

XÁC SUẤT - THỐNG KÊ

CHƯƠNG 5: KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

TS. Phan Thị Hường

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng
Email: huongphan@hcmut.edu.vn



TP. HCM — 2020.

NỘI DUNG

1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

NỘI DUNG

- 1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN
- 2 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI ĐÃ BIẾT

NỘI DUNG

- 1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN
- 2 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI ĐÃ BIẾT
- 3 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI CHƯA BIẾT

NỘI DUNG

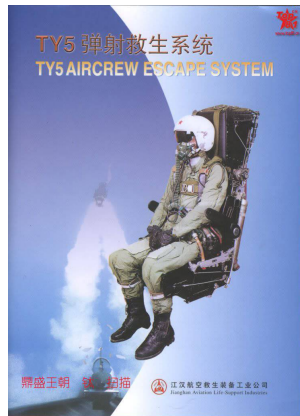
- 1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN
- 2 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI ĐÃ BIẾT
- 3 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI CHƯA BIẾT
- 4 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG CHO MỘT PHÂN PHỐI BẤT KỲ

NỘI DUNG

- 1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN
- 2 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI ĐÃ BIẾT
- 3 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI CHƯA BIẾT
- 4 KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG CHO MỘT PHÂN PHỐI BẤT KỲ
- 5 KIỂM ĐỊNH CHO TỶ LỆ

BÀI TOÁN THỰC TẾ

Giả sử rằng một kỹ sư đang thiết kế hệ thống thoát hiểm của phi hành đoàn bao gồm một ghế phóng và một động cơ để đẩy ghế phóng. Động cơ có chứa thuốc phóng, và để hệ thống này hoạt động bình thường thì thuốc phóng cần cháy với tốc độ trung bình là 50 cm/giây. Nếu tốc độ cháy của chất phóng quá chậm hoặc quá nhanh đều có thể dẫn đến thương tích cho phi công.



BÀI TOÁN THỰC TẾ

Giả sử rằng các kỹ sư đã thực hiện khảo sát tốc độ cháy của thuốc phóng trong 10 đợt thí nghiệm và ghi nhận kết quả như sau:

50.1, 50.3, 49.2, 48.5, 50.1, 49.9, 48.3, 51.2, 51.4, 50.6

BÀI TOÁN THỰC TẾ

Giả sử rằng các kỹ sư đã thực hiện khảo sát tốc độ cháy của thuốc phóng trong 10 đợt thí nghiệm và ghi nhận kết quả như sau:

50.1, 50.3, 49.2, 48.5, 50.1, 49.9, 48.3, 51.2, 51.4, 50.6

Dựa trên dữ liệu thu được, câu hỏi thực tế phải được trả lời có thể là một trong các trường hợp sau:

BÀI TOÁN THỰC TẾ

Giả sử rằng các kỹ sư đã thực hiện khảo sát tốc độ cháy của thuốc phóng trong 10 đợt thí nghiệm và ghi nhận kết quả như sau:

50.1, 50.3, 49.2, 48.5, 50.1, 49.9, 48.3, 51.2, 51.4, 50.6

Dựa trên dữ liệu thu được, câu hỏi thực tế phải được trả lời có thể là một trong các trường hợp sau:

- 1 Tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng có bằng 50 cm / giây hay không?

BÀI TOÁN THỰC TẾ

Giả sử rằng các kỹ sư đã thực hiện khảo sát tốc độ cháy của thuốc phóng trong 10 đợt thí nghiệm và ghi nhận kết quả như sau:

50.1, 50.3, 49.2, 48.5, 50.1, 49.9, 48.3, 51.2, 51.4, 50.6

Dựa trên dữ liệu thu được, câu hỏi thực tế phải được trả lời có thể là một trong các trường hợp sau:

- 1 Tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng có bằng 50 cm / giây hay không?
- 2 Tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng là lớn hơn 50 cm / giây?

BÀI TOÁN THỰC TẾ

Giả sử rằng các kỹ sư đã thực hiện khảo sát tốc độ cháy của thuốc phóng trong 10 đợt thí nghiệm và ghi nhận kết quả như sau:

50.1, 50.3, 49.2, 48.5, 50.1, 49.9, 48.3, 51.2, 51.4, 50.6

Dựa trên dữ liệu thu được, câu hỏi thực tế phải được trả lời có thể là một trong các trường hợp sau:

- 1 Tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng có bằng 50 cm / giây hay không?
- 2 Tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng là lớn hơn 50 cm / giây?
- 3 Tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng là nhỏ hơn 50 cm / giây?

