

Chương 2: Đại lượng ngẫu nhiên, vectơ ngẫu nhiên

§1: Đại lượng ngẫu nhiên

- **Khái niệm:** Đại lượng ngẫu nhiên là đại lượng có thể ngẫu nhiên nhận một số giá trị với các xác suất tương ứng xác định.
- Đại lượng ngẫu nhiên là rời rạc nếu số các giá trị của nó là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được
- Đại lượng ngẫu nhiên là liên tục nếu tập hợp tất cả các giá trị có thể có của nó lấp đầy ít nhất 1 khoảng trên trục số.

§2: Các phương pháp mô tả đại lượng ngẫu nhiên

1. Bảng phân phối xác suất (chỉ dùng cho rời rạc)

Định nghĩa 2.1: $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (\dots)$ vô hạn

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$(\dots)$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	$(\dots)$

Chú ý: $\sum_i p_i = 1$

Ví dụ 2.1: 1 người bắn lần lượt từng viên đạn vào bia với xác suất trúng đích của mỗi viên là p , cho đến khi trúng thì dừng.

a) Hãy lập bảng phân phối xác suất của X là số đạn đã bắn ra cho đến khi dừng lại.

b) Tính xác suất để $X > n-1$.

c) Tính xác suất để $X = m$ nếu $X > n-1, m > n$.

a)

X	1	2	3	$\dots$	k	$\dots$
P	p	qp	$q^2 p$	$\dots$	$q^{k-1} p$	$\dots$

$$b) \quad P(X > n-1) = P(X \geq n) = q^{n-1}$$

$$c) \quad P(X = m / X \geq n) = \frac{P(X = m)}{P(X \geq n)} = \frac{q^{m-1} \cdot p}{q^{n-1}} = q^{m-n} \cdot p$$

Ví dụ 2.1: 1 người bắn lần lượt từng viên đạn vào bia với xác suất trúng đích của mỗi viên là p , cho đến khi trúng thì dừng hoặc bắn hết 20 viên thì ngừng. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X là số đạn đã bắn ra cho đến khi dừng lại. Tính xác suất để $X = m$ nếu $X > n-1, 20 > m > n$.

X	1	2	3	...	19	20
P	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{18} p$	q^{19}

$$P(X = m / X \geq n) = \frac{P(X = m)}{P(X \geq n)} = \frac{q^{m-1} \cdot p}{q^{n-1}} = q^{m-n} \cdot p$$

2. Hàm phân phối xác suất(rời rạc và liên tục):

- **Định nghĩa 2.2:** hàm phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X là: $F_X(x) = F(x) = P(X < x)$

Tính chất:

- | | |
|--|-------------------|
| 1. $F(x)$ là hàm không giảm | các t/c đặc trưng |
| 2. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ | |
| 3. $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$ | |

Hệ quả 1: Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục thì $F_X(x)$ liên tục trên toàn trục số

- **Hệ quả 2:** Nếu X liên tục thì $P(X = x_0) = 0, \forall x_0$

Chú ý: Trong trường hợp liên tục sự thay đổi tại 1 điểm không có ý nghĩa

- **Hệ quả 3:** Giả sử X rời rạc và có bảng phân phối xác suất như trên. Khi ấy

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

- **Ví dụ 2.3:**

X	2	5	7
P	0,1	0,5	0,4

 $\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq 2 \\ 0,1 & \text{khi } 2 < x \leq 5 \\ 0,6 & \text{khi } 5 < x \leq 7 \\ 1 & \text{khi } 7 < x \end{cases}$

Chú ý: Hàm phân phối $F_X(x) = 0$ bên trái miền giá trị của X và $F_X(x) = 1$ bên phải miền giá trị của X .

3. Hàm mật độ xác suất (chỉ dùng cho đại lượng ngẫu nhiên liên tục)

- Định nghĩa 2.3: Hàm mật độ xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X liên tục là:

$$f_X(x) = f(x) = [F_X(x)]'_x$$

- Định lý 2.1:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

- Tính chất:
$$\left. \begin{array}{l} (1) f(x) \geq 0 \\ (2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \end{array} \right\} \text{-tính chất đặc trưng}$$

$$(3) P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) \cdot dx$$

Chú ý: Hàm mật độ $f_X(x) = 0$ bên ngoài miền giá trị của X .

- Ví dụ 2.4:

$$X \sim f(x) = \begin{cases} a \cos^2 x, & x \in [0, \pi / 2] \\ 0, & x \notin [0, \pi / 2] \end{cases}$$

- 1. Xác định a

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} a \cos^2 x dx = \frac{a}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{a}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

2. Hãy tìm hàm phân phối $F_X(x)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 0 \\ \int_0^x \frac{4}{\pi} \cos^2 t dt = \frac{2}{\pi} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right), & \text{nếu } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{nếu } x > \pi/2 \end{cases}$$

3. Hãy tính xác suất để X nhận giá trị trong khoảng:

$$(-\pi/4, \pi/4)$$

$$P(-\pi/4 < X < \pi/4) = F(\pi/4) - F(-\pi/4)$$

$$P(-\pi/4 < X < \pi/4) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (4/\pi) \cos^2 x dx$$



Ví dụ 2.5: Hai cầu thủ bóng rổ lần lượt ném bóng vào rổ cho đến chừng nào 1 người ném lọt rổ thì thôi.

a) Lập dãy phân phối của số lần ném của mỗi người và tổng số bóng của cả 2 người nếu xác suất lọt rổ của người thứ nhất, thứ hai là p_1, p_2 .

b) Tính xác suất để người thứ 2 ném lọt rổ trước.

Giải: $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$

- X là số bóng của người thứ 1
- Y là số bóng của người thứ 2
- Z là tổng số bóng của cả 2 người.
- A là biến cố người thứ 2 ném lọt rổ trước.

X	1	2	...	k	...
P	$p_1 + q_1 p_2 = 1 - q_1 q_2$	$q_1 q_2 (p_1 + q_1 p_2)$	...	$q_1^{k-1} q_2^{k-1} (p_1 + q_1 p_2)$	...

