

CHƯƠNG I. ĐẠI CƯƠNG VỀ XÁC SUẤT

§1: Biến cố và quan hệ giữa các biến cố

1. Phép thử và biến cố.

2. Phân loại biến cố : gồm 3 loại

- Biến cố chắc chắn: Ω
- Biến cố không thể có hay không thể xảy ra: $\emptyset$
- Biến cố ngẫu nhiên: $A, B, C \dots$

3. So sánh các biến cố.

Định nghĩa 1.1: $A \subset B$ (A nằm trong B hay A kéo theo B) $\Leftrightarrow$ nếu A xảy ra thì B xảy ra. Vậy

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

Định nghĩa 1.2: A được gọi là biến cố sơ cấp $\Leftrightarrow \exists B \subset A, B \neq A$.

4. Các phép toán trên biến cố (hình 1.1 và 1.2):

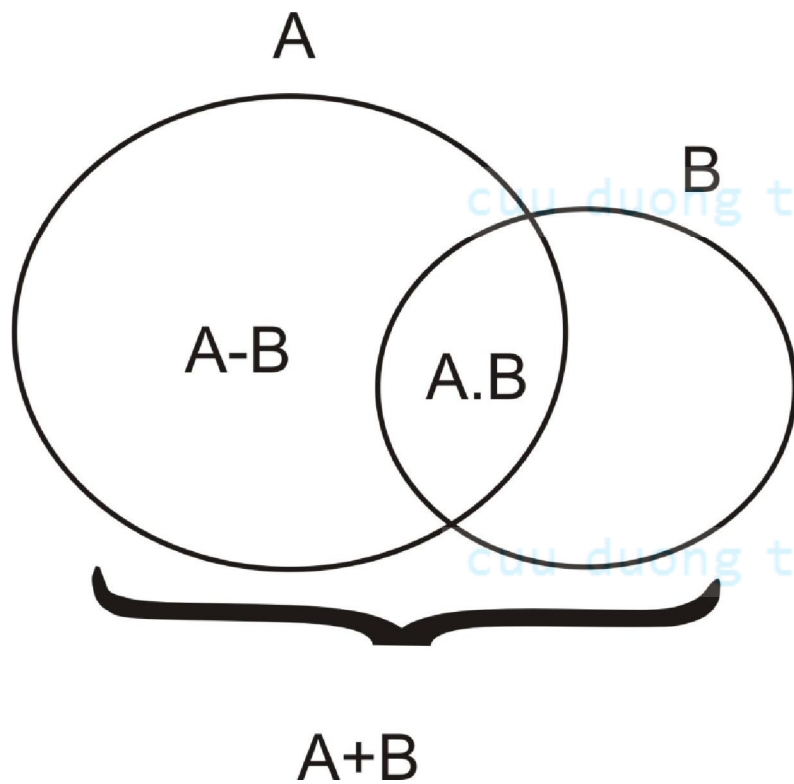
$A.B = A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra **và** B xảy ra.

$A + B = A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra **hoặc** B xảy ra.

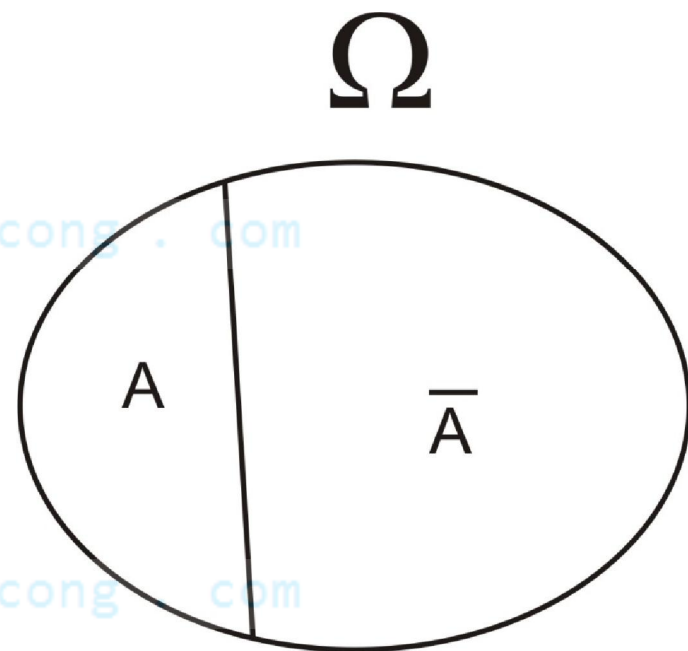
$A - B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra và B không xảy ra.

