

GIỚI HẠN DẪY SỐ

<http://e-learning.hcmut.edu.vn/>

DÃY SỐ THỰC

Dãy số là tập hợp các số được đánh chỉ số từ nhỏ đến lớn trong tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$.

VD: 1/ $x_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$

2/ $x_n = 1/n, n = 1, 2, \dots$

3/ $\{x_n\}$ là cấp số cộng: $a, a+d, a+2d, \dots$

Vấn đề đặt ra : tìm số hạng cuối cùng của dãy số?

Các cách cho dãy số

1/ Dạng liệt kê:

VD: dãy 1, 2, 3,...; dãy 1, 1/2, 1/3,...

2/ Dạng tường minh:

$\{x_n\}$ cho dạng biểu thức giải tích của biến n .

VD: $x_n = n^2, x_n = 1/n$

3/ Dạng quy nạp:

Số hạng đi sau tính theo các số hạng đi trước

VD: dãy $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$

dãy $x_1 = 1, x_2 = 1, x_{n+1} = \frac{x_{n-1} - x_n}{2}$

Dãy đơn điệu

$\{x_n\}$ là dãy **tăng** $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$, với mọi n đủ lớn

$\{x_n\}$ là dãy **giảm** $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$, với mọi n đủ lớn

Bỏ dấu “ $=$ ” trong định nghĩa ta gọi là **tăng (giảm) ngặt**.

Dãy tăng và dãy giảm gọi chung là dãy đơn điệu.

Phương pháp khảo sát dãy đơn điệu:

1. Xét hiệu số: $x_{n+1} - x_n$ (so với “0”)
2. Xét thương số: x_{n+1}/x_n (so với “1”)
(dùng cho dãy số dương)
3. Xét đạo hàm của hàm số $f(x)$, với $f(n) = x_n$

Ví dụ

$$a / x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} : \quad x_{n+1} - x_n = 1/(n+1) > 0 \Rightarrow \text{tăng}$$

$$b / x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) : \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - 1/(n+1) < 1 \Rightarrow \text{giảm}$$

$$c / x_n = \frac{2n - 3}{3n - 4} : \quad \text{Biểu thức giống hàm số, xét đạo hàm}$$

$$f(x) = \frac{2x - 3}{3x - 4}, \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(3x - 4)^2} > 0$$

$\Rightarrow f(x)$ tăng $\Rightarrow \{x_n\}$ tăng.

Dãy bị chặn

$\{x_n\}$ là dãy bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M : x_n \leq M, \forall n \geq N_0$

$\{x_n\}$ là dãy bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m : x_n \geq m, \forall n \geq N_0$

$\{x_n\}$ bị chặn $\Leftrightarrow \{x_n\}$ bị chặn trên và bị chặn dưới

VD: Xét tính bị chặn

của các dãy
a/ $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$

b/ $\{ 3^n \}$

c/ $\{ (-1)^n n \}$

DÃY CON

Cho $\{x_n\}$, chọn ra các số hạng từ dãy này 1 cách tùy ý theo **thứ tự chỉ số tăng dần** ta được 1 dãy con của $\{x_n\}$.

$$\text{VD: } \{X_n\} = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, \dots, X_n, \dots\}$$

