

GIỚI HẠN HÀM SỐ

<http://e-learning.hcmut.edu.vn/>

Khái niệm giới hạn hàm số