$\overline{A} = \Omega - A$ xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

- Hình 1.1



Hình 1.2



- Các phép toán của biến cố có tính chất giống các phép toán của tập hợp, trong đó có các tính chất đối ngẫu:

$$\overline{\sum_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}, \quad \overline{\prod_i A_i} = \sum_i \overline{A_i}$$

Ngôn ngữ biểu diễn: tổng = có ít nhất một ; tích = tất cả đều.

(A = có ít nhất 1 phần tử có tính chất x) suy ra (không A = tất cả đều không có tính chất x).

Ví dụ 1.1: (A = có ít nhất 1 người không bị lùn) suy ra (không A = tất cả đều lùn).

Định nghĩa 1.3: biến cố A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu

$$A.B = \emptyset$$

§2: Các định nghĩa xác suất.

- **1. Định nghĩa cổ điển về xác suất**
- **Định nghĩa 2.1:** giả sử trong mỗi phép thử các kết cục là đồng khả năng và có tất cả n kết cục như vậy. Kí hiệu m là số các kết cục thuận lợi cho biến cố A . Khi ấy xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

- **Ví dụ 2.1:** Trong 1 hộp có 6 bi trắng, 4 bi đen. Lấy ngẫu nhiên ra 5 bi. Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng.

- **Giải**
$$P = \frac{C_6^3 \cdot C_4^2}{C_{10}^5} \quad (\text{phân phối siêu bội})$$

Chú ý: lấy 1 lúc 5 bi giống lấy lần lượt 5 bi không hoàn lại

- **Ví dụ 2.2:** Có 10 người lên ngẫu nhiên 5 toa tàu. Tính xác suất để toa thứ nhất không có người lên:

$$P = \frac{4^{10}}{5^{10}}$$

2. Định nghĩa hình học về xác suất:

Định nghĩa 2.2: Giả sử trong mỗi phép thử các kết cục là đồng khả năng và được biểu diễn bằng các điểm hình học trên miền Ω . Kí hiệu D là miền biểu diễn các kết cục thuận lợi cho biến cố A . Khi ấy xác suất của biến cố A là:

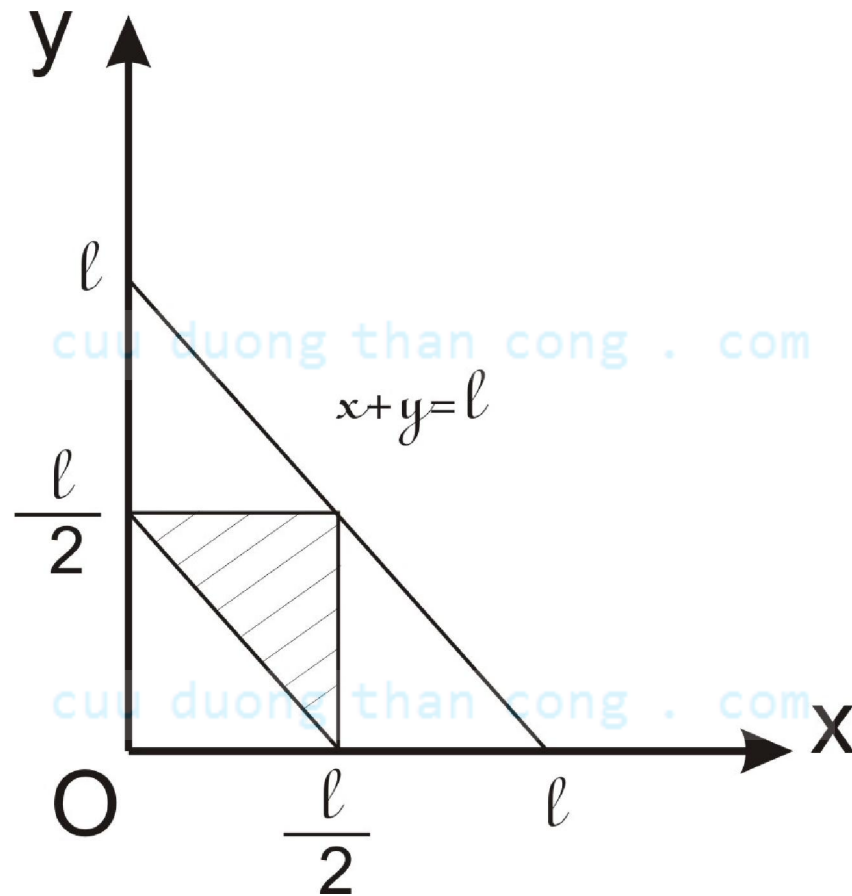
$$P(A) = \frac{\text{độ đo } D}{\text{độ đo } \Omega} \quad (\text{độ đo là độ dài, diện tích hoặc thể tích})$$

