

Chương 4: Các quy luật phân phối xác suất cơ bản

§1. Các quy luật phân phối rời rạc cơ bản

1. Phân phối đều rời rạc:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
P	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\dots$	$\frac{1}{k}$

2. Phân phối không – một $A(p)$:

Định nghĩa 1.1: X có phân phối $A(p)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & q & p \end{array}$$

Định lý 1.1: X có phân phối $A(p)$ thì $E(X) = p$, $D(X) = p.q$

3. Phân phối nhị thức $B(n,p)$:

Định nghĩa 1.2: $X \sim B(n, p) \Leftrightarrow P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = \overline{0, n}$

Định lý 1.2: $X \sim B(n, p) \Rightarrow E(X) = np, D(X) = npq,$

$$Mod X = k_0 = \left[(n+1)p \right] \text{ hoặc } k_0 = \left[(n+1)p \right] - 1$$

4. Phân phối siêu bội

Bài toán: Cho 1 hộp có N bi trong đó có M bi trắng còn lại là đen. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ra n bi (không hoàn lại), n không lớn hơn M và N-M. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X là số bi trắng lấy được.

Giải:

$$P(X = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = \overline{0, n}$$

Định nghĩa 1.3: Phân phối nói trên được gọi là phân phối siêu bội $H(N, M, n)$

Định lý 1.3: Giả sử $X \sim H(N, M, n) \Rightarrow E(X) = np,$

$$D(X) = npq \frac{N-n}{N-1}, p = \frac{M}{N}$$

Ghi nhớ: lấy bi có hoàn lại: phân phối nhị thức
lấy bi không hoàn lại: phân phối siêu bội

Ví dụ 1.1: Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi **không hoàn lại** cho đến khi gặp bi **vàng** thì dừng. Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen.

Giải: Lấy 1 bi cuối cùng là vàng nên:

$$P = \frac{C_6^3 \cdot C_5^2}{C_{15}^5} \cdot \frac{4}{10}$$

Ví dụ 1.2 : Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi **không hoàn lại** cho đến khi gặp đủ **3 bi vàng** thì dừng. Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen.

$$P = \frac{C_6^3 \cdot C_5^2 \cdot C_4^2}{C_{15}^7} \cdot \frac{2}{8}$$

Ví dụ 1.3: Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi **có hoàn lại** cho đến khi gặp bi **vàng** thì dừng. Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen.

Giải: Lấy 1 bi cuối cùng là vàng nên:

$$P = C_5^3 \left(\frac{6}{15} \right)^3 \cdot C_2^2 \cdot \left(\frac{5}{15} \right)^2 \cdot \frac{4}{15}$$

Ví dụ 1.4 : Trong 1 hộp bi có 6 trắng, 5 đen, 4 vàng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng bi **có hoàn lại** cho đến khi gặp đủ 3 bi **vàng** thì dừng. Tính xác suất để lấy được đúng 3 bi trắng, 2 bi đen.

$$P = C_7^3 \left(\frac{6}{15} \right)^3 \cdot C_4^2 \left(\frac{5}{15} \right)^2 \cdot \left(\frac{4}{15} \right)^2 \cdot \frac{4}{15}$$

5. Phân phối Poisson $P(a), a > 0$:

Định nghĩa 1.4: $X \sim P(a) \Leftrightarrow P(X = k) = e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$

Định lý 1.4: X có phân phối $P(a)$ thì $E(X) = D(X) = a$

Ví dụ 1.1: Giả sử X có phân phối $P(8)$. Khi ấy:

$P(X=6) = 0,122138$ (cột 8, hàng 6 bảng phân phối Poisson)

$P(0 \leq X \leq 12) = 0,936204$ (cột 8, hàng 12 bảng giá trị hàm $\Sigma \dots$)

$$P(6 \leq X \leq 12) = P(0 \leq X \leq 12) - P(0 \leq X \leq 5)$$

Chú ý: Nếu gọi X là số người ngẫu nhiên sử dụng 1 dịch vụ công cộng thì X tuân theo quy luật phân phối Poisson $P(a)$ với a là số người trung bình sử dụng dịch vụ đó.