CÁC GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ (STATISTICAL HYPOTHESES)

ĐỊNH NGHĨA 1.1

CÁC GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ (STATISTICAL HYPOTHESES)

ĐỊNH NGHĨA 1.1

- Một *giả thuyết thống kê*, hay còn gọi tắt là *giả thuyết*, là một phát biểu hay khẳng định về một giá trị của một tham số, hay dạng của phân phối của một quần thể.

CÁC GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ (STATISTICAL HYPOTHESES)

ĐỊNH NGHĨA 1.1

- Một *giả thuyết thống kê*, hay còn gọi tắt là *giả thuyết*, là một phát biểu hay khẳng định về một giá trị của một tham số, hay dạng của phân phối của một quần thể.
- *Giả thuyết không (H_0)* (Null hypothesis) là một giả thuyết mà ban đầu được giả định là đúng.

CÁC GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ (STATISTICAL HYPOTHESES)

ĐỊNH NGHĨA 1.1

- Một **giả thuyết thống kê**, hay còn gọi tắt là giả thuyết, là một phát biểu hay khẳng định về một giá trị của một tham số, hay dạng của phân phối của một quần thể.
- **Giả thuyết không (H_0)** (Null hypothesis) là một giả thuyết mà ban đầu được giả định là đúng.
- **Đôi thuyết (H_1)** (Alternative hypothesis) là giả thuyết ngược lại với H_0 .

CÁC GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ (STATISTICAL HYPOTHESES)

ĐỊNH NGHĨA 1.1

- Một **giả thuyết thống kê**, hay còn gọi tắt là giả thuyết, là một phát biểu hay khẳng định về một giá trị của một tham số, hay dạng của phân phối của một quần thể.
- **Giả thuyết không (H_0)** (Null hypothesis) là một giả thuyết mà ban đầu được giả định là đúng.
- **Đôi thuyết (H_1)** (Alternative hypothesis) là giả thuyết ngược lại với H_0 .
- **Kiểm định giả thuyết thống kê** là phương pháp sử dụng dữ liệu để đưa ra quyết định có đủ chứng cứ để bác bỏ giả thuyết không (H_0) hay không.

CÁC GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ (STATISTICAL HYPOTHESES)

Ghi chú: Chú ý rằng bài toán Kiểm định giả thuyết thống kê được xây dựng với ý đồ là **bác bỏ giả thuyết H_0** dựa trên thông tin từ dữ liệu, cho nên :

- Phát biểu mà mình cần chứng minh là đúng sẽ đặt vào giả thuyết đối H_1 .
- Chỉ đưa ra kết luận bác bỏ/ không bác bỏ H_0 .
- Bác bỏ giả thuyết H_0 là một kết luận mạnh $\Rightarrow$ có đủ chứng cứ để nói rằng H_1 đúng.
- Không bác bỏ giả thuyết H_0 là một kết luận yếu $\Rightarrow$ chưa có đủ chứng cứ để nói rằng H_1 đúng (không biết H_1 có thực sự đúng hay không).

CÁC GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ (STATISTICAL HYPOTHESES)

- Dữ liệu có cho ta đủ chứng cứ để kết luận rằng tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng có bằng 50 cm / giây hay không?:
 $H_0: \mu = 50 \text{ cm/giây}$ và $H_1: \mu \neq 50 \text{ cm/s}$.
(Giả thuyết hai chiều)
- Dữ liệu có cho ta đủ chứng cứ để kết luận rằng tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng là lớn hơn 50 cm / giây hay không?
 $H_0: \mu = 50 \text{ cm/giây}$ và $H_1: \mu > 50 \text{ cm/s}$.
(Giả thuyết một chiều)
- Dữ liệu có cho ta đủ chứng cứ để kết luận rằng tốc độ cháy trung bình của thuốc phóng là nhỏ hơn 50 cm / giây hay không?
 $H_0: \mu = 50 \text{ cm/giây}$ và $H_1: \mu < 50 \text{ cm/s}$.
(Giả thuyết một chiều)

QUY TRÌNH XÂY DỰNG KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ.

ĐỊNH NGHĨA 1.2

- Một *tiêu chuẩn kiểm định (test statistic)* là một hàm số của dữ liệu khi H_0 được giả sử là đúng. Thay dữ liệu vào tiêu chuẩn kiểm định ta được *giá trị kiểm định thống kê*.
- Với *mức ý nghĩa* α cho trước, *miền bác bỏ* RR là tập tất cả các giá trị kiểm định thống kê cho phép ta sẽ bác bỏ H_0 :

$$P(Z \in RR) = \alpha,$$

trong đó Z là tiêu chuẩn kiểm định. $AR = \overline{RR}$ được gọi là miền chấp nhận. Giá trị ngăn cách giữa miền bác bỏ và miền không bác bỏ được gọi là *điểm tới hạn*.

