Chương 3.Các đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên và véctơ ngẫu nhiên.

§1 Kỳ vọng

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.1: Giả sử $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)=p_i \Rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_i x_i p_i$

Định nghĩa 1.2: Giả sử X liên tục và có hàm mật độ là $f_X(x)$

$$\Rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx$$

Ý nghĩa: Kỳ vọng E(X) là giá trị trung bình của X

2. Tính chất: (1) E(C) = C,(2) E(CX) = C.E(X) ,C là hằng số

(3) E(X+Y) = E(X) + E(Y)

(4) X, Y độc lập suy ra E(XY) = E(X).E(Y)

cuu duong than cong . com

§2: PHƯƠNG SAI

1.Định nghĩa 2.1:Phương sai của đại lượng ngẫu nhiên X là:

$$D(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

Định lý 2.1 :

$$D(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 \text{ với } E\left(X^2\right) = \sum_i x_i^2 . p_i \text{ , nếu X rời rạc ;}$$

cuu duong than cong . com

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f_X(x)\, dx \text{ , nếu X liên tục.}$$

2. Tính chất: (1) D(C) = 0 ; (2) D(CX) = $C^2 . D(X)$

(3) X,Y độc lập suy ra D(X+Y) = D(X)+D(Y)

(4) D(C+ X) = D(X), với C là hằng số

3. Độ lệch: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

§3.Các đặc trưng khác của đại lượng ngẫu nhiên

1.Mod X (giá trị của X ứng với xác suất lớn nhất)

Định nghĩa 3.1: Giả sử X rời rạc và $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)=p_i$

$$\Rightarrow Mod\ X = x_{i_0} \text{ nếu } p_{i_0} = Max\ p_i$$

Định nghĩa 3.2: Giả sử X liên tục và có hàm $f_X(x)$, ta có

cuu duong than cong . com

$$\Rightarrow Mod\ \mathrm{X} = x_0 \text{ nếu } f_X(x_0) = Max\ f_X(x)$$

2. Med X(medium – trung vị X)

Định nghĩa 3.3:

$$MedX = m \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}<m) \le 1/2, \mathrm{P}(X>m) \le 1/2$$

Định lý 3.1: Nếu X liên tục thì

$$MedX = m \Leftrightarrow F_X(m) = \int_{-\infty}^{m} f_X(x)dx = \frac{1}{2}$$

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

3.Moment

Định nghĩa 3.4: Moment cấp k cuả đại lượng ngẫu nhiên X đối với số a là :

$$\mathrm{E}\left[(X-a)^k\right]$$

a = 0: moment gốc

a = E(X): moment trung tâm.

cuu duong than cong . com

4. Hệ số nhọn và hệ số bất đối xứng(xem SGK)

Ví dụ 3.1:

$$\mathrm{X} \sim f_X(x) = \begin{cases} \cos x, x \in [0, \pi/2] \\ 0, x \notin [0, \pi/2] \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x.\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$D(X) = \underbrace{\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx}_{\mathrm{E}(X^2)} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \pi - 3$$

Mod X =0

Med X = m $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{m} f_X(x)dx = \int_0^{m} \cos x dx = 1/2$

$\Leftrightarrow \sin m = 1/2, m \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow m = \pi/6$

Ví dụ 3.2 :Cho X có bảng phân phối xác suất như sau

X	1	2	...	$m-1$	m	$m+1$	...	k	...
P	p	qp	...	$q^{m-2}p$	$q^{m-1}p$	$q^m p$	...	$q^{k-1}p$	...

cuu duong than cong . com

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp.q^{k-1} = p.\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$D(X) = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p q^{k-1}}_{E(X^2)} - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

cuu duong than cong . com

$$= p.\frac{1+q}{(1-q)^3} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Mod X = 1

Med X =m $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} p\left(1+q+\ldots+q^{m-2}\right) \le 1/2 \\ p\left(1+q+\ldots+q^{m-2}+q^{m-1}\right) \ge 1/2 \end{cases}$

cuu duong than cong . com

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p.\dfrac{1-q^{m-1}}{1-q} \le 1/2 \\ p.\dfrac{1-q^{m}}{1-q} \ge 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-q^{m-1} \le 1/2 \\ 1-q^{m} \ge 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^{m-1} \ge \dfrac{1}{2} \\ q^{m} \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

$$\Leftrightarrow m\ln q \le -\ln 2 \ , \ (m-1)\ln q \ge -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\ln 2}{\ln q} \le m \le \frac{-\ln 2}{\ln q} + 1$$

cuu duong than cong . com

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

.Ví dụ 3.3 : Cho X có bảng phân phối xác suất sau:

X	2	5	7
P	0,4	0,3	0,3

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 2.0,4 + 5.0,3 + 7.0,3 = 4,4$$

cuu duong than cong . com

$$D(\mathrm{X}) = \underbrace{2^2.0.4 + 5^2.0,3 + 7^2.0,3}_{\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)} - (4,4)^2$$

cuu duong than cong . com

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(X)} = 2,107$$

$$Mod\ \mathrm{X} = 2\ ;\ \mathrm{Med\ X} = 5$$

Cách dùng máy tính bỏ túi ES

- Mở tần số(1 lần): Shift Mode ↓ Stat On(Off)
- Nhập: Mode Stat 1-var

x_i	n_i
2	0,4
5	0,3
7	0,3

cuu duong than cong . com

AC: báo kết thúc nhập dữ liệu

Cách đọc kết quả: Shift Stat Var

cuu duong than cong . com

$$\overline{x} = \rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4,4$$

$$\sigma_n = x\sigma n = \sigma x = \rightarrow \sigma(\mathrm{X}) = 2,107$$

Cách dùng máy tính bỏ túi MS:

Vào Mode chọn SD

Xóa dữ liệu cũ: SHIFT CLR SCL =

Cách nhập số liệu :

2; 0,4 M+

5; 0,3 M+

7; 0,3 M+

cuu duong than cong . com

Cách đọc kết quả:

SHIFT S – VAR

$$\overline{x} =\!\rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4,4$$

$$\sigma_n = x\sigma n = \sigma x =\!\rightarrow \sigma(\mathrm{X}) = 2,107$$

cuu duong than cong . com

Ví dụ 3.4: Tung cùng 1 lúc 5 con xúc xắc cân đối,đồng chất .Gọi X là tổng số điểm nhận được. Hãy tính E(X), D(X)

Giải: Gọi Xi là số điểm của con xúc xắc thứ i

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_5$$

$$E(X) = E(X_1) + ... + E(X_5) = 5E(X_1)$$

Xi độc lập $\Rightarrow D(X) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_5) = 5D(X_1)$

X_1	1	2	...	6
P^X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	...	$\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow E(X_1) = \frac{7}{2}, \quad D(X_1) = \frac{35}{12}$$

cuu duong than cong . com

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

§4: Kỳ vọng của hàm $Y = \varphi(X)$

1.Trường hợp rời rạc:

$$P(X = x_i) = p_i \Rightarrow E(Y) = \sum_i \varphi(x_i).p_i$$

2.Trường hợp liên tục:

$$X \sim f_X(x) \Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).f_X(x)\,dx$$

Ví dụ 4.1:

Cho $$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, \quad x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Tìm kỳ vọng và phương sai của Y= sinX.

cuu duong than cong . com

$$\mathrm{E}(Y)=\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x dx=\left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}(Y^2)=\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos x dx=\left.\frac{\sin^3 x}{3}\right|_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}$$

$$D(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

cuu duong than cong . com

§5: Kỳ vọng của hàm $Z = \varphi(X, Y)$

1.Trường hợp rời rạc: $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$

$$\Rightarrow E(Z) = \sum_{i,j} \varphi(x_i, y_j) \cdot p_{ij}$$

Ví dụ 5.1:

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$$

cuu duong than cong . com

2.Trường hợp liên tục: (X,Y) liên tục và có hàm mật độ f(x,y)

