

Chương 6. Lý thuyết ước lượng

§1. Khái niệm chung về ước lượng.

- Ký hiệu θ là a,p, hoặc σ^2
- Việc dùng kết quả của mẫu để đánh giá 1 tham số θ nào đó của tổng thể được gọi là ước lượng θ

1.Ước lượng điểm:

Chọn $G=G(W)$,sau đó lấy $\theta \approx G$

- 1.Không chệch: $E(G) = \theta$
- 2.Vững: $\lim_{n \rightarrow \infty} G = \theta$
- 3.Hiệu quả: $D(G) \rightarrow \min$
- 4.Ước lượng có tính hợp lý tối đa(ứng với xác suất lớn nhất-xem SGK)

Kết quả: $a \approx \bar{x}$: có đủ 4 tính chất trên.

$p \approx f$: có đủ 4 tính chất trên.

$\sigma^2 \approx S^2$: Không chệch

$\sigma^2 \approx \hat{S}^2$: Hợp lý tối đa

2. Ước lượng khoảng:

Định nghĩa: Khoảng (θ_1, θ_2) được gọi là khoảng ước lượng của tham số θ với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ nếu:

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha$$

$I = \theta_2 - \theta_1$ - độ dài khoảng ước lượng hay khoảng tin cậy.

Sơ đồ giải: Chọn $G(W, \theta)$ sao cho G có quy luật phân phối xác suất đã biết, tìm 2 số g_1, g_2 sao cho

$$P(g_1 < G < g_2) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow g_1 < g(w, \theta) < g_2$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 < \theta < \theta_2$$

§2. Ước lượng khoảng của tỷ lệ tổng thể p .

Bài toán: từ tổng thể lấy 1 mẫu kích thước n có tỷ lệ mẫu f . Với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$, hãy tìm khoảng tin cậy của p .

Giải: Chọn

$$G = U = \frac{(f - p)\sqrt{n}}{\sqrt{f(1-f)}} \approx N(0,1) \text{ nếu } n \text{ đủ lớn}$$

Xét

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$\Rightarrow P(u_{\alpha_1} < U < u_{1-\alpha_2}) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow -Z_{2\alpha_1} = u_{\alpha_1} < \frac{(f - p)\sqrt{n}}{\sqrt{f(1-f)}} < u_{1-\alpha_2} = Z_{2\alpha_2}$$

$$\Leftrightarrow f - \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha_2} < p < f + \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha_1}$$

$$1) \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0 \Rightarrow -\infty < p < f + \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha}$$

(ước lượng tỷ lệ tối đa)

$$2) \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha \Rightarrow f - \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha} < p < +\infty$$