Y	0	1	2	...	k	...
P	p_1	$\left[q_1 (p_2 + q_2 p_1) \right] = \left[q_1 (1 - q_2 q_1) \right]$	$q_1 q_2 [\dots]$	...	$q_1^{k-1} q_2^{k-1} [\dots]$	...

cuu duong than cong . com

$$\begin{array}{c|cc} Z & 2k-1 & 2k \\ \hline P & q_1^{k-1} q_2^{k-1} p_1 & q_1^k q_2^{k-1} p_2 \end{array}, k=1,2,\dots,n,\dots$$

cuu duong than cong . com

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} q_1^k q_2^{k-1} p_2 = q_1 p_2 \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{k-1} = q_1 p_2 \frac{1}{1 - q_1 q_2}$$

§3: Véc tơ ngẫu nhiên

I. Véc tơ ngẫu nhiên

Giả sử $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên được xác định bởi kết quả của cùng 1 phép thử. Khi ấy $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ được gọi là một véc tơ ngẫu nhiên n chiều

II. Véc tơ ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều(X,Y).

1. Bảng phân phối xác suất đồng thời:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, h}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_h
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1h}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2h}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\dots$	p_{kh}

2. Bảng phân phối xác suất lề của X và Y

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^h p_{ij}, i = \overline{1, k}$$
$$q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^k p_{ij}, j = \overline{1, h}$$

3. Điều kiện độc lập của X và Y

X và Y độc lập $\Leftrightarrow \forall i, j : p_{ij} = p_i \cdot q_j$

4. Các bảng phân phối xác suất có điều kiện.

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{q_j}, i = \overline{1, k}$$
$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i}, j = \overline{1, h}$$

x	Y	y_1	y_2		$\dots$	y_h	P_x
	x_1	P_{11}	P_{12}			P_{1h}	P_1
	x_2	P_{21}	P_{22}			P_{2h}	P_2
	$\dots$						
	x_k	P_{k1}	P_{k2}			P_{kh}	P_k
	P_Y	q_1	q_2			q_h	1

5. Hàm phân phối xác suất đồng thời (rời rạc và liên tục)

Định nghĩa 3.1: $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$

Tính chất:

(1) $F(x, y)$ là một hàm không giảm theo từng biến

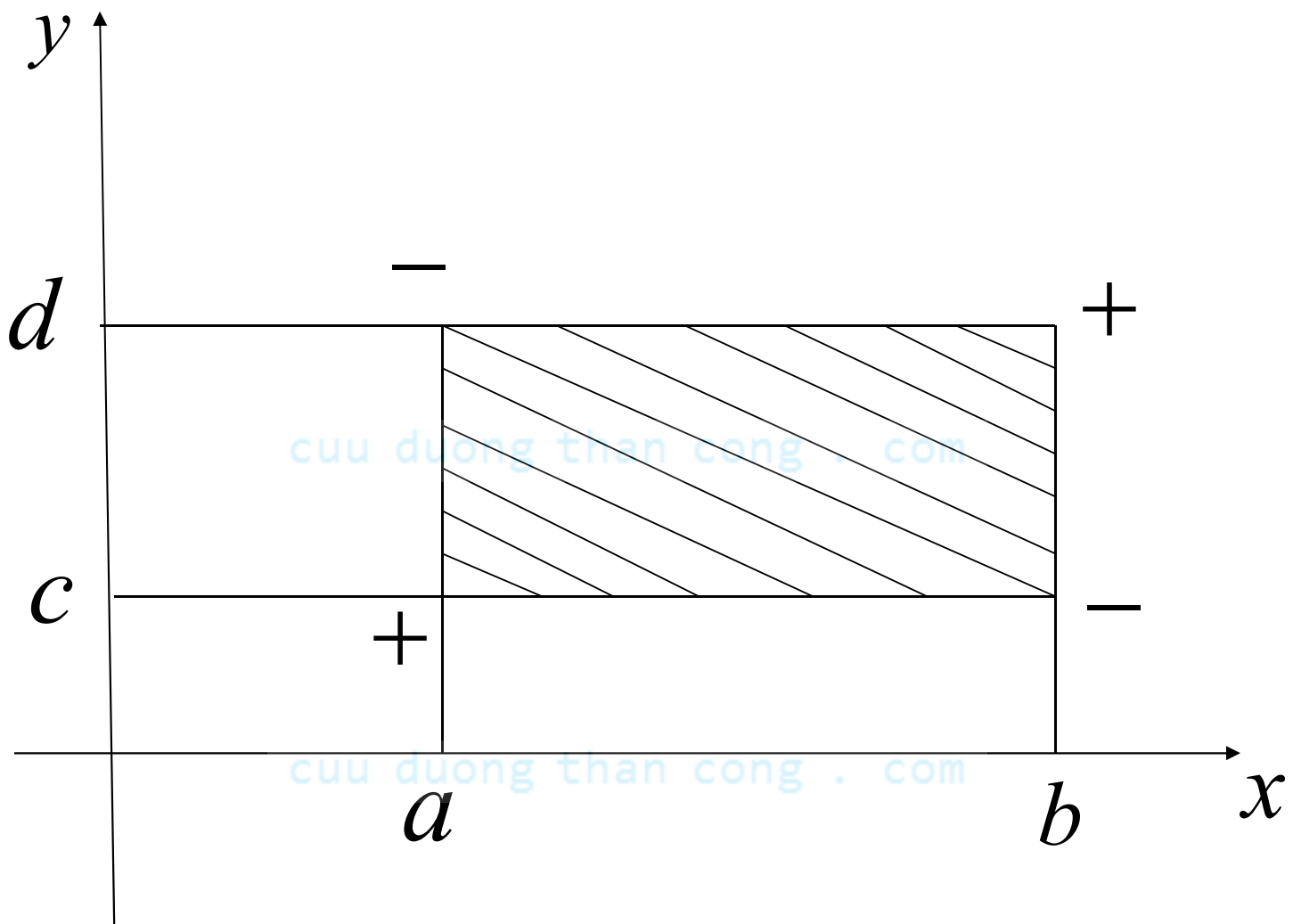
(2) $F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$

(3) $P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F(a, c) + F(b, d) - F(a, d) - F(b, c)$

Hệ quả: (1) Nếu X, Y liên tục thì $F(x, y)$ liên tục trên toàn bộ mặt phẳng và xác suất trên một đường cong bất kỳ đều bằng 0.