TRỊ SỐ P (P-VALUE)

ĐỊNH NGHĨA 1.3

Trị số p_v là mức ý nghĩa α nhỏ nhất mà giả thuyết H_0 có thể bị bác bỏ. Trị số p_v còn được gọi là mức ý nghĩa quan quát được từ dữ liệu.

NGUYÊN TẮC KIỂM ĐỊNH VỚI TRỊ SỐ P

- 1 Nếu $p_v \leq \alpha$ thì bác bỏ H_0 .
- 2 Nếu $p_v > \alpha$ thì không thể bác bỏ H_0 .

P-VALUE

P-VALUE

- Bác bỏ giả thuyết $H_0 \Leftrightarrow p_v < \alpha$.

P-VALUE

- Bác bỏ giả thuyết $H_0 \Leftrightarrow p_v < \alpha$.
- $\alpha = P(\text{bác bỏ } H_0 | H_0 \text{ đúng}) = P(\text{sai lầm loại 1})$
 $\rightarrow \alpha \text{ càng nhỏ} \Leftrightarrow \text{kết luận càng thuyết phục.}$

P-VALUE

- Bác bỏ giả thuyết $H_0 \Leftrightarrow p_v < \alpha$.
- $\alpha = P(\text{bác bỏ } H_0 | H_0 \text{ đúng}) = P(\text{sai lầm loại 1})$
 $\rightarrow \alpha$ càng nhỏ $\Leftrightarrow$ kết luận càng thuyết phục.
- p-value cung cấp một thước đo về độ tin cậy của giả thuyết H_0 .

p-value	độ tin cậy
<0.01	chứng cứ rất mạnh để bác bỏ H_0
0.01 - 0.05	chứng cứ mạnh để bác bỏ H_0
0.05 - 0.1	chứng cứ rất yếu để bác bỏ H_0
>0.1	không đủ chứng cứ để bác bỏ H_0

QUY TRÌNH XÂY DỰNG KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ.

Xét bài toán kiểm định giả thuyết có giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1 , với mức ý nghĩa α cho trước. Một quy trình kiểm định bao gồm 4 bước:

- BƯỚC 1:** Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1 .
- BƯỚC 2:** Tính giá trị kiểm định thống kê dựa trên giả sử rằng H_0 đúng.
- BƯỚC 3:** Xác định miền bác bỏ RR hoặc trị số p_{value} dựa trên phân phối của tiêu chuẩn kiểm định thống kê.
- BƯỚC 4:** Đưa ra kết luận bác bỏ H_0 nếu giá trị kiểm định thống kê thuộc miền bác bỏ hoặc $p_{value} < \alpha$.

KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI ĐÃ BIẾT

Các giả định: $X_1, \dots, X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên từ phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ với phương sai σ^2 đã biết.

CÁC BƯỚC KIỂM ĐỊNH

- Tính giá trị kiểm định thống kê: $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$
- Cho trước mức ý nghĩa α , xác định miền bác bỏ hoặc trị số p_v theo quy tắc:

Đối thuyết H_1	Miền bác bỏ	Trị số p_v
$\mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 > z_{\alpha/2}\}$	$2[1 - \Phi(z_0)]$
$\mu > \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 > z_\alpha\}$	$1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 < -z_\alpha\}$	$\Phi(z_0)$

KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI ĐÃ BIẾT

VÍ DỤ 2.1

Trong bài toán về thiết kế hệ thống thoát hiểm của phi hành đoàn, chúng ta nói rằng hệ thống là đạt tiêu chuẩn nếu tốc độ trung bình đốt cháy của chất phóng là 50 cm/giây. Ta xem xét giả thuyết:

$H_0: \mu = 50$ cm/giây vs $H_1: \mu \neq 50$ cm/s.

Giả sử rằng chúng ta biết tốc độ đốt cháy của chất phóng có phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 2 cm/giây. Người ta thực hiện 25 lần đo và ghi nhận trung bình mẫu là 51.3 cm/giây. Thực hiện kiểm định với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$ để xác định xem liệu hệ thống này có đạt yêu cầu chất lượng hay không.

KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI CHƯA BIẾT

Các giả định: Các giả định: $X_1, \dots, X_n$ là một mẫu ngẫu nhiên từ phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ với phương sai σ^2 không biết.