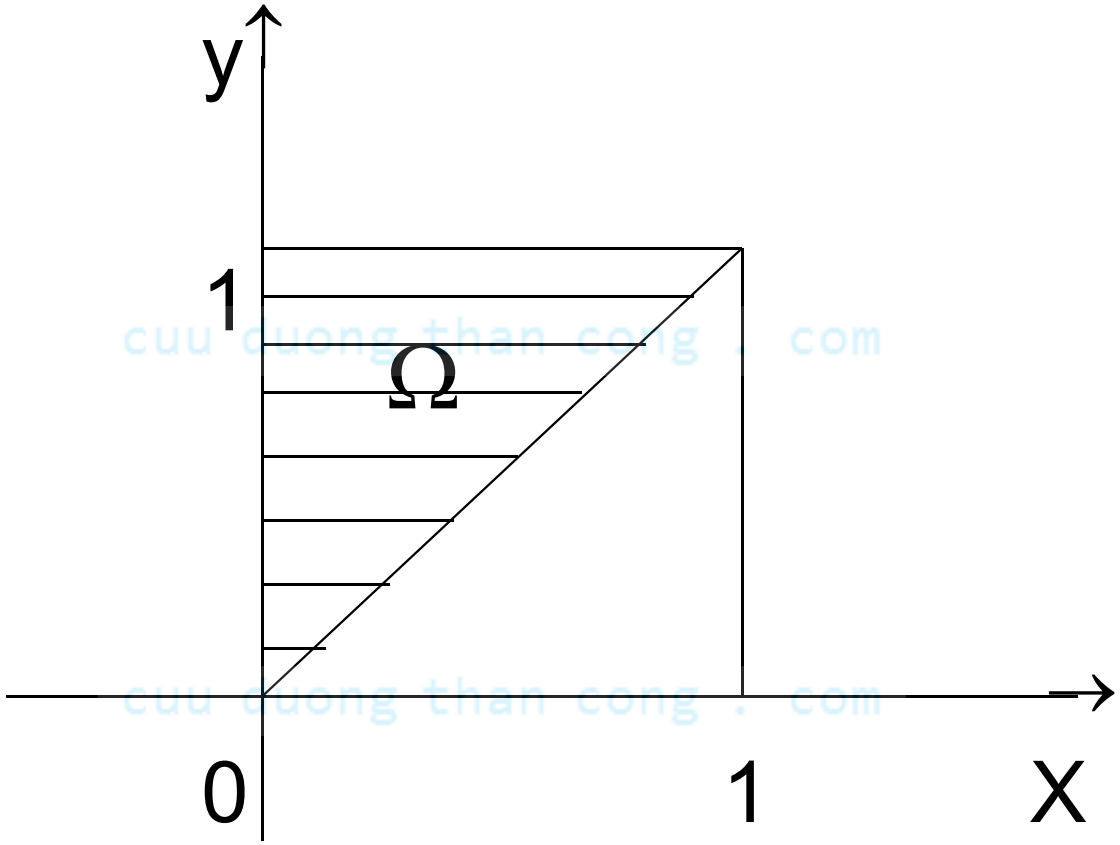
$$\Rightarrow E(Z) = \iint_{R^2} \underbrace{\varphi(x,y)}_{z} . f(x,y)\, dxdy$$

Ví dụ 5.2:

cuu duong than cong . com

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, \text{ nếu } \overbrace{0 \le x \le y \le 1}^{\Omega}, \ (hình\ 5.1) \\ 0\ , \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

HÌNH 5.1



cuu duong than cong . com

$$E(X) = \iint_{R^2} x.f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y x.8xy\,dx$$

$$E(Y) = \iint_{R^2} y.f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y y.8xy\,dx$$

$$E(Y^2) = \iint_{R^2} y^2.f(x,y)\,dx\,dy$$

$$E(X^2) = \iint x^2.f(x,y)\,dx\,dy$$

$$E(X.Y) = \iint_{R^2} xy.f(x,y)\,dx\,dy$$

cuu duong than cong . com

§6: Các đặc trưng của vectơ ngẫu nhiên

1.Kỳ vọng: E(X,Y) = (E(X),E(Y))

2. Hiệp phương sai (covarian):

Định nghĩa 6.1: cov(X,Y) = E[(X - E(X)).(Y – E(Y))]

Định lý 6.1: cov(X,Y) = E(XY) – E(X).E(Y)

Tính chất: (1) X,Y độc lập thì cov(X,Y) = 0

(2) cov(X,X) = D(X)

$$(3)\ \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}\left(X_i, Y_j\right)$$

$$(4)\ \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{k=1}^{m} X_k\right) = \sum_{i=1}^{m} D\left(X_i\right) + \sum_{i\neq k} \mathrm{cov}\left(X_i, X_k\right)$$

cuu duong than cong . com

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

3. Hệ số tương quan

Định nghĩa 6.2:

$$R_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$$

Tính chất: (1) X,Y độc lập $\Rightarrow R_{XY} = 0$

(2) $|R_{XY}| \le 1, \forall X, Y$

(3) $|R_{XY}| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b, c : aX + bY = c$