(2) Giả sử X, Y rời rạc và có bảng phân phối xác suất như trên, khi ấy ta có:

$$F(x, y) = \sum_{\substack{x_i < x \\ y_j < y}} p_{ij}$$



Ví dụ 3.1: Giả sử X, Y có bảng phân phối xác suất sau:

$X \backslash Y$	0	2
	3	5
0	0,1	0,2
2	0,3	0,4

		y		
		Y	3	5
x	X			
	0	0,1	0,2	0,3
	2	0,3	0,4	0,7
	P^Y	0,4	0,6	1

(1) Tìm bảng phân phối xác suất lề của X:

X	0	2
P	0,3	0,7

(2) Hãy kiểm tra tính độc lập của X và Y

$0,1 \neq 0,3 \cdot 0,4 \Rightarrow X, Y$ là phụ thuộc

(3) Tìm bảng phân phối của X khi Y=5:

X	0	2
$P^{X Y=5}$	$\frac{0,2}{0,6}$	$\frac{0,4}{0,6}$

(4) Tìm hàm phân phối:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \vee y \leq 3 \\ 0,1, & 0 < x \leq 2, 3 < y \leq 5 \\ 0,1 + 0,2, & 0 < x \leq 2, 5 < y \\ 0,1 + 0,3, & 2 < x, 3 < y \leq 5 \\ 1, & 2 < x, 5 < y \end{cases}$$

III. Véc tơ ngẫu nhiên liên tục 2 chiều (X,Y)

1.Hàm phân phối xác suất đồng thời $F(x,y)$

2.Hàm mật độ xác suất đồng thời:

Định nghĩa 3.2:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Định lý 3.2:

$$F(x, y) = \underbrace{\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y}_{D_{xy}} f(u, v) du dv$$

Tính chất:

$$\left. \begin{array}{l} (1) f(x, y) \geq 0 \\ (2) \iint_{R^2} f(x, y) dx dy = 1 \\ (3) P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy \end{array} \right\} \text{TCĐT}$$

3. Các hàm mật độ xác suất lề.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

.Chú ý : Các hàm phân phối xác suất lề:

$$F_X(x) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

4.Điều kiện độc lập của X và Y

$$X, Y \text{ độc lập} \Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

5.Các hàm mật độ xác suất có điều kiện:

$$f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

$$f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{f(x_0, y)}{f_X(x_0)}$$

Ví dụ 3.2: Cho

$$f(x, y) = \begin{cases} a \cdot e^{-x-y}, & \text{nếu } \overbrace{0 \leq x \leq y}^{\Omega} < +\infty \\ 0 & , \text{ nếu trái lại.} \end{cases}$$

1. Xác định tham số a .

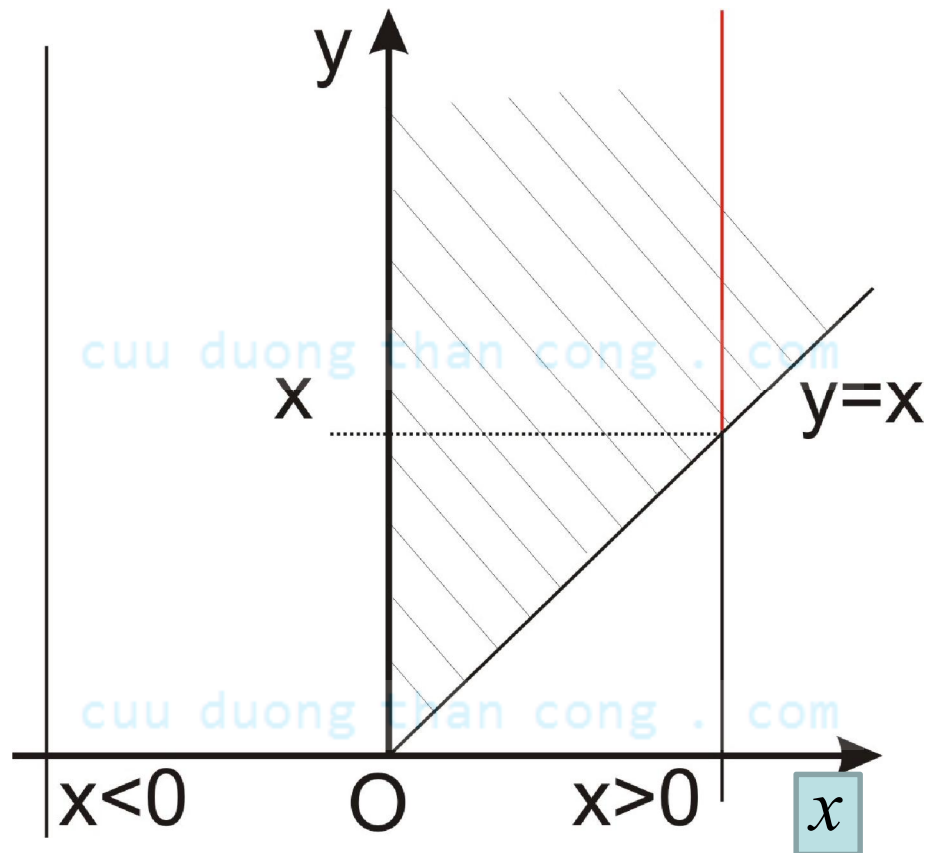
$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{R^2} f(x, y) dx dy = a \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} e^{-x-y} dy \\ &= a \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

(2). Tìm các hàm mật độ xác suất lề.