- **Ví dụ 2.3:** Chia đoạn AB cố định ngẫu nhiên thành 3 đoạn.
Tính xác suất để 3 đoạn đó lập thành 3 cạnh của 1 tam giác.
- Giải: Gọi độ dài đoạn thứ 1,2 là x,y. Khi ấy đoạn thứ 3 là l-x-y

$$\Omega \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x + y < l \end{cases}$$

$$\Omega \supset D \begin{cases} x + y > l - x - y \\ x + l - x - y > y \Leftrightarrow \\ y + l - x - y > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y > \frac{l}{2} \\ y < \frac{l}{2} \\ x < \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

HÌNH 2.1



- **Ví dụ 2.4:** Ném lên mặt phẳng có kẻ những đường thẳng song song cách nhau 1 khoảng là $2a$ một cây kim có độ dài $2t < 2a$. Tính xác suất để cây kim cắt 1 trong các đường thẳng song song

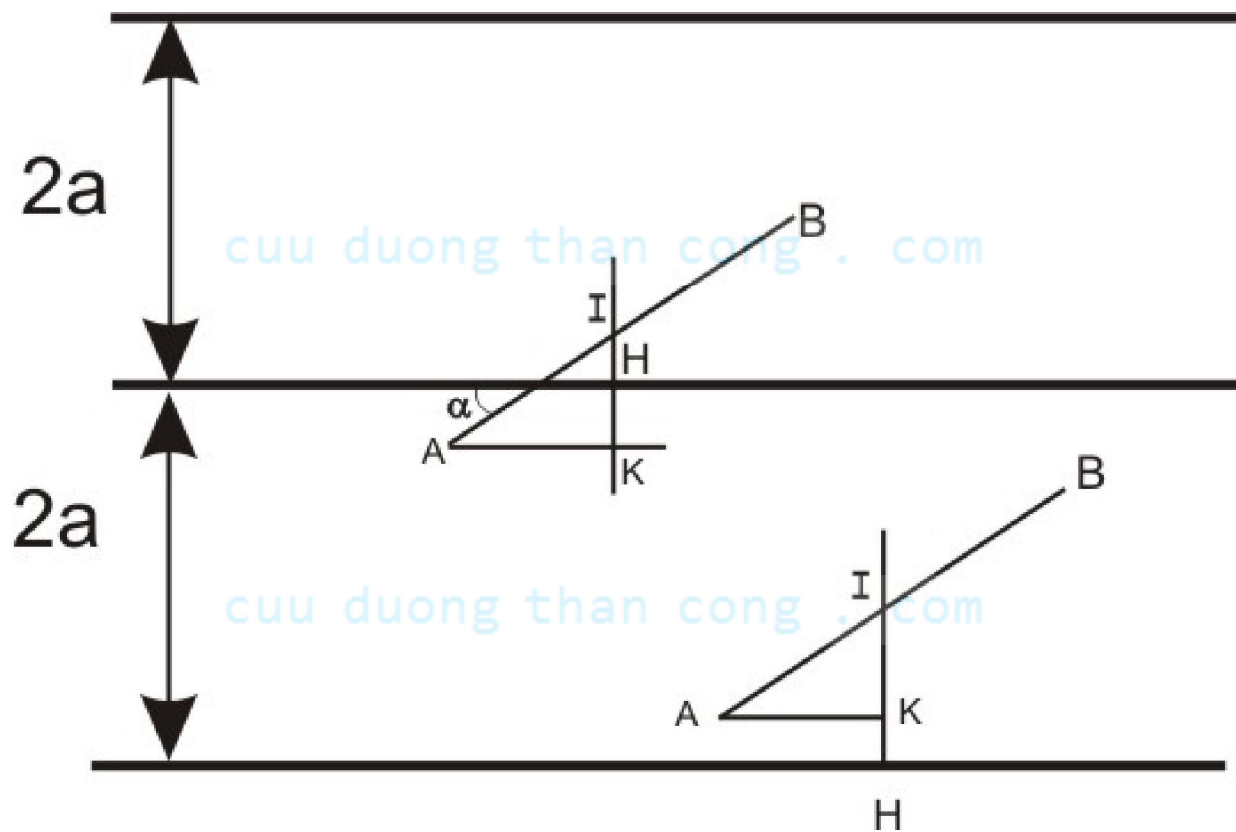
Giải: Gọi I là điểm giữa cây kim, IH là khoảng cách từ I tới đường thẳng gần nhất; α là góc nghiêng. Khi ấy ta có:

$$\Omega \left\{ \begin{array}{l} 0 < \alpha \leq \Pi \\ 0 < h = IH \leq a \end{array} \right. \Rightarrow d t \Omega = \Pi . a$$

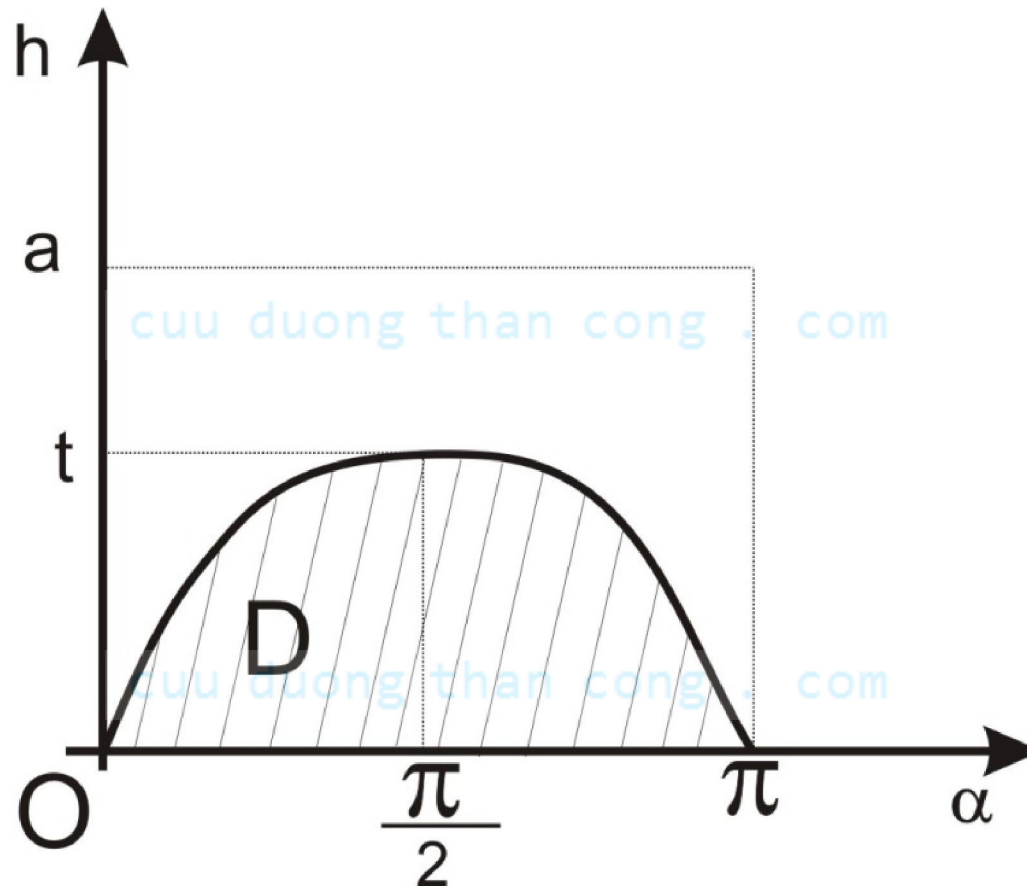
$$\Omega \supset D \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq \Pi \\ 0 \leq h \leq IK = t \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{diện tích } D = \int_0^{\pi} t \sin \alpha d \alpha = 2t \Rightarrow P(A) = \frac{2t}{\Pi a}$$