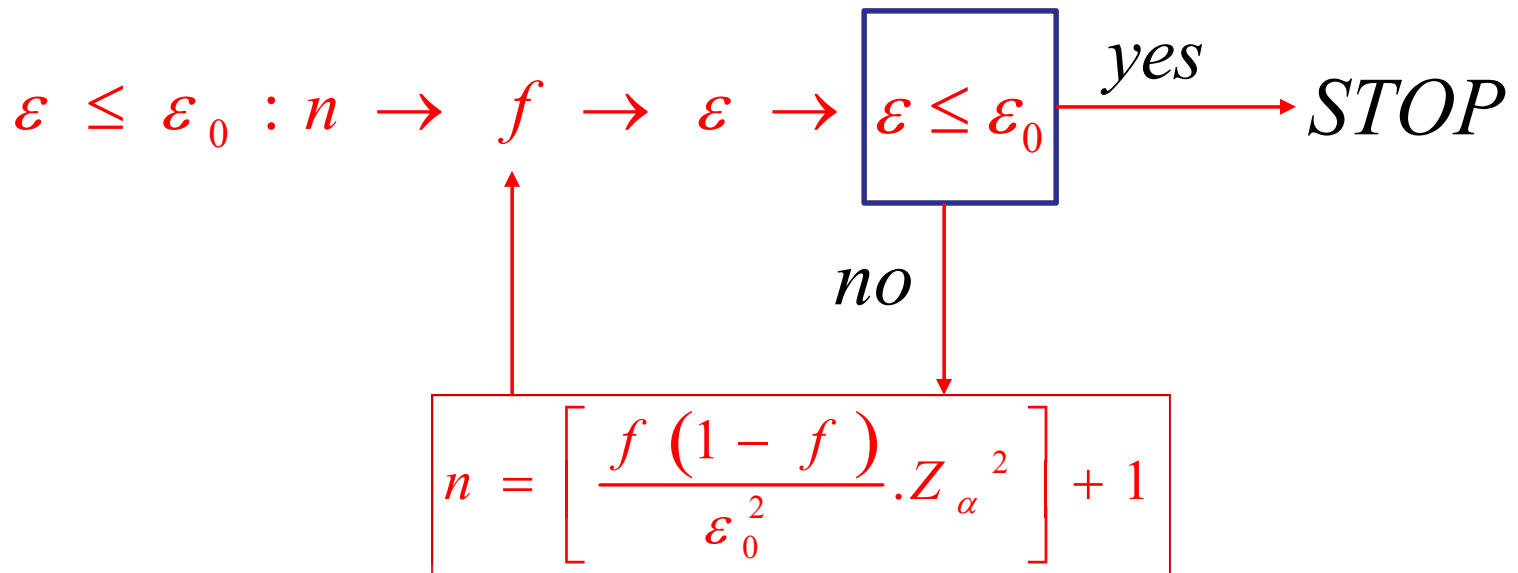
(ước lượng tỷ lệ tối thiểu)

$$3) \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\alpha} - \text{độ chính xác}$$

$$\Rightarrow f - \varepsilon < p < f + \varepsilon \quad (\text{Ước lượng đối xứng})$$

$$\Rightarrow I = 2\varepsilon \quad (\text{Độ dài khoảng tin cậy})$$

$$n = \left[\frac{f(1-f)}{\varepsilon^2} \cdot Z_{\alpha}^2 \right] + 1$$



.Quy ước: Nếu đề bài không nói rõ thì ta xét ước lượng đối xứng.

Ví dụ 2.1:

Để điều tra số cá trong hồ, cơ quan quản lý đánh bắt 300 con, làm dấu rồi thả xuống hồ, lần 2 bắt ngẫu nhiên 400 con thấy 60 con có dấu. Hãy xác định số cá trong hồ với độ tin cậy bằng 0.95.

Giải: Gọi N là số cá trong hồ

P là tỷ lệ cá bị đánh dấu trong hồ : $P = \frac{300}{N}$

$$n = 400, m = 60 \Rightarrow f = 0,15$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{f \cdot (1-f)}}{\sqrt{n}} \cdot Z_{0,05} = \frac{\sqrt{0,15 \cdot 0,85}}{\sqrt{400}} \cdot 1,96$$

$$\Rightarrow f - \varepsilon < P = \frac{300}{N} < f + \varepsilon \Leftrightarrow ? < N < ?$$

Ví dụ 2.2: Cần lập một mẫu ngẫu nhiên với kích thước bao nhiêu để tỷ lệ phế phẩm của mẫu là 0,2 ;độ dài khoảng tin cậy đối xứng là 0,02 và độ tin cậy là 0.95.

Bài giải:

$$\gamma = 0,95, I = 0,02, f = 0,2 \Rightarrow n$$

$$I = 0,02 \Rightarrow \varepsilon = 0,01$$

$$n = \left[\frac{0,2 \cdot 0,8}{(0,01)^2} \cdot (1,96)^2 \right] + 1$$

§3. Ước lượng khoảng của trung bình tổng thể μ

Bài toán: Từ tổng thể lấy 1 mẫu kích thước n có trung bình mẫu $\bar{x}$ và phương sai điều chỉnh mẫu S^2 . Với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$, tìm khoảng ước lượng của trung bình tổng thể μ .