Ví dụ 1.2:

Quan sát trong 20 phút có 10 người vào trạm bưu điện.
Tính xác suất trong 10 phút có 4 người vào trạm đó.

Giải:

Gọi X là số người ngẫu nhiên vào trạm đó trong 10 phút thì X có phân phối $P(a)$, $a = 5$. Khi ấy:

$$P(X = 4) = e^{-5} \cdot \frac{5^4}{4!}$$

§2: Các quy luật phân phối liên tục

1. Phân phối chuẩn $N(a, \sigma^2), \sigma > 0$

Định nghĩa 2.1:

$$X \sim N(a, \sigma^2) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Định lý 2.1: X có phân phối $N(a, \sigma^2)$ thì $E(X) = a$,
 $D(X) = \sigma^2$

Định nghĩa 2.2: Đại lượng ngẫu nhiên U có phân phối chuẩn tắc (hay chuẩn hóa, Gauss, tự nhiên) $N(0,1)$ nếu:

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \quad (\text{hàm mật độ Gauss}).$$

Định lý 2.2: U có phân phối $N(0,1)$ thì

$$P(u) = \bar{\Phi}(u) = F_U(u) = 0,5 + \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0,5 + \Phi(u)$$

với $\Phi(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ là tích phân Laplace (hàm lẻ)

Định lý 2.3: Giả sử U có phân phối $N(0,1)$. Khi ấy ta có:

$$(1) P(u_1 < U < u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) = \bar{\Phi}(u_2) - \bar{\Phi}(u_1);$$

$$(2) P(|U| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon).$$

Định lý 2.4: $X \sim N(a, \sigma^2) \Rightarrow U = \frac{X - a}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ -hàm mật độ Gauss(hàm chuẩn-HÌNH 3.1)}$$

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ - tích phân Laplace (hàm lẻ-HÌNH 3.2)}$$

$$\Phi(u) = 0.5, \forall u > 5$$

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

.tra xuôi: $\Phi(1,96) = 0,4750$ (tra ở hàng 1,9; cột 6 bảng phân Laplace).

.tra ngược: $\Phi(?) = 0,45 \in$ hàng 1,6; giữa cột 4 và cột 5 nên

[cuu duong than cong . com](http://cuuduongthancong.com)

$$\Rightarrow ? = \frac{1,64 + 1,65}{2}$$

\$4.Tích phân Laplace (tt) :

.Tra xuôi bằng máy tính:

ES : MODE STAT AC SH STAT DISTR Q

MS: MODE ...SD SH DISTR Q

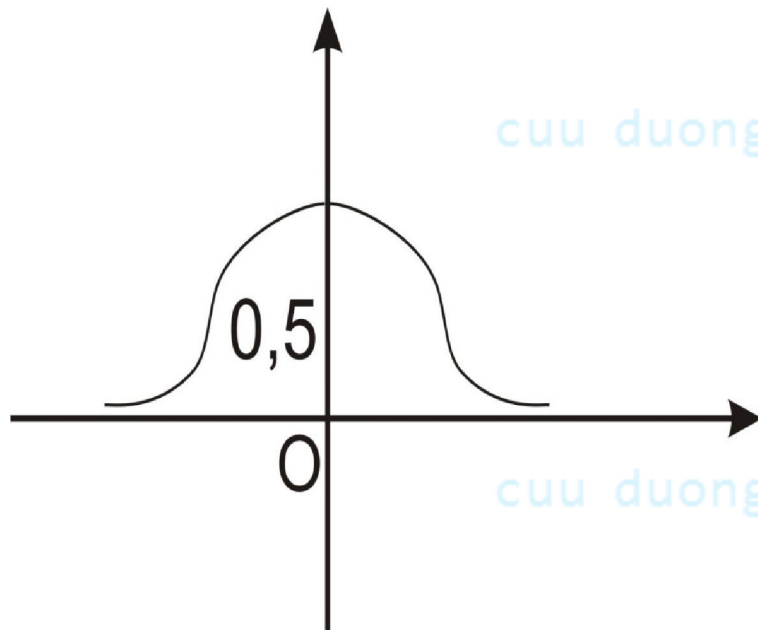
$$\Phi(1,96) = Q(1.96) = 0,4750$$

$$\Phi(-1,96) = -Q(-1.96) = -0,4750$$

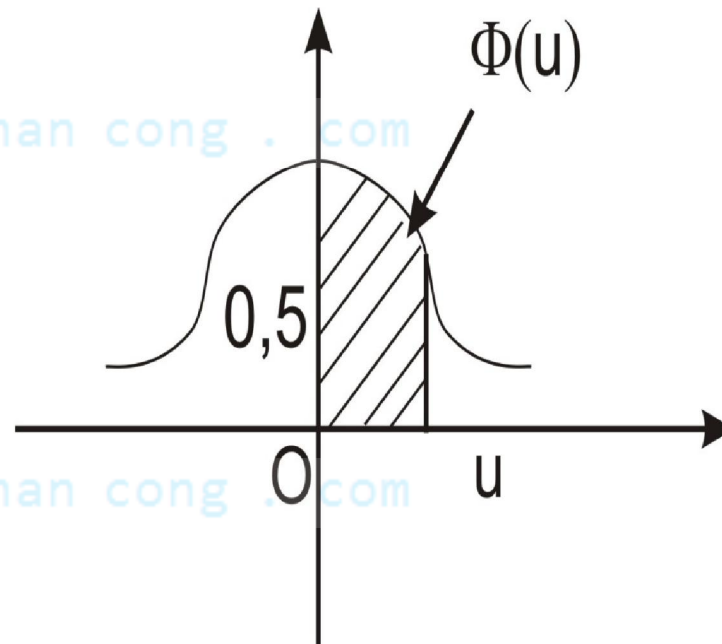
$$Q(u) = |\Phi(u)|$$

$$\bar{\Phi}(u) = P(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + \Phi(u)$$

- Hình 3.1



Hình 3.2



Định lý 2.5: Giả sử $X \sim N(a, \sigma^2)$. Khi ấy ta có:

$$(1) P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \bar{\Phi}\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \bar{\Phi}\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$(2) P(|X - a| < \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \bar{\Phi}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \bar{\Phi}\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Ví dụ 2.1: Chiều cao X của thanh niên có phân phối chuẩn $N(165, 5^2)$. Một thanh niên bị coi là lùn nếu có chiều cao nhỏ hơn 160 cm. Hãy tính tỷ lệ thanh niên lùn.

$$\begin{aligned} P(-\infty < X < 160) &= \Phi\left(\frac{160 - 165}{5}\right) - \Phi(-\infty) \\ &= -\Phi(1) + \Phi(+\infty) = -0,34134 + 0,5 \end{aligned}$$

$$P(-\infty < X < 160) = \bar{\Phi}(-1) = P(-1) = 0,15866$$

Ví dụ 2.2: Cho $U \sim N(0,1)$ hãy tính kỳ vọng của U^m

Giải:

$$E(U^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 0 \text{ nếu } m \text{ lẻ vì cận đối xứng,}$$

hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ.

$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

$$dv = u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \Rightarrow v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

$$\Rightarrow E(U^2) = -u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} E(U^4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \\ &= -u^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 3.E(U^2) = 3.1; \end{aligned}$$

$$E(U^6) = 5E(U^4) = 5.3.1;$$

...

$$E(U^{2n}) = (2n-1)!!$$

2. Phân phối đều liên tục: (Xem SGK)

Định nghĩa 4.1: đại lượng ngẫu nhiên X gọi là có phân phối đều trên đoạn $[a, b]$, kí hiệu $X \sim U[a, b]$, nếu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

Định lý 2.6 : Nếu $X \sim U[a, b]$, thì

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ví dụ :Một đoạn thẳng $AB = a$ cm bị ngắt ngẫu nhiên làm đôi bởi 1 điểm P . Hãy tính diện tích trung bình của hình chữ nhật có 2 cạnh là 2 đoạn đó.