HÌNH 2.2



HÌNH 2.3



Các tính chất của xác suất : xem sách giáo khoa

3. Định nghĩa xác suất theo tiên đề

- **Định nghĩa 2.3:** Ký hiệu Σ là tập hợp các biến cố trong 1 phép thử. Ta gọi xác suất là 1 quy tắc đặt mỗi biến cố A với 1 số $P(A)$ thỏa mãn các tiên đề:

(I) $0 \leq P(A) \leq 1$

(II) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$

(III) Với mọi dãy biến cố đôi một xung khắc, ta có:

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Hệ quả :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

4. Định nghĩa xác suất theo thống kê: xem sách giáo khoa

§3: Các định lý xác suất

1: Định lý cộng xác suất

Định lý 3.1(hình 3.1): $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

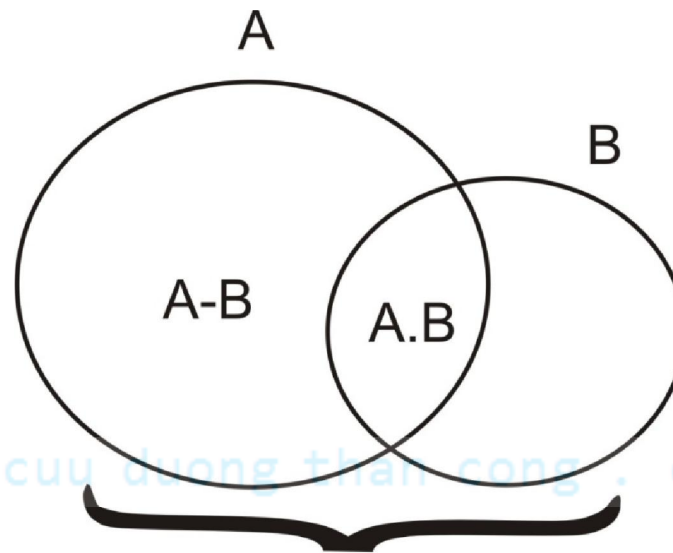
- **Ví dụ 3.1:** Có 10 người lên ngẫu nhiên 5 toa tàu. Tính xác suất để toa thứ nhất hoặc toa thứ hai không có người lên.

A là biến cố toa thứ 1 không có người lên,

B là biến cố toa thứ 2 không có người lên. Ta có :

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{4^{10}}{5^{10}} + \frac{4^{10}}{5^{10}} - \frac{3^{10}}{5^{10}} \end{aligned}$$

HÌNH 3.1



Định lý 3.1

A+B

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

Chú ý: Ở vế phải trong tổng thứ 1 có C_n^1 số hạng, trong tổng thứ 2 có C_n^2 số hạng,..., trong tổng thứ k có C_n^k số hạng,..., trong tổng thứ n có C_n^n số hạng.

Ví dụ 3.2: Có k người lên ngẫu nhiên n toa tàu ($k > n$).
Tính xác suất để tất cả các toa đều có người lên

- Bài giải**
- A - tất cả các toa đều có người lên
 - $\overline{A}$ - có ít nhất 1 toa không có người lên.
 - A_i - toa thứ i không có người lên, $i = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow \overline{A} = \sum_{i=1}^n A_i$$

Vì các toa tàu có vai trò như nhau nên áp dụng công thức cộng xác suất ta có :

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = C_n^1 \cdot P(A_1) - C_n^2 \cdot P(A_1 A_2) + C_n^3 \cdot P(A_1 A_2 A_3) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

$$= C_n^1 \frac{(n-1)^k}{n^k} - C_n^2 \frac{(n-2)^k}{n^k} + C_n^3 \frac{(n-3)^k}{n^k} + \dots + (-1)^n C_n^{n-1} \cdot \frac{1^k}{n^k} + 0$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Ví dụ 3.3: Có n bức thư bỏ ngẫu nhiên vào n phong bì có đề sẵn địa chỉ.