Bài giải. Ta xét 3 trường hợp:

TH1. Đã biết phương sai tổng thể σ^2

Chọn
$$G = U = \frac{(\bar{x} - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Xét $\alpha_{1,2} \geq 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \Rightarrow \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha_2} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha_1}$

$$1. \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0 \Rightarrow -\infty < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha}$$

(Ước lượng trung bình tối đa)

$$2. \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha, \rightarrow \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha} < a < +\infty$$

(Ước lượng trung bình tối thiểu)

$$3. \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\alpha} - \text{độ chính xác}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon \quad (\text{ước lượng đối xứng})$$

$I = 2\varepsilon$ - độ dài khoảng ước lượng đối xứng

$$n = \left[\left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot Z_{\alpha} \right)^2 \right] + 1.$$

TH2. Chưa biết phương sai tổng thể σ^2 , $n \geq 30$

Chọn:

$$G = U = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{S} \sim N(0,1)$$

$$\alpha_{1,2} \geq 0; \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \Rightarrow \bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha_2} < a < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha_1}$$

Kết quả tương tự TH1, thay σ bằng S ta có:

$$1. \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0 \Rightarrow -\infty < a < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha}$$

(Ước lượng trung bình tối đa)

$$2. \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha \rightarrow \bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{2\alpha} < a < +\infty$$

(Ước lượng trung bình tối thiểu)

$$3. \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} \rightarrow \varepsilon = \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\alpha} \text{ - độ chính xác}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon \text{ (ước lượng đối xứng)}$$

$I = 2\varepsilon$ - độ dài khoảng ước lượng đối xứng

$$n = \left[\left(\frac{S}{\varepsilon} \cdot Z_{\alpha} \right)^2 \right] + 1.$$

. TH3. Chưa biết phương sai tổng thể σ^2 , $n < 30$

$$\text{Chọn } G = T = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{S} \sim T(n-1)$$

$$\text{Xét } \alpha_{1,2} \geq 0; \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(t_{\alpha_1}^{()} < T < t_{1-\alpha_2}^{()}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow -T_{2\alpha_1}^{(n-1)} < \frac{(x - a)\sqrt{n}}{S} < T_{2\alpha_2}^{(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} T_{2\alpha_2}^{(n-1)} < a < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} T_{2\alpha_1}^{(n-1)}$$

Kết quả tương tự TH2, thay Z_α bằng $T_\alpha^{(n-1)}$ ta có:

$$1. \alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0 \Rightarrow -\infty < a < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot T_{2\alpha}^{(n-1)}$$

(Ước lượng trung bình tối đa)

$$2. \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha \rightarrow \bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot T_{2\alpha}^{(n-1)} < a < +\infty$$

(Ước lượng trung bình tối thiểu)

$$3. \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} \rightarrow \varepsilon = \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot T_{\alpha}^{(n-1)} \text{ - độ chính xác}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon \text{ (ước lượng đối xứng)}$$

$I = 2\varepsilon$ - độ dài khoảng ước lượng đối xứng

$$n = \left[\left(\frac{S}{\varepsilon} \cdot T_{\alpha}^{(n-1)} \right)^2 \right] + 1.$$

Ví dụ 3.1. Hao phí nguyên liệu cho 1 sản phẩm là 1 đại lượng ngẫu nhiên tuân theo quy luật chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 0,03$. Người ta sản xuất thử 36 sản phẩm và thu được bảng số liệu:

Mức hao phí nguyên liệu(gam)	19,5-19,7	19,7-19,9	19,9-20,1	20,1-20,3
Số sản phẩm	6	8	18	4

Với độ tin cậy 0,99, hãy ước lượng mức hao phí nguyên liệu trung bình cho 1 sản phẩm nói trên.

