cho ở bảng dưới. Hàm lượng oxyt sắt X (%), hàm lượng tạp chất Y (%).

X	**Y**					
	3	9	15	21	27	33
35				1		1
45			1	5	4	5
55			2	18	10	2
65		6	14	2	2	
75		6	3			
85	4	8				
95	6					

a) Vẽ đường hồi quy thực nghiệm của Y đối với X

b) Ước lượng hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X.

8.13. Kết quả của việc theo dõi mối quan hệ giữa chiều cao và trọng lượng Y của học sinh, ta có bảng số liệu sau đây:

X (cm)	**Y** (cm)				
	24	27	30	33	36
120	1	3			
125		2	6	1	
130		1	5	5	
135		1	6	7	2
140			1	4	2
145				1	1
150					1

a) Tìm hệ số tương quan mẫu

b) Tìm ước lượng của hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X.

8.14. Nghiên cứu về sự ảnh hưởng của thu nhập X đối với mức độ tiêu dùng Y về một loại thực phẩm, người ta điều tra ở 200 gia đình và thu được bảng số liệu sau đây:

Y	X					
	10	20	30	40	50	60
15	5	7				
25		20	23			
35			30	47	2	
45			10	11	20	6
55				9	7	3

Giả thiết Y phụ thuộc tuyến tính vào X.

a) Hãy ước lượng hàm hồi quy tuyến tính của Y đối với X và đánh giá mức độ chặt chẽ của sự phụ thuộc đó

b) Hãy dự đoán mức tiêu dùng nếu thu nhập là 80 nghìn/đầu người.

8.15. Cho bảng tương quan:

X	Y				
	1,25	1,5	1,75	2	2,25
8			1	2	3
13			1	4	3
18		4	7	1	
23	2	7	5		
28	6	4			

a) Tìm hệ số tương quan mẫu

b) Tìm phương trình hồi quy tuyến tính mẫu.

PHỤ LỤC
PHỤ LỤC 1
GIÁ TRỊ HÀM MẬT ĐỘ GAUSS

$$f(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-U^{1/2}}$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	25029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29658	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	0499	00485	00470	00457

PHỤ LỤC 2
GIÁ TRỊ TÍCH PHÂN LAPLACE

$$\Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{o}^{U} e^{-t^2/2} dt$$

U	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09817	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146		19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	19497	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	22907	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	26115	29389	29673	29955	30234	30551	30785	31057	31327
0,9	31594	29103	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	31859	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	34375	36664	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	36650	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	38686	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	40490	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	42073	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	43448	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	44630	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	45637	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	46485	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47193	47331	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	47778	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48257	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48645	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	48956	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49202	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49396	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49547	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49664	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49752	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49819								
3,5	4997674									
4,0	4999683									
4,5	4999966									
5,0	4999997133									

PHỤ LỤC 3
QUY LUẬT POISSON

Trong bảng cho giá trị: $P(X = k) = e^{-a} \dfrac{a^k}{k!}$

k	a				
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0756
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016
5				0,0001	0,0002

k	a				
	0,6	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
0	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0899	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6		0,0001	0,0002	0,0003	0,0005

k	a				
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
0	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302
1	0,3347	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057
2	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850
3	0,1255	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158
4	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888
5	0,1141	0,1361	0,0668	0,1008	0,1322
6	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771
7	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385
8	0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169
9		0,0002	0,0009	0,0027	0,0066
10			0,0002	0,0008	0,0023
11				0,0002	0,0007
12				0,0001	0,0002

PHỤ LỤC 4
BẢNG PHÂN PHỐI STUDENT

Trong bảng cho giá trị T_α^k sao cho:

$$P[|T_k| \le T_\alpha^k] = 1 - \alpha \quad (\text{k là bậc tự do})$$

n/ α	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,0777	6,3137	12,7062	25,4519	63,6559	127,3211
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,2054	9,9250	14,0892
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,1765	5,8480	7,4532
4	1,5332	2,1318	2,7765	3,4954	4,6041	5,5975
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,1634	4,0321	4,7733
6	1,4398	1,9432	2,4469	2,9687	3,7074	4,3168
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,8412	3,4995	4,0294
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,7515	3,3554	3,8325
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,6850	3,2498	3,6786
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,6338	3,1693	3,5814
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,5931	3,1058	3,4966
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,5600	3,0545	3,4284
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,5326	3,0123	3,3725
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,5096	2,9768	3,3257
15	1,3406	1,7531	2,1315	2,4899	2,9467	3,2860
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,4729	2,9208	3,2520
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,4581	2,8982	3,2224
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,4450	2,8784	3,1966
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,4334	2,8609	3,1737
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,4231	2,8453	3,1534
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,4138	2,8315	3,1352
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,4055	2,8188	3,1188
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,3979	2,8073	3,1040
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,3910	2,7970	3,0905
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,3846	2,7874	3,0782
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,3788	2,7787	3,0669
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,3834	2,7707	3,0565
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,3685	2,7633	3,0470
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,3638	2,7564	3,0280
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,3596	2,7500	3,0298