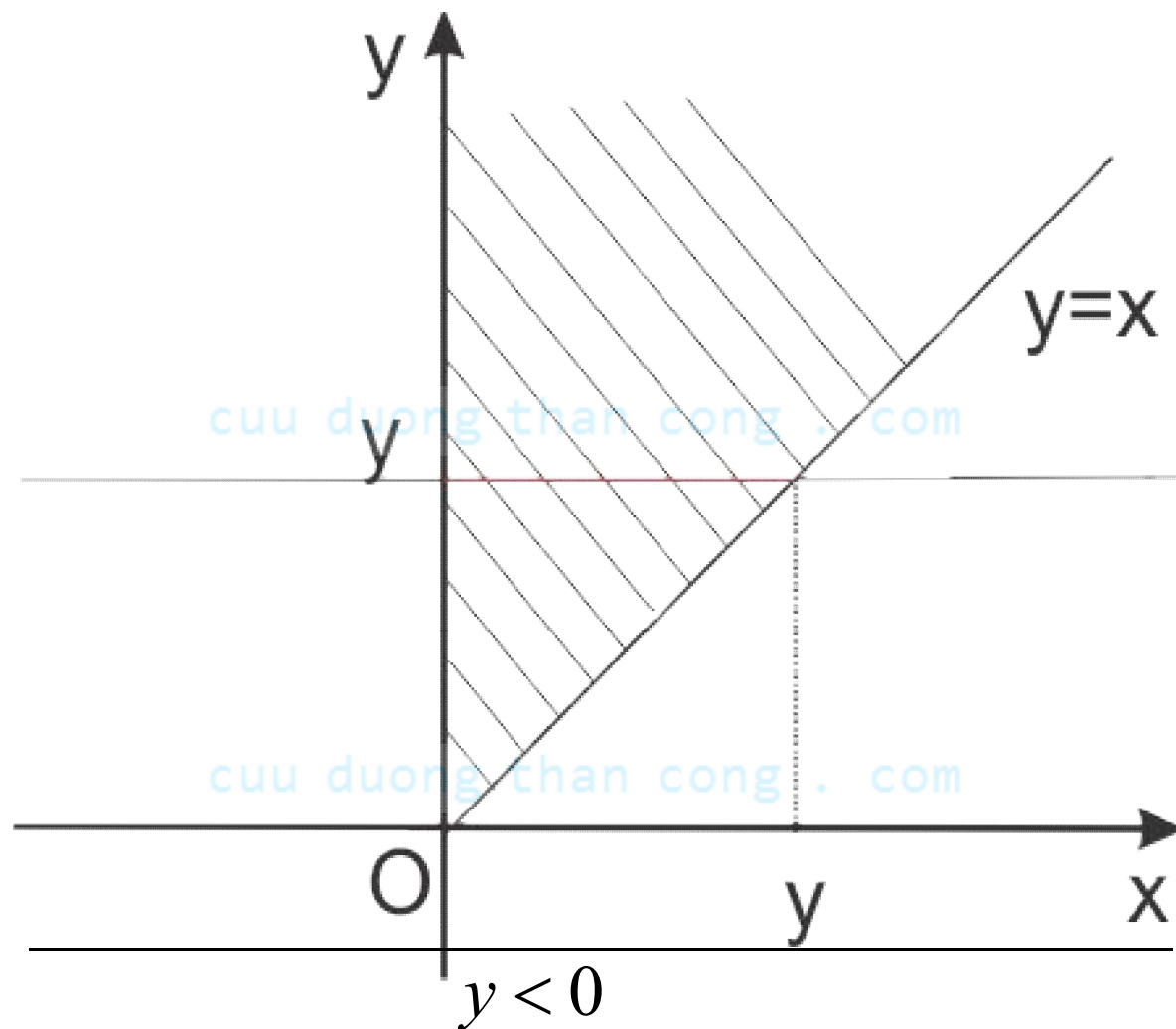
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{nếu } x < 0; \\ \int_x^{+\infty} 2e^{-x-y} dy = 2e^{-2x}, & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{hình 3.2}) \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

HÌNH 3.2



HÌNH 3.3



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } y < 0 \\ \int_0^y 2e^{-x-y} dx = 2(e^{-y} - e^{-2y}), & \text{nếu } y \geq 0 \end{cases} \quad (\text{hình 3.3})$$