TH1.

$$\sigma = 0,03, \bar{x} = 19,91111, \alpha = 0,01 \Rightarrow Z_{0,01} = 2,575$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\alpha} = \frac{0,03}{\sqrt{36}} \cdot 2,575 = 0,012875$$

$$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon$$

Cách bấm máy:

$$.03 \times 2.575 : \sqrt{36} = \rightarrow \varepsilon$$

$$SH \ S-VAR \ \bar{x} - ANS = \rightarrow \bar{x} - \varepsilon$$

$$SH \ S-VAR \ \bar{x} \times 2 - ANS = \rightarrow \bar{x} + \varepsilon$$

Ví dụ 3.2. Để ước lượng xăng hao phí trung bình cho 1 loại xe ô tô chạy trên đoạn đường từ A đến B ,chạy thử 49 lần trên đoạn đường này ta có bảng số liệu:

Lượng xăng hao phí(lit)	9,6-9,8	9,8-10,0	10,0-10,2	10,2-10,4	10,4-10,6
Số lần	4	8	25	8	4

Với độ tin cậy 0.95,hãy tìm khoảng tin cậy cho mức hao phí xăng trung bình của loại xe nói trên.

Giải $TH 2 : n = 49 > 30; \bar{x} = 10,1 ; S = 0,2$

$$\gamma = 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow Z_{0,05} = 1,96$$

$$\varepsilon = \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\alpha} = \frac{0,2}{7} 1,96 = 0,056$$

$$\Rightarrow 10,044 < a < 10,156$$

Cách bấm máy

$$SH \ STAT \ VAR \ x \sigma n - 1 \times 1.96 : \sqrt{49} = SH \ STO \ A \rightarrow \varepsilon$$

$$SH \ STAT \ VAR \ \bar{x} - ALPHA \ A = \rightarrow \bar{x} - \varepsilon$$

$$SH \ STAT \ VAR \ \bar{x} + ALPHA \ A = \rightarrow \bar{x} + \varepsilon$$

§4. Ước lượng khoảng của phương sai tổng thể σ^2

Bài toán: Từ tổng thể lấy 1 mẫu kích thước n , có phương sai hiệu chỉnh mẫu S^2 . Với độ tin cậy γ hãy tìm khoảng ước lượng của phương sai tổng thể σ^2

Bài giải

Chọn $G = \chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \alpha_{1,2} \geq 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

$$\Rightarrow P\left(\chi_{1-\alpha_1}^2(n-1) < \chi^2 < \chi_{\alpha_2}^2(n-1)\right) = 1 - \alpha$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha_2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha_1}^2(n-1)}$$

Quy ước: Ta lấy $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ (nếu không cho α_1, α_2)

Ví dụ 3.1: Để định mức gia công 1 chi tiết máy, người ta theo dõi quá trình gia công 25 chi tiết máy, và thu được bảng số liệu sau:

Thời gian gia công (phút)	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25	25-27
Số chi tiết máy	1	3	4	12	3	2

- a) Với độ tin cậy 0,95 , hãy tìm khoảng tin cậy cho thời gian gia công trung bình 1 chi tiết máy.
- b) Với độ tin cậy 0,95 , hãy tìm khoảng tin cậy cho phương sai.

Giải

a) TH3 $n = 25$; $\bar{x} = 21,52$; $S = 2,4$

$$\gamma = 0,95 \Rightarrow T_{0,05}^{(24)} = t_{24:0,025} = 2,064$$

$$\varepsilon = \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot T_{\alpha}^{(n-1)} = \frac{2,4}{5} \cdot 2,064$$

$$\Rightarrow \bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon$$

b)

$$\chi_{0,975}^2(24) = 12,40 ; \chi_{0,025}^2(24) = 39,36$$

$$\Rightarrow \frac{24 \cdot 2,4^2}{39,36} < \sigma^2 < \frac{24 \cdot 2,4^2}{12,40}$$