Ý nghĩa: Hệ số R_{XY} đặc trưng cho sự ràng buộc tuyến tính giữa X và Y: $|R_{XY}|$ càng gần1, thì X,Y càng gần có quan hệ tuyến tính.

cuu duong than cong . com

4. Ma trận tương quan:

$$D(X,Y) = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X,X), \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(Y,X), \mathrm{cov}(Y,Y) \end{pmatrix}$$

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

- Ví dụ 6.1:Cho các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_m; Y_1, Y_2, ..., Y_n$ có phương sai đều bằng 1 và

$$\text{cov}(X_i, X_j) = p_1; \text{cov}(Y_i, Y_j) = p_2; \text{cov}(X_i, Y_j) = p_3$$

Tìm hệ số tương quan của 2 biến ngẫu nhiên:

$$U = (X_1 + X_2 + ... + X_m) \text{ và } V = (Y_1 + Y_2 + ... + Y_n)$$

Giải:

$$\text{cov}(U,V) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{m}.\sum_{j=1}^{n} \text{cov}(X_i, Y_j) = m.n.p_3$$

$$D(U) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{k=1}^{m} X_k\right) = \sum_{i=1}^{m} D(X_i) + \sum_{i \neq k} \text{cov}(X_i, X_k) = m + m(m-1).p_1$$

$$D(V) = n + n(n-1).p_2$$

$$R_{UV} = \frac{\text{cov}(U,V)}{\sigma(U).\sigma(V)} = \frac{m.n.p_3}{\sqrt{m + m(m-1)\,p_1}.\sqrt{n + n(n-1)\,p_2}}$$

cuu duong than cong . com

5. Cách dùng máy tính bỏ túi

a)Loại ES: MODE STAT a+bx

x_i	y_j	p_{ij}

AC

Cách đọc kết quả:

SHIFT STAT VAR	$\bar{x} =\!\!\rightarrow \mathrm{E}(X)$
SHIFT STAT VAR	$x\sigma n =\!\!\rightarrow \sigma(X)$
SHIFT STAT VAR	$\bar{y} =\!\!\rightarrow \mathrm{E}(Y)$
SHIFT STAT VAR	$y\sigma n =\!\!\rightarrow \sigma(Y)$
SHIFT STAT REG	$r =\!\!\rightarrow R_{XY}$
SHIFT STAT SUM	$\sum xy =\!\!\rightarrow \mathrm{E}(XY)$

cuu duong than cong . com

b) Loại MS: MODE REG LIN

Cách xóa dữ liệu cũ : SHIFT CLR SCL =

Cách nhập dữ liệu : $x_i , y_j ; p_{ij}$ $M+$

Cách đọc kết quả:

SHIFT S-VAR	$\overline{x} = \rightarrow \mathrm{E}(X)$
SHIFT S-VAR	$x\sigma n = \rightarrow \sigma(X)$
SHIFT S-VAR	$\triangleright\ \overline{y} = \rightarrow \mathrm{E}(Y)$
SHIFT S-VAR	$\triangleright\ y\sigma n = \rightarrow \sigma(Y)$
SHIFT S-VAR	$\triangleright\ \triangleright\ r = \rightarrow R_{XY}$
SHIFT S-SUM	$\triangleright \sum xy = \rightarrow \mathrm{E}(XY)$

cuu duong than cong . com

Ví dụ 6.2: Giả sử X,Y có bảng phân phối xác suất sau:

X \ Y	3	5
0	0,1	0,2
2	0,3	0,4

cuu duong than cong . com

CuuDuongThanCong.com https://fb.com/tailieudientucntt

.Bảng trên tương đương với bảng sau:

x_i	y_j	p_{ij}
0	3	0,1
0	5	0,2
2	3	0,3
2	5	0,4

cuu duong than cong . com

Nhập bảng số liệu vào máy tính,ta có:

$$\overline{x} =\rightarrow \mathrm{E}(X) = 1,4$$

$$x\sigma n =\rightarrow \sigma(X) = 0,9165$$

$$\overline{y} =\rightarrow \mathrm{E}(Y) = 4,2$$

$$y\sigma n =\rightarrow \sigma(Y) = 0,9798$$

$$r =\rightarrow R_{XY} = -0,0891$$

$$\sum xy =\rightarrow \mathrm{E}(XY) = 5,8$$

cuu duong than cong . com