3. Hãy kiểm tra tính độc lập của X và Y

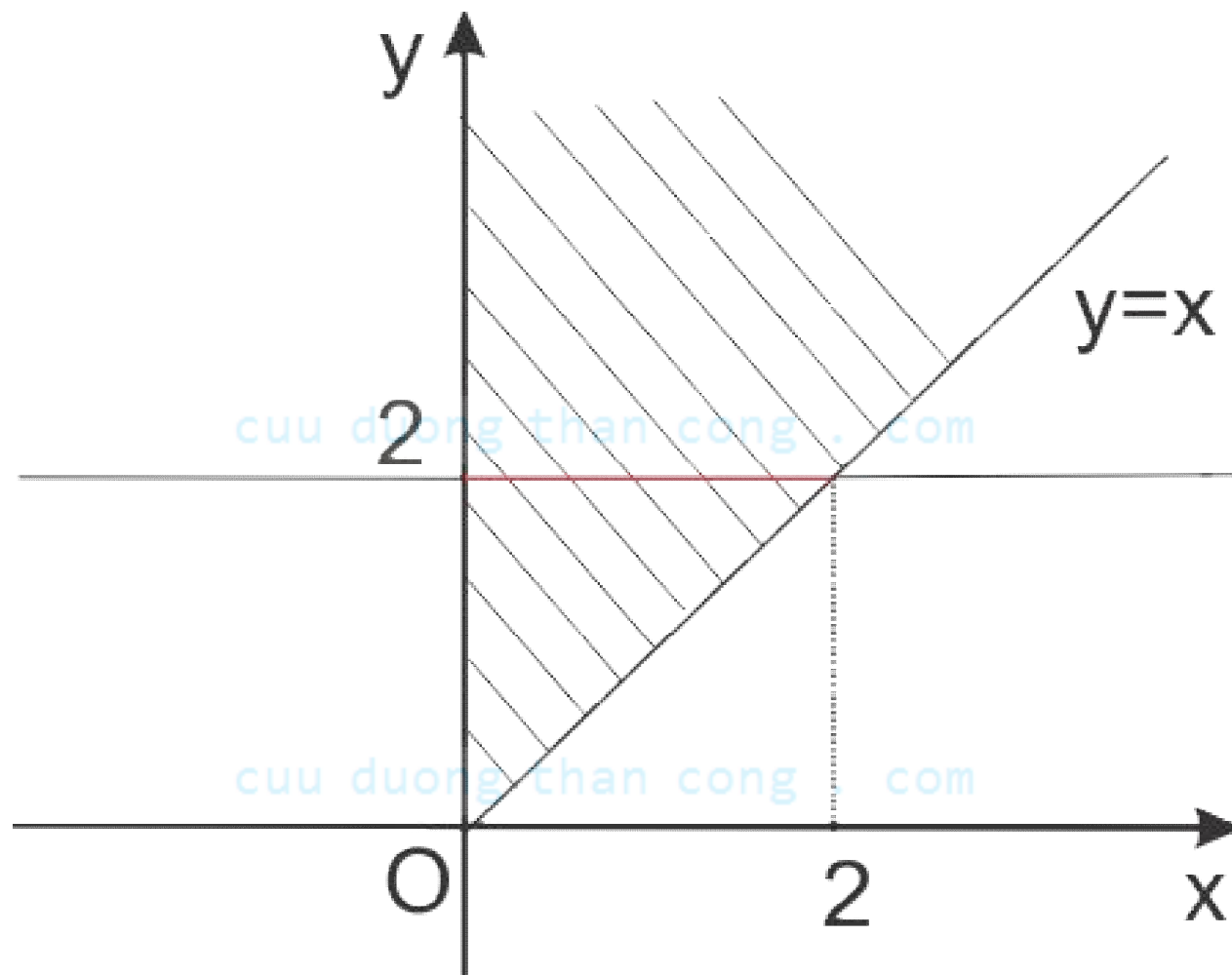
cuu duong than cong . com

Vậy ta có: $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow X, Y$ phụ thuộc

4. Hãy tìm hàm mật độ xác suất của X khi Y=2 (HÌNH 3.4)

$$f_{X/Y=2}(x) = \frac{f(x, 2)}{f_Y(2)} = \begin{cases} 0, & x < 0 \vee 2 < x \\ \frac{2e^{-x-2}}{2(e^{-2} - e^{-4})}, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

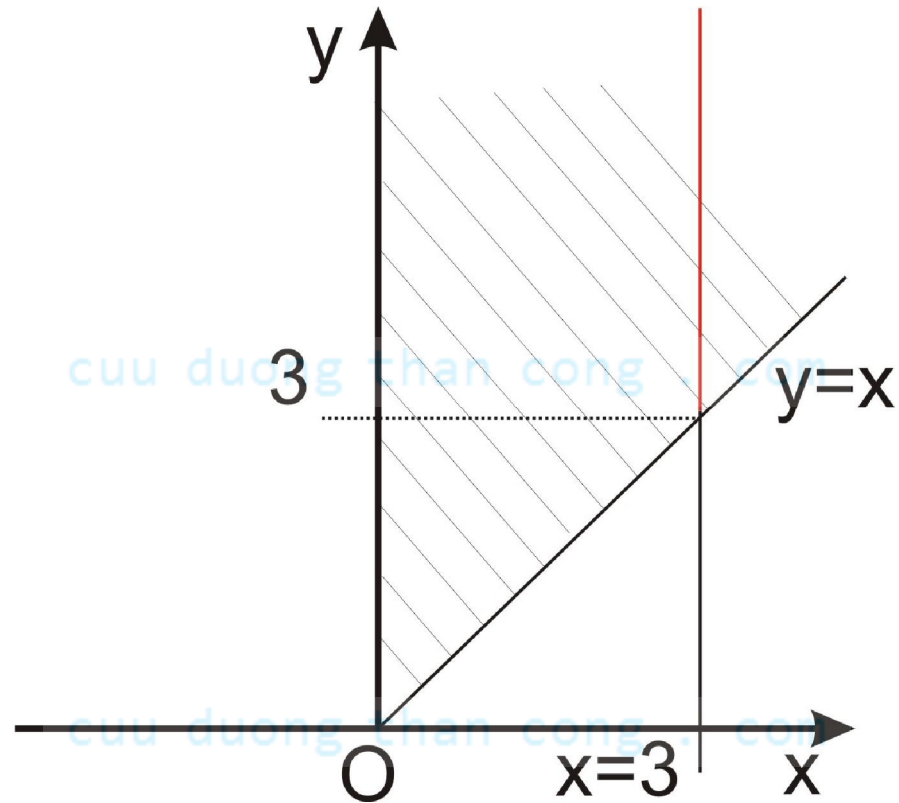
HÌNH 3.4



Tương tự tìm hàm mật độ xác suất của Y khi X=3 (HÌNH 3.5)

$$f_{Y/X=3}(y) = \frac{f(3, y)}{f_X(3)} = \begin{cases} 0 & , \text{khi } y < 3 \\ \frac{2e^{-3-y}}{2e^{-6}} & , \text{khi } 3 \leq y . \end{cases}$$