$$\{X_{2n-1}\} = \{X_1, X_3, X_5, \dots\}$$

$$\{X_{2n}\} = \{X_2, X_4, X_6, \dots\}$$

$$\{X_{n+1}\} = \{X_2, X_3, X_4, \dots\}$$

• Các chỉ số của dãy con cũng kéo dài ra ∞

GIỚI HẠN DÃY SỐ

Định nghĩa đơn giản: $\{x_n\}$ có giới hạn là a khi n ra

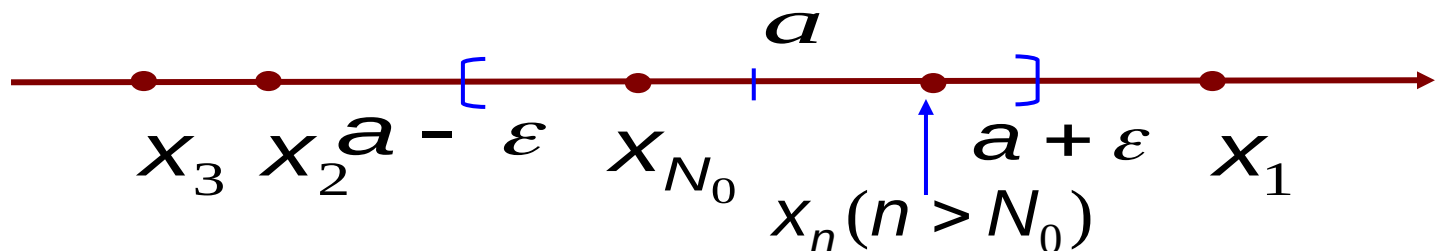
∞ tức là $x_n \approx a$ khi n đủ lớn

Định nghĩa chặt chẽ:

Đã $\{x_n\}$ **hoài** **tu** $\exists a$ hữu hạn: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N_0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 : a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq N_0$$



Ví dụ

Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$|x_n - a| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

$$|x_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Chọn $N_0 \geq 1/\varepsilon$, với $\varepsilon > 0$ (đủ bé)

$$n \geq N_0 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$$

* Với $\varepsilon = 10^{-3}$, tìm N_0 ?

Tính chất , phép toán trên dãy hội tụ

- Dãy hội tụ thì bị chặn.
- $a_n \geq 0$ và $a_n \rightarrow a$ thì $a \geq 0$
- $a_n \rightarrow a$ và $a < c$ thì $a_n < c$ với $n \geq N_0$

$\lim$ tổng (hiệu, tích, thương, căn,...)
= tổng (hiệu, tích, thương, căn...) $\lim$

SỞ HOÀI TỬ VÀO DÃY CON

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \text{Mỗi dãy con của } \{x_n\}$$

hầu $\rightarrow a$

$$\text{Dãy } \{x_n\} \text{ phân kỳ} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists 1 \text{ dãy con phân kỳ} \\ \exists 2 \text{ dãy con có } \lim \neq \text{nghĩa} \end{cases}$$

$$\text{VD: dãy } \{x_n\} = \{(-1)^n\}$$

$$\text{phân kỳ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{2n} = 1 \rightarrow 1 \\ x_{2n-1} = -1 \rightarrow -1 \end{cases}$$

Hệ quả:

$$\begin{cases} x_{2n} \rightarrow a \\ x_{2n-1} \rightarrow a \end{cases} \Leftrightarrow x_n \rightarrow a$$

GIÒÙI HAÏN KEÏP

$$\begin{cases} x_n \leq y_n \leq z_n & \forall n \geq N_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ & } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

$$\begin{array}{ccc} x_n & \leq & y_n \leq z_n \\ & \searrow & \downarrow \quad \swarrow \\ & & a \end{array}$$

Heä $0 \leq |x_n| \leq y_n \quad \forall n \geq N_0 \text{ & } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

quaû:

Dãy phân kỳ ra vô cùng

Dãy không hội tụ gọi là dãy phân kỳ

Không có giới hạn

Phân kỳ ra vô cùng

Giới hạn = $\pm \infty$: không thể xét $|x_n - a|$!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : x_n > M, \forall n \geq N_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : x_n < -M, \forall n \geq N_0$$

Ví dụ

Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$

Với $M > 0$ (lớn) tùy ý,

$$2^n > M \Leftrightarrow n > \log_2 M$$

Chọn $N_0 > \log_2 M + 1$, ta có :

$$n \geq N_0 \Rightarrow n > \log_2 M \Rightarrow 2^n > M$$

- Thöïc teá tìm giöúi haïn: Ít duøng caùch chöùng minh bằng ñònh nghóa!