- Tính xác suất để có ít nhất 1 bức thư đúng địa chỉ.
- Tính xác suất để chỉ có đúng 1 bức thư đúng địa chỉ
- Tính xác suất để chỉ có đúng m bức thư đúng địa chỉ

Bài giải A - Có ít nhất 1 bức đúng. $\Rightarrow A = \sum_{i=1}^n A_i$
 A_i - Bức thứ i đúng

Vì các bức thư có vai trò như nhau nên áp dụng công thức cộng xác suất ta có :

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A) &= C_n^1 \cdot P(A_1) - C_n^2 \cdot P(A_1 A_2) + C_n^3 \cdot P(A_1 A_2 A_3) + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \\ &= C_n^1 \frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} + \dots + (-1)^n C_n^{n-1} \cdot \frac{1!}{n!} + \\ &+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

B_n -Không có bức nào đúng địa chỉ trong n bức thư

C_n -Chỉ có đúng 1 bức đúng địa chỉ trong n bức thư

$$B_n = \overline{A} \Rightarrow P(B_n) = 1 - P(A) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

$$P(C_n) = n \cdot P(A_1) \cdot P(B_{n-1}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}$$

$C_{n,m}$ -Chỉ có đúng m bức đúng địa chỉ trong n bức thư

$$P(A_1 A_2 \dots A_m) = \frac{1}{A_n^m} \Rightarrow P(C_{n,m}) = C_n^m \cdot P(A_1 A_2 \dots A_m) \cdot P(B_{n-m}) =$$

$$\frac{1}{m!} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^{n-m} \cdot \frac{1}{(n-m)!} \right) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

2. Định lý nhân xác suất

- **Định nghĩa 3.2:** Xác suất của biến cố B khi biết rằng biến cố A đã xảy ra được gọi là xác suất của B với điều kiện A và kí hiệu là $P(B/A)$.
- **Chú ý:** biến cố A có thể xảy ra trước, đồng thời hoặc sau B
- Ngôn ngữ biểu diễn: $P(B/A)$ = xác suất B biết (nếu) A hoặc Cho A... tính xác suất B.
- **Định lý 3.2:** $P(AB)=P(A).P(B/A)=P(B).P(A/B)$

$$P(A_1.A_2...A_n) = P(A_1).P(A_2 / A_1).P(A_3 / A_1A_2)...P(A_n / A_1A_2...A_{n-1})$$

- **Hệ quả:**

$$P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B).P(A / B)}{P(A)}$$

- **Định nghĩa 3.3:** Hai biến cố A, B được gọi là độc lập với nhau nếu xác suất của biến cố này không phụ thuộc vào việc biến cố kia đã xảy ra hay chưa trong 1 phép thử.
- **Định nghĩa 3.4:** Một hệ các biến cố được gọi là độc lập toàn phần nếu mỗi biến cố của hệ độc lập với 1 tổ hợp bất kỳ của các biến cố còn lại.
- **Định lý 3.3:** A, B độc lập khi và chỉ khi $P(AB) = P(A).P(B)$
- **Định lý 3.4:** Giả sử $A_i, i = 1, n$ là độc lập toàn phần. Khi ấy ta có:

$$1. P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

$$2. P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\overline{A_i})$$

Chú ý: Trong trường hợp độc lập không nên dùng công thức cộng xác suất mà nên dùng công thức nhân xác suất.

- **Ví dụ 3.3:** 1 mạng gồm n chi tiết mắc nối tiếp. Xác suất hỏng của chi tiết thứ i là P_i . Tính xác suất để mạng hỏng.