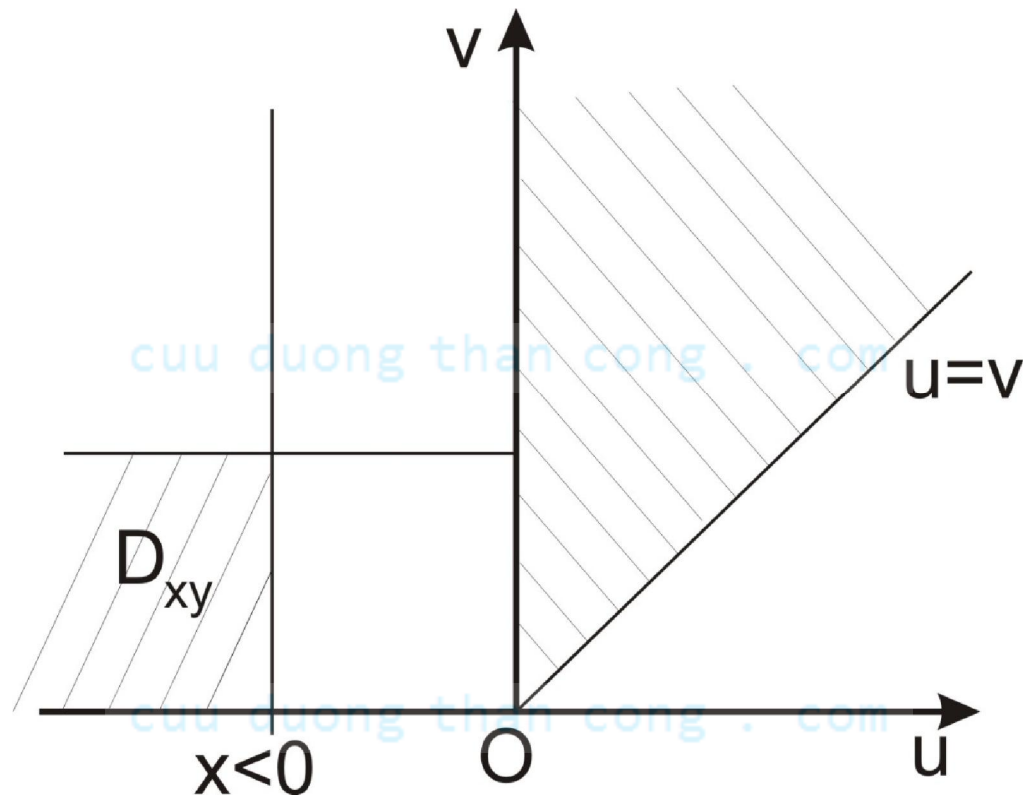
HÌNH 3.5



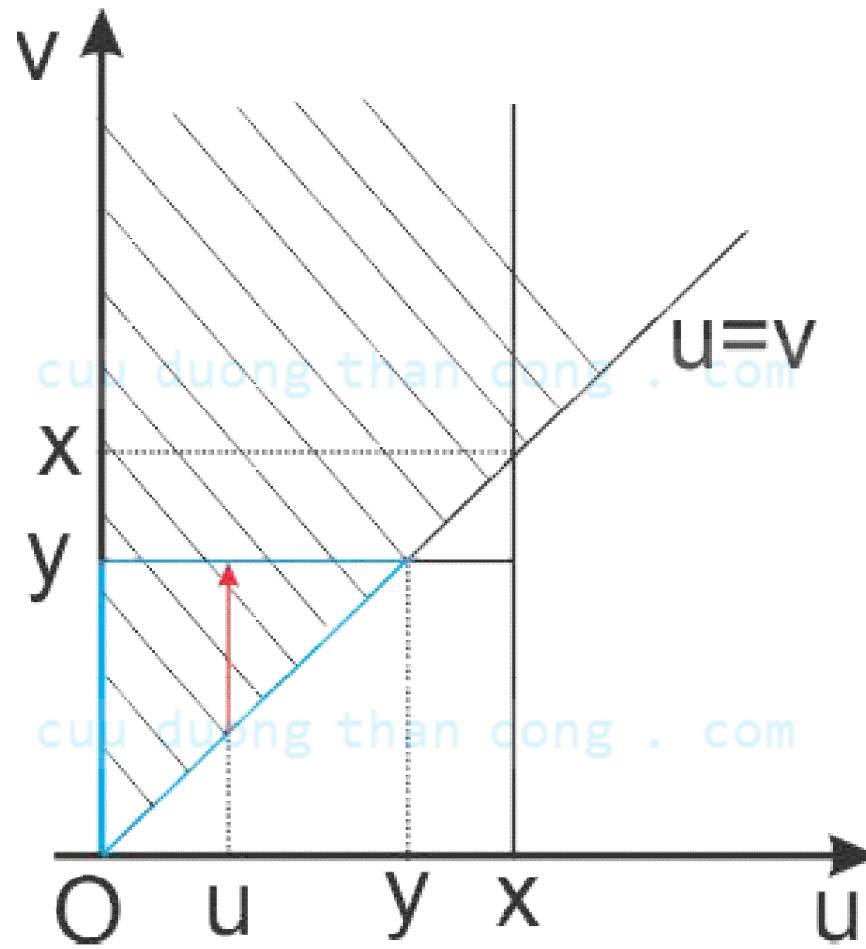
5. Hãy tìm hàm phân phối xác suất đồng thời $F(x,y)$ (HÌNH 3.6-3.8)

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, du \, dv \\
 &= \iint_{D_{xy} \cap \Omega} 2 e^{-u-v} \, du \, dv \\
 &= \begin{cases} 0 & , \text{nếu } x < 0 \text{ hoặc } y < 0 \\ \int_0^y du \int_u^y 2 e^{-u-v} \, dv & , \text{nếu } 0 \leq y \leq x < +\infty \\ \int_0^x du \int_u^y 2 e^{-u-v} \, dv & , \text{nếu } 0 \leq x < y < +\infty \end{cases}
 \end{aligned}$$

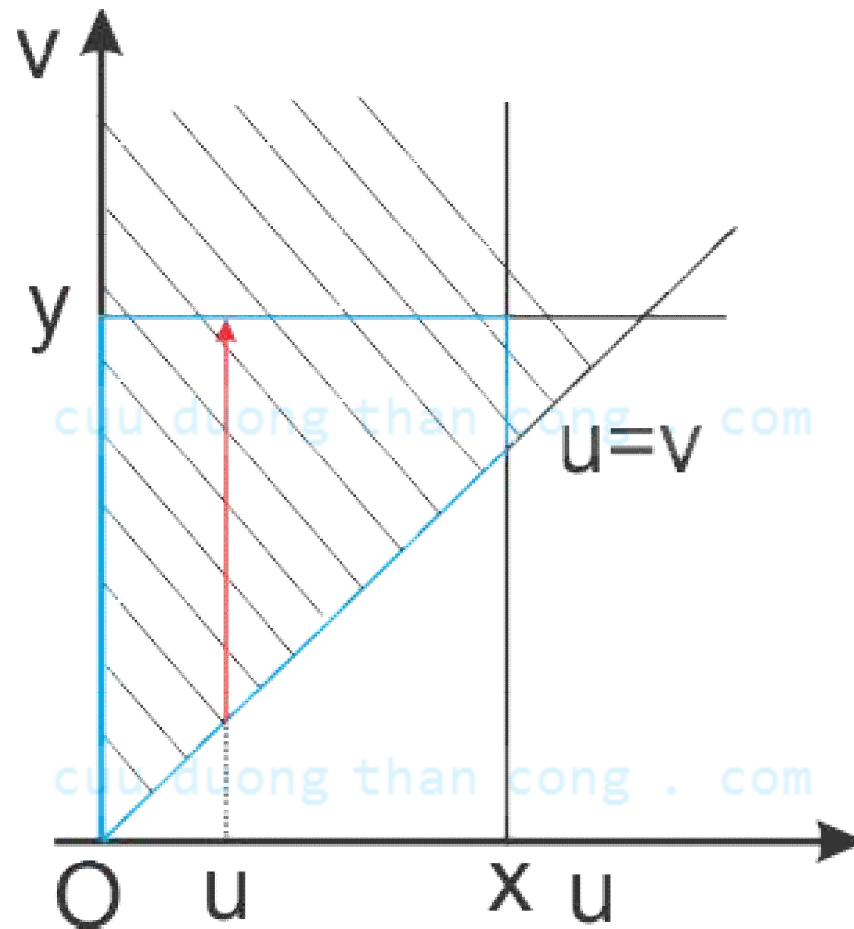
HÌNH 3.6



HÌNH 3.7



HÌNH 3.8



6. Tính các xác suất:

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\underbrace{-2 < Y < 2}_{D_1}\right) = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{D_1 \cap \Omega} 2e^{-x-y} dx dy \end{aligned}$$