CÁC BƯỚC KIỂM ĐỊNH

- 1 Tính giá trị thống kê kiểm định: $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- 2 Xác định miền bác bỏ hoặc trị số p_v theo quy tắc:

Đối thuyết H_1	Miền bác bỏ	Trị số p_v
$\mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \{t_0 : t_0 > t_{\alpha/2, n-1}\}$	$2P(T > t_0)$
$\mu > \mu_0$	$W_\alpha = \{t_0 : t_0 > t_{\alpha, n-1}\}$	$P(T > t_0)$
$\mu < \mu_0$	$W_\alpha = \{t_0 : t_0 < -t_{\alpha, n-1}\}$	$P(T < t_0)$

Với $T \sim t(n-1)$ có phân phối student với $n-1$ bậc tự do.

KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG VỚI PHƯƠNG SAI CHƯA BIẾT

VÍ DỤ 3.1

Một công ty tuyên bố rằng pH trung bình của nước sông gần đó là 6.8. Bạn chọn ngẫu nhiên 25 mẫu nước và đo độ pH của chngs. Dưới đây là bảng kết quả

6.6	7.3	6.7	6.6	6.8	6.9	6.4	6.6	7.1	6.6	6.8	7.0	6.5
7.0	6.4	6.1	6.7	6.8	6.7	6.2	6.7	6.2	6.8	6.1	6.6	

Giả sử rằng độ PH của các con sông có phân phối chuẩn. Ta có thể bác bỏ tuyên bố của công ty với mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$ hay không?

KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG CHO MỘT PHÂN PHỐI BẤT KỲ

Các giả định: Cỡ mẫu đủ lớn, không biết phân phối tổng thể hoặc phân phối tổng thể không tuân theo phân phối chuẩn.

CÁC BƯỚC KIỂM ĐỊNH

- 1 Tính giá trị kiểm định thống kê:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}, \quad (\text{biết } \sigma^2) \quad \text{hoặc} \quad z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \quad (\text{không biết } \sigma^2)$$

- 2 Xác định miền bác bỏ hoặc trị số p_v theo quy tắc:

Đối thuyết H_1	Miền bác bỏ	Trị số p_v
$\mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 > z_{\alpha/2}\}$	$2[1 - \Phi(z_0)]$
$\mu > \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 > z_\alpha\}$	$1 - \Phi(z_0)$
$\mu < \mu_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 < -z_\alpha\}$	$\Phi(z_0)$

KIỂM ĐỊNH KỲ VỌNG CHO MỘT PHÂN PHỐI BẤT KỲ

VÍ DỤ 4.1

Người ta cần kiểm tra độ mạnh của các bánh răng nhựa (đơn vị: foot-pound) dùng trong một loại máy in. Kiểm tra độ mạnh của 151 bánh răng được chọn ngẫu nhiên từ loại máy in này người ta ghi nhận trung bình mẫu 490 và phương sai mẫu 976. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0.02$, có đủ cơ sở để kết luận rằng độ mạnh trung bình của các bánh răng là lớn hơn 450?

KIỂM ĐỊNH CHO TỶ LỆ

- Gọi p là tỷ lệ của những phần tử thỏa một đặc tính $\mathcal{A}$ của tổng thể, mà ta quan tâm.
- Khảo sát n phần tử, đặt

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{nếu phần tử thứ } i \text{ thỏa tính chất } \mathcal{A}, \\ 0, & \text{nếu không,} \end{cases}$$

Ta có $Y_i \sim B(1, p)$, $i = 1, \dots, n$.

- Đặt $X = Y_1 + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ thì X = tổng số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát và $X \sim B(n, p)$.
- Tỷ lệ mẫu được tính bởi

$$\hat{p} = \frac{X}{n}.$$

KIỂM ĐỊNH CHO TỶ LỆ

Giả định: Cỡ mẫu đủ lớn.

CÁC BƯỚC KIỂM ĐỊNH

- 1 Tính giá trị kiểm định thống kê:

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

- 2 Xác định miền bác bỏ hoặc trị số p_v theo quy tắc:

Đối thuyết H_1	Miền bác bỏ	Trị số p_v
$p \neq p_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 > z_{\alpha/2}\}$	$2[1 - \Phi(z_0)]$
$p > p_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 > z_{1-\alpha}\}$	$1 - \Phi(z_0)$
$p < p_0$	$W_\alpha = \{z_0 : z_0 < -z_\alpha\}$	$\Phi(z_0)$

KIỂM ĐỊNH CHO TỶ LỆ

VÍ DỤ 5.1

Năm 2013, ở Việt Nam có 5% dân số bị hen suyễn. Một nghiên cứu cũng trong năm đó trên 6701 trẻ em trong độ tuổi 13-14 ở Hà Nội cho thấy có 260 em bị chẩn đoán hen suyễn. Liệu ta có đủ cơ sở để kết luận rằng tỷ lệ trẻ em trong độ tuổi 13-14 bị hen suyễn ở Hà Nội ít hơn 5% với mức ý nghĩa 0.01 không?