Giải :

Ký hiệu $X=AP$,khi ấy $X \sim U [0, a]$, nghĩa là:

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & x \in [0, a] \\ 0, & x \notin [0, a] \end{cases}$$

$$S = X(a - X)$$

$$E(S) = \frac{1}{a} \int_0^a x(a - x)dx = \frac{a^2}{6} (cm^2)$$

Định nghĩa 2.3: (X, Y) có phân phối đều trên miền D nếu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & \text{nếu } (x, y) \in D \\ 0 & , \text{ nếu } (x, y) \notin D \end{cases}$$

, với $S(D)$ là diện tích miền D

Ví dụ :Một đoạn thẳng $AB = a$ cm bị ngắt ngẫu nhiên làm ba bởi 2 điểm P, Q . Hãy tính thể tích trung bình của hình hộp chữ nhật có 3 cạnh là 3 đoạn đó.

Giải :

Ký hiệu $X=AP, Y=PQ$,khi ấy (X, Y) có phân phối đều trên miền

$$D : 0 \leq X \leq a, 0 \leq Y \leq a, X + Y \leq a$$

nghĩa là:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}, & \text{nếu } (x, y) \in D \\ 0, & \text{nếu } (x, y) \notin D \end{cases}$$

$$V = X.Y.(a - X - Y)$$

$$E(V) = \frac{2}{a^2} \int_0^a dx \int_0^{a-x} yx(a - x - y)dy (cm^3)$$

3. Phân phối mũ $E(\lambda)$:

Định nghĩa 2.3: Đại lượng ngẫu nhiên X gọi là có phân phối mũ nếu hàm mật độ của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{nếu } x \geq 0; \\ 0 & \text{nếu } x < 0, \end{cases} \quad \lambda > 0$$

Định lý 2.7 :

$$X \sim E(\lambda) \Rightarrow E(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

4. Phân phối khi bình phương:(Xem SGK)

5. Phân phối Student:(Xem SGK)

§3. Các định lý giới hạn (luật số lớn).

1. Định lý Chebyshev:

- Định lý 3.1 (Bất đẳng thức Chebyshev): Cho X là 1 đại lượng ngẫu nhiên. Khi đó ta có:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

- Định lý 3.2 (Chebyshev): Cho dãy $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ đôi một độc lập có $\exists C > 0 : D(X_k) \leq C, \forall k$. Khi đó ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

2. Định lý Bernoulli:

- Định lý 3.3 (Bernoulli): Nếu m là số lần thành công trong dãy n phép thử Bernoulli với xác suất thành công p thì:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1$$

3. Các định lý giới hạn trung tâm.

Định lý 3.4(Lyapounov): Giả sử $X_1, X_2, \dots, X_n$ đôi một độc lập và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n E |X_k - E(X_k)|^3}{\left(\sum_{k=1}^n D(X_k) \right)^{3/2}} = 0$$

Khi ấy ta có:

$$U = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)}{\frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n D(x_i)}} \approx N(0,1) \quad \text{khi } n \text{ đủ lớn } (n \geq 30)$$

Hệ quả 3.1: Giả sử thêm vào đó ta có

$$E(X_i) = a, D(X_i) = \sigma^2, i = \overline{1, n}$$

Khi ấy ta có

$$U = \frac{(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i - a) \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \approx N(0,1) \quad \text{khi } n \text{ đủ lớn}$$

Hệ quả 3.2:

$$U = \frac{(\frac{m}{n} - p) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0,1) \quad \text{khi } n \text{ đủ lớn}$$

Ví dụ 3.1: Biến ngẫu nhiên X là trung bình cộng của n biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối: $X_1, X_2, \dots, X_n$ với phương sai: $D(X_i) = 5 (i = 1, 2, \dots, n)$

Xác định n sao cho với xác suất không bé hơn 0,9973 :

a) Hiệu của $X - E(X)$ không vượt quá 0,01

b) Trị tuyệt đối của $X - E(X)$ không vượt quá 0,005.