$$P(AB) = P\left(\underbrace{-2 < X < 1, -2 < Y < 2}_{D_2}\right) = \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

$$P(-2 < X < 1 \mid -2 < Y < 2) = P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(-2 < X < 1 \mid Y=2) = \int_{-2}^1 f_{X/Y=2}(x) dx$$

\$4. Hàm của một đại lượng ngẫu nhiên $Y = \varphi(X)$

1. Trường hợp rời rạc.

Giả sử: $P(X = x_i) = p_i \Rightarrow P(Y = y_j) = \sum_{\varphi(x_i) = y_j} p_i$

Ví dụ 4.1 : Tìm bảng phân phối xác suất của $Y = X^2$

,nếu

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Giải: Ta suy ra :

X^2	0	1	4
P	0,1	0,2 + 0,2	0,1 + 0,4

Ví dụ 4.2: Cho

X	1	2	3	...	k	...
P	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{k-1} p$	...

- Hãy lập bảng phân phối xác suất của hàm $Y = \cos \pi X$

$Y = \cos \pi X$	-1	1
P	p_0	$1 - p_0$

$$\cos \pi X = -1 \Leftrightarrow X = k = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow p_0 = \sum_{n=0}^{\infty} p \cdot (q^2)^n = p \frac{1}{1 - q^2} = \frac{1}{1 + q}$$

2. Trường hợp liên tục: Giả sử cho X liên tục

$$X \sim f_X(x), F_X(x) \Rightarrow F_Y(y), f_Y(y) = ?$$

Bước 1. Tìm miền giá trị của $Y = \varphi(X)$

Bước 2.

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y)$$
$$= \int_{\varphi(x) < y} f_X(x) dx$$

Bước 3.

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

Định nghĩa 4.1: đại lượng ngẫu nhiên X gọi là có phân phối đều trên đoạn $[a, b]$, kí hiệu $X \sim U[a, b]$, nếu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

Chú ý : Nếu X có phân phối đều thì $Y = \alpha X + \beta$ cũng có phân phối đều, với α, β là các hằng số.

Ví dụ 4.3: Cho X có phân phối đều trên đoạn $[0,1]$.

(1) Tìm hàm mật độ của $Y = -\ln X$

(2) Tìm hàm mật độ của $Z = -3X + 2$

Bài giải: (1) B1: $Y = -\ln X > 0$

B2:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(-\ln X < y) = P(X > e^{-y}) =$$
$$1 - P(X < e^{-y}) = 1 - F_X(x), x = e^{-y}$$

Vì X có phân phối đều trên đoạn $[0,1]$ nên

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$y \Rightarrow x \Rightarrow F_X(x) \Rightarrow F_Y(y)$$

$$y < 0 \Rightarrow x = e^{-y} > 1 \Rightarrow F_X(x) = 1$$

$$y > 0 \Rightarrow 0 < x = e^{-y} < 1 \Rightarrow F_X(x) = x = e^{-y}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

• B3: $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ e^{-y}, & y \geq 0 \end{cases}$

- (2) Miền giá trị của Z là đoạn $[-1, 2]$. Theo chú ý ở trên thì Z có phân phối đều trên đoạn $[-1, 2]$ nên

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \vee 2 < z \\ 1/3, & -1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

\$4. Hàm của hai đại lượng ngẫu nhiên $Z = \varphi(X, Y)$

1. Trường hợp rời rạc.

Giả sử: $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} \Rightarrow P(Z = z_k) = \sum_{\varphi(x_i, y_j) = z_k} p_{ij}$

Ví dụ 4.1: Cho X, Y có bảng

$X \backslash Y$	3	5
0	0,1	0,2
2	0,3	0,4

Tìm bảng phân phối xác suất của $X+Y$ và $X.Y$

Giải:

$X + Y$	3	5	7
P	0,1	0,2 + 0,3	0,4

$X.Y$	0	6	10
P	0,1+0,2	0,3	0,4

Ví dụ 4.2: Cho X, Y có các bảng lẽ sau. Tính $X+Y$.

X	0	2
P	0,3	0,7

Y	3	5
P	0,4	0,6

Giải: Phép tính này không thể thực hiện được ! Tuy nhiên nếu thêm điều kiện X, Y độc lập thì ta sẽ có :

$X+Y$	3	5	7
P	0,12	0,46	0,42

2. Trường hợp liên tục:

Bước 1: Tìm miền giá trị của

$$Z = \varphi(X, Y)$$

Bước 2 $F_Z(z) = P(Z < z) = P(\varphi(X, Y) < z)$

$$= \iint_{D_z: \varphi(x, y) < z} f(x, y) dx dy$$

Bước 3. $f_Z(z) = \frac{d F_Z(z)}{d z}$

Ví dụ 4.2: Cho

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \overbrace{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1}^{\Omega} \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối của $Z=X+Y$

Giải:

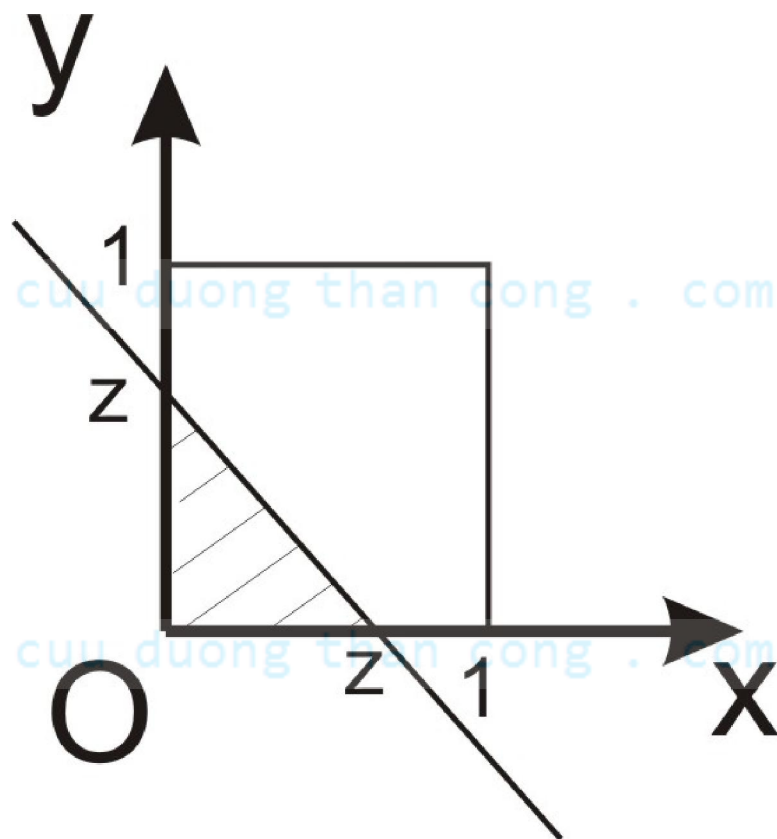
Bước 1: $0 \leq Z = X + Y \leq 2$

Bước 2: $F_Z(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z)$

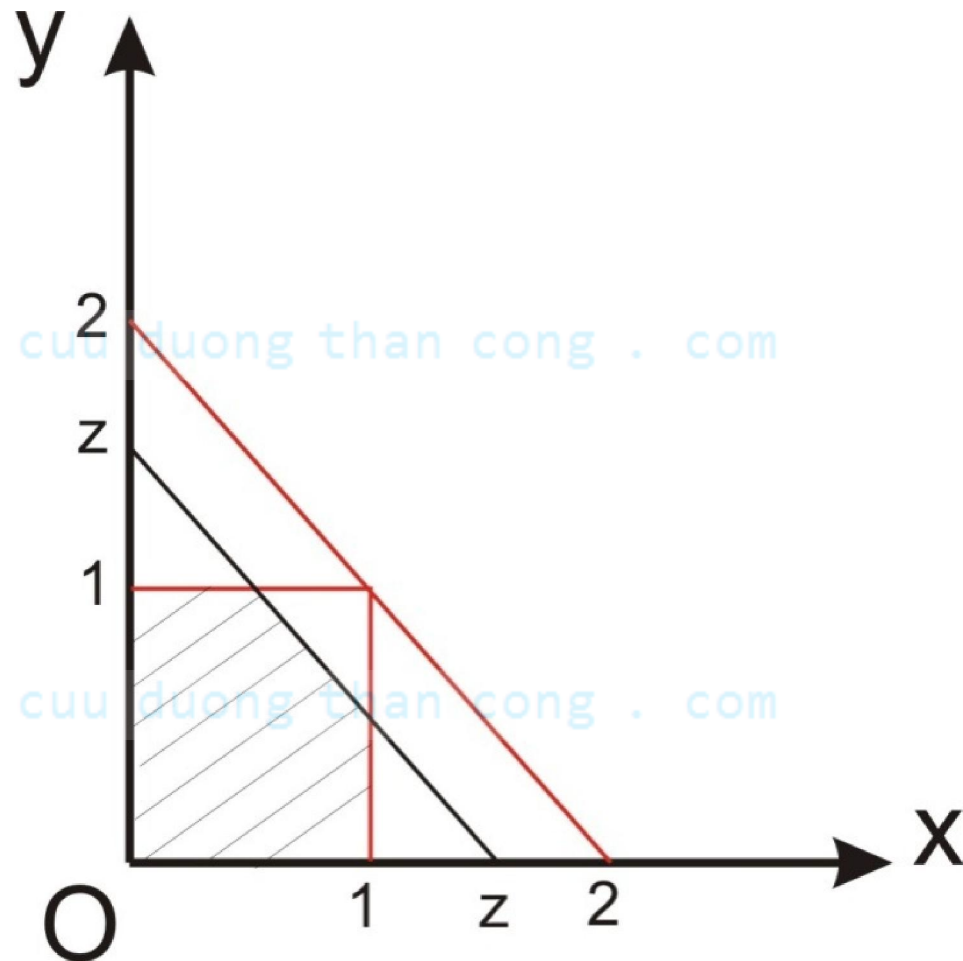
$$= \iint_{D_z: x+y < z} f(x, y) dx dy = \iint_{D_z \cap \Omega} 1 dx dy$$

$$= \text{diện tích } (D_z \cap \Omega) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ z^2 / 2, 0 \leq z \leq 1 (\text{hình 4.1}) \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2}, 1 \leq z \leq 2 (\text{hình 4.2}) \\ 1, 2 < z \end{cases}$$

- HÌNH 4.1



- HÌNH 4.2



Ví dụ 4.3: Cho X,Y độc lập và có cùng hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Tìm hàm phân phối của $Z = \max(X, Y)$

Giải:

$$\begin{aligned} 1) F_Z(z) &= P(Z < z) = P(\max(X, Y) < z) = \\ &= P(X < z, Y < z) = P(X < z) \cdot P(Y < z) = \\ &= F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} 0, & \text{khi } z < 0 \\ (1 - e^{-z})^2, & \text{khi } z \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 4.3: Cho X,Y độc lập và có cùng hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

2) Tìm hàm phân phối của $Z = \min(X, Y)$

Giải:

$$\begin{aligned} 2) F_Z(z) &= P(Z < z) = P(\min(X, Y) < z) = \\ &= P(X < z + Y < z) = 1 - [1 - P(X < z)].[1 - P(Y < z)] = \\ &= [1 - F_X(z)].[1 - F_Y(z)] = \begin{cases} 0, & \text{khi } z < 0 \\ 1 - (e^{-z})^2, & \text{khi } z \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$