- Giải: A_i - biến cố chi tiết thứ i hỏng

A - biến cố mạng hỏng

$$\Rightarrow A = \sum_{i=1}^n A_i$$

- Vậy xác suất để mạng hỏng là:

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\overline{A_i}) = 1 - [(1 - P_1)(1 - P_2) \dots (1 - P_n)]$$

- Chú ý: $P(\overline{A}) = (1 - P_1)(1 - P_2) \dots (1 - P_n)$

Ví dụ 3.4: Tung 3 con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để:

1. Tổng số chấm bằng 9 biết có ít nhất 1 mặt 1 chấm
2. Có ít nhất một mặt 1 chấm biết số chấm khác nhau từng đôi một.

• **Giải:**

1. Gọi A là có ít nhất 1 mặt 1 chấm.

B là tổng số chấm bằng 9

C là các số chấm khác nhau từng đôi một

$$P(A) = \frac{6^3 - 5^3}{6^3} \Rightarrow P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{15}{6^3} \cdot \frac{6^3}{6^3 - 5^3} = \frac{15}{91}$$
$$P(AB) = \frac{15}{6^3}$$

• Số cách để có ít nhất một mặt 1 chấm và tổng bằng 9:

• 1+2+6 suy ra có 3! cách

• 1+3+5 suy ra có 3! cách

• 1+4+4 suy ra có 3 cách

Suy ra có 15 cách để có ít nhất một mặt 1 chấm và tổng bằng 9

2.

$$P(C) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$$
$$\Rightarrow P(A/C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{1}{2}$$
$$P(AC) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$$

Ví dụ 3.5: Từ 1 hộp có 10 bi trắng, 6 bi đen, người ta lấy lần lượt không hoàn lại từng bi cho đến khi được 5 bi đen thì dừng lại. Tính xác suất để lần thứ 3 lấy được bi trắng nếu biết rằng đã dừng lại ở lần thứ 9.

Giải:

Gọi A là dừng lại ở lần thứ 9, B là lần thứ 3 lấy được bi trắng



$$\underbrace{m_A : 4T + 4Đ}_{\text{cuu duong than cong . com}}$$

$$\underbrace{m_{AB} : 3T + 4Đ}$$

$$P(B / A) = \frac{m_{AB}}{m_A} = \frac{C_7^4}{C_8^4}$$

3. Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes:

- **Định nghĩa 3.5:** Hệ $H_i, i = \overline{1, n}$ được gọi là hệ đầy đủ, nếu trong mỗi phép thử nhất định 1 và chỉ 1 trong các biến cố H_i xảy ra.
- **Định lý 3.4:** Giả sử $H_i, i = \overline{1, n}$ là hệ đầy đủ. Ta có:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i).P(A/H_i) \quad (\text{công thức đầy đủ}).$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i).P(A/H_i)}{P(A)}, i = \overline{1, n} \quad (\text{công thức Bayess})$$

Chú ý:

$$1. \quad P(B / A) = \sum_{i=1}^n P(H_i / A) P(B / H_i A)$$

$$2. \quad P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Với:

$$P(AB) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(AB / H_i)$$

Ví dụ 3.5: Có 2 hộp bi cùng cỡ, hộp 1 chứa 4 bi trắng và 6 bi xanh, hộp 2 chứa 5 bi trắng và 7 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, từ hộp đó lấy ngẫu nhiên 1 bi thì được bi trắng. Tìm xác suất để viên bi tiếp theo, cũng lấy từ hộp trên ra là bi trắng.

Giải: Lấy ngẫu nhiên 1 hộp: H_1 lấy được hộp 1
 H_2 lấy được hộp 2

$$P(H_1) = P(H_2) = 1/2$$

Hộp 1: $4t + 6x$, Hộp 2: $5t + 7x$

A- biến cố lấy được bi trắng ở lần 1

B- biến cố lấy được bi trắng ở lần 2

$$\Rightarrow P(B / A)$$

Cách 1:

$$\begin{aligned}P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}\end{aligned}$$

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10}}{P(A)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}}{P(A)}$$

$$P(B/A) = P(H_1/A) \cdot \underbrace{P(B/H_1A)}_{3/9} + P(H_2/A) \cdot \underbrace{P(B/H_2A)}_{4/11}$$

Cách 2:
$$P(B / A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}$$

$$P(AB) = P(H_1).P(AB/H_1) + P(H_2).P(AB/H_2)$$

$$= P(H_1).P(A/H_1).P(B/AH_1) + P(H_2).P(A/H_2).P(B/AH_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11}$$