Bài giải:

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, E(X_i) = a \Rightarrow E(X) = a;$$

$$D(X_i) = \sigma^2 = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$a) P(X - E(X) \leq 0,01) \geq 0,9973$$

$$\Leftrightarrow P\left(U = \frac{(X - a)\sqrt{n}}{\sigma} \leq \frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) \geq 0,9973$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) + 0,5 \geq 0,9973$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) \geq 0,4973 = \Phi(2,785)$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{5}} \geq 2,785 \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{2,785 \cdot \sqrt{5}}{0,01}\right)^2$$

b)

$$P(|X - E(X)| < 0,005) \geq 0,9973$$

$$\Leftrightarrow P\left(|U| = \frac{|X - E(X)| \sqrt{n}}{\sigma} < \frac{0,005 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{5}} = \varepsilon\right) \geq 0,9973$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \Phi\left(\frac{0,005 \sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) \geq 0,9973$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0,005 \sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) \geq \frac{0,9973}{2} = \Phi(3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,005 \sqrt{n}}{\sqrt{5}} \geq 3 \Rightarrow n \geq \left(\frac{3\sqrt{5}}{0,005}\right)^2$$

\$4. Các công thức tính gần đúng

1. Công thức gần đúng giữa siêu bội và nhị thức.

Định lý 4.1: **Khi $n < N$ nhiều** thì $H(N, M, n) \approx B(n, p)$, $p = \frac{M}{N}$
nghĩa là:

$$P(X = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Ví dụ 4.1: Giả sử cho 1 hộp có $N=1000$ bi trong đó có $M=600$ bi trắng còn lại là bi đen. Rút ngẫu nhiên ra 20 bi, tính xác suất để lấy được đúng 12 bi trắng.

$$P(X = 12) = \frac{C_{600}^{12} \cdot C_{400}^8}{C_{1000}^{20}} \approx C_{20}^{12} \cdot 0,6^{12} \cdot 0,4^8$$

2. Nhị thức và Poisson:

Định lý 4.2: Khi n đủ lớn, p rất bé $\Rightarrow B(n, p) \approx P(a)$ với $a=np$,

nghĩa là:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx e^{-a} \cdot \frac{a^k}{k!}, k = \overline{0, n}$$

Ví dụ 4.2: Một xe tải vận chuyển 8000 chai rượu vào kho. Xác suất để khi vận chuyển mỗi chai bị vỡ là 0,001. Tìm xác suất để khi vận chuyển:

- a) Có đúng sáu chai bị vỡ
- b) Có không quá 12 chai bị vỡ.

. **Giải:** Gọi X là số chai bị vỡ thì X có phân phối $B(n,p)$

$$n = 8000, p = 0,001 \Rightarrow a = np = 8$$

$$1) P(X = 6) = C_{8000}^6 \cdot p^6 \cdot q^{8000-6} \approx e^{-8} \cdot \frac{8^6}{6!} = 0,122138$$

$$2) P(0 \leq X \leq 12) \approx \sum_{m=0}^{12} e^{-8} \cdot \frac{8^m}{m!} = 0,936204$$

Chú ý: Khi p rất lớn thì q rất bé vậy ta có thể coi q là p mới (tức là đổi p thành q, q thành p).

3. Phân phối nhị thức và phân phối chuẩn

Định lý: Khi n đủ lớn, p không quá bé và cũng không quá lớn thì $B(n, p) \approx N(np, npq)$, nghĩa là:

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot f\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Ví dụ 4.3: Xác suất trúng đích của một viên đạn là 0,2. Tìm xác suất để khi bắn 400 viên thì có tất cả:

a) 70 viên trúng

b) Từ 60 đến 100 viên trúng.

Giải: Gọi X là số đạn bắn trúng thì X có phân phối nhị thức với $n=400$ và $p=0,2$ nên $np=80, npq=64$. Khi ấy

$$a) P(X=70) = C_{400}^{70} \cdot p^{70} \cdot q^{330} \approx \frac{1}{8} f\left(\frac{70-80}{8}\right) = \frac{1}{8} \cdot f(1,25) = \frac{0,1826}{8}$$

$$\begin{aligned} b) P(60 \leq X \leq 100) &\approx \Phi\left(\frac{100-80}{8}\right) - \Phi\left(\frac{60-80}{8}\right) \\ &= 2 \cdot \Phi(2,5) = 2 \cdot 0,49379 \end{aligned}$$