Các phép toán trên dãy phân kỳ ra ∞

$$1/ \text{ Nếu } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ thì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

$$2/ \text{ Nếu } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ a_n > 0 (< 0), \forall n \geq N_0 \end{cases} \text{ thì } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ } (-\infty)$$

$$3/ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty, \text{ nếu } c \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$$

GIỚI HẠN CÔ BAÙN

**1/. Luỹ
thõa:**

$$\begin{cases} \alpha > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty \\ \alpha < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = 0 \end{cases}$$

$$5 / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^p n}{n^\alpha} = 0, \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \forall a > 1$$

**2/. Høm
muõ:**

$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \\ -1 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \end{cases}$$

$$3 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1, \forall \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a$$

$$4 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$$

$$\ln^p n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!$$

7 DẠNG VÔ ĐỊNH

- Đối với 4 phép toán cộng, trừ, nhân, chia:

$$\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

- Đối với dạng mũ $(a_n)^{b_n}$

$$1^\infty, 0^0, \infty^0$$

Ví dụ

$$a / \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$

$$b / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} = 0$$

$$c / \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$$

$$d / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$$

$$e / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-2}} = 1$$

$$f / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$$

Ví dụ tổng hợp

$$1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{n \cdot n \dots n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$2 / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$$

$$0 \leq \left| \frac{n \sin n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \rightarrow 0$$

$$3 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1000}{n} \right)^n$$

Vôùi n ≥ 2000:

$$0 < \left(\frac{1000}{n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0$$

$$4 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \stackrel{|q| < 1}{=} \frac{1}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_0 + u_0 q + \dots + u_0 q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_0 (1 - q^{n+1})}{1 - q} \stackrel{|q| < 1}{=} \frac{u_0}{1 - q}$$

$$\text{Tính } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{9}{32} + \dots \right),$$

$$q = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}, \quad u_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow S = \frac{8}{21}$$

$$5 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + n^{-2}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$6 / \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n} \right)$$

$$7 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - 2n \right)$$

$$8 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} \quad (\infty^0)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 3 \leq x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n} & \leq \sqrt[n]{2 \times 3^n} & = 3 \times \sqrt[n]{2} & \\
 n \rightarrow \infty & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 3 & & 3 \times 1 &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$$

$$8 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 2^n}$$

TIEÂU CHUẨN WEIRSTRASS

Đa thức taêng & chaén trên
Đa thức giaûm & chaén döôùi

thì hoải tại
VD: Chứng minh toàn tại giới

hải

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} :$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow \{x_n\} \text{ tăng}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow x_n < 2$$

TIEAU CHUAAN WEIRSTRASS

VD: Chöùng minh toàn taii vào tìm

giöu haindeöy $x_0 = 3, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$

- Dùng quy nạp chứng minh $x_n > 2$ (bị chặn dưới)

$$\text{Gs } x_k > 2, \quad x_{k+1} = \frac{x_n}{2} + 1 > \frac{2}{2} + 1 = 2$$

- Đơn điệu: $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + 1 - x_n = \frac{1 - x_n}{2} < 0$

$\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới nên hội tụ

Gọi: $\lim x_n = L$

Khi đó $\lim x_{n+1} = L$

Ta lại có $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1$

Qua giới hạn khi $n \rightarrow \infty$, ta được

$$L = \frac{L}{2} + 1 \Leftrightarrow L = 2$$

VD: Chứng minh tồn tại và tìm

giới hạn dãy $x_0 = a \in (1, 2), x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$

SOÁ e

Chöùng minh toàn tàii giôùi $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

hain sau :

Đặt: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- Tính đơn điệu:

sử dụng bất Cauchy cho 1 và n số $(1+1/n)$

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq 1 + \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Vậy $\{x_n\}$ tăng.

- Bị chặn: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{n^k}$

$$= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$< 2 + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!}$$

$$< 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$$

$$\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} < 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 3$$

PHẠU ĐĂNG VOÀ ÑÒNH 1[∞]

$$\forall a : \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a.$$

$$\text{VD : } 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$$

$$2 / \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^{2n-3}$$

Đặng 1[∞].

$$\text{Biến đổi } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{n+4} \right)^{n+4} \right]^{\frac{2n-3}{n+4}} = \left[e^{-2} \right]^2 = \frac{1}{e^4}$$