Chú ý

- Nếu sau lần 1 đã lấy được bi trắng ta trả bi vào hộp rồi mới lấy tiếp lần 2 thì lời giải thay đổi như sau:

$$\frac{3}{9} \rightarrow \frac{4}{10};$$

$$\frac{4}{11} \rightarrow \frac{5}{12}$$

- $P(B)=P(A)$, trong cả 2 bài toán.
- Nếu câu hỏi là :Giả sử lần 1 đã lấy được bi trắng tính xác suất để bi đó lấy được ở hộp 1, thì đáp số là:

$$P(H_1 / A)$$

Ví dụ 3.6: Có 1 tin tức điện báo tạo thành từ các tín hiệu(.)và (-). Qua thống kê cho biết là do tạp âm, bình quân $\frac{2}{5}$ tín hiệu(.) và $\frac{1}{3}$ tín hiệu(-) bị méo. Biết rằng tỉ số các tín hiệu chấm và vạch trong tin truyền đi là 5:3. Tính xác suất sao cho nhận đúng tín hiệu truyền đi nếu đã nhận được chấm.

- **Giải :**

H1 là biến cố truyền đi chấm,

H2 là biến cố truyền đi vạch.

$$\Rightarrow P(H_1) = \frac{5}{8}, P(H_2) = \frac{3}{8}$$

- Gọi A là biến cố nhận được chấm .

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2)$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

4. Công thức Bernoulli:

- **Định lý 3.5:** Giả sử trong mỗi phép thử 1 biến cố A có thể xuất hiện với xác suất p (khi A xuất hiện ta quy ước là thành công). Thực hiện n phép thử giống nhau như vậy. Khi ấy xác suất để có đúng k lần thành công là :

$$P(n, k, p) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{Phân phối nhị thức})$$

Chú ý 1 : từ nay trở đi ta ký hiệu $q=1-p$

Chú ý 2: Thực ra công thức có dạng

$$P(n, k, p) = C_n^k \cdot p^k \cdot C_{n-k}^{n-k} \cdot q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

Định nghĩa 3.6: Kí hiệu k_0 là số sao cho:

$$P(n, k_0, p) = \text{Max } P(n, k, p), \quad 0 \leq k \leq n$$

Khi ấy k_0 được gọi là số lần thành công có nhiều khả năng xuất hiện nhất (tức là ứng với xác suất lớn nhất)

$$\text{Định lý 3.6:} \quad k_0 = \left[(n+1)p \right] \quad \text{hoặc} \quad k_0 = \left[(n+1)p \right] - 1$$

Chú ý: $P(n, k, 1/2) = C_n^k \cdot (0,5)^n$

Ví dụ 3.7: Tung cùng lúc 20 con xúc xắc.

1. Tính xác suất để có đúng 4 mặt lục xuất hiện.
2. Tính số mặt lục có nhiều khả năng xuất hiện nhất.
3. Tính xác suất để có ít nhất 1 mặt lục.
4. Tính số con xúc sắc ít nhất cần tung để xác suất được ít nhất 1 mặt lục không nhỏ hơn 0,99.

Giải: 1) $P(20, 4, 1/6) = C_{20}^4 (1/6)^4 \cdot (5/6)^{16}$

2) $k_0 = \left[(20+1)/6 \right] = 3 \vee k_0 = 2$

3) $P = 1 - (5/6)^{20} = 0,9739$

4) $1 - (5/6)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow (5/6)^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq 26$

Ví dụ 3.8: Trong 1 hộp có N bi trong đó có M bi trắng còn lại là đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi **có hoàn lại** ra n bi. Khi ấy xác suất để lấy được đúng k bi trắng được tính bằng công thức Bernoulli nói trên với $p = M/N$ (phân phối **nhị thức**) :

$$P\left(n, k, \frac{M}{N}\right) = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \cdot C_{n-k}^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

Ví dụ 3.9: Trong 1 hộp có N bi trong đó có M bi trắng còn lại là đen. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi **không hoàn lại** ra n bi. Khi ấy xác suất để lấy được đúng k bi trắng là

$$P = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = \overline{0, n} \quad (\text{Phân phối } \mathbf{siêu\ bội})$$

Chú ý: Ở đây $N-M$ là số bi không trắng.

- **Chú ý: Lấy bi : + Không hoàn lại là siêu bội
+ Có hoàn lại là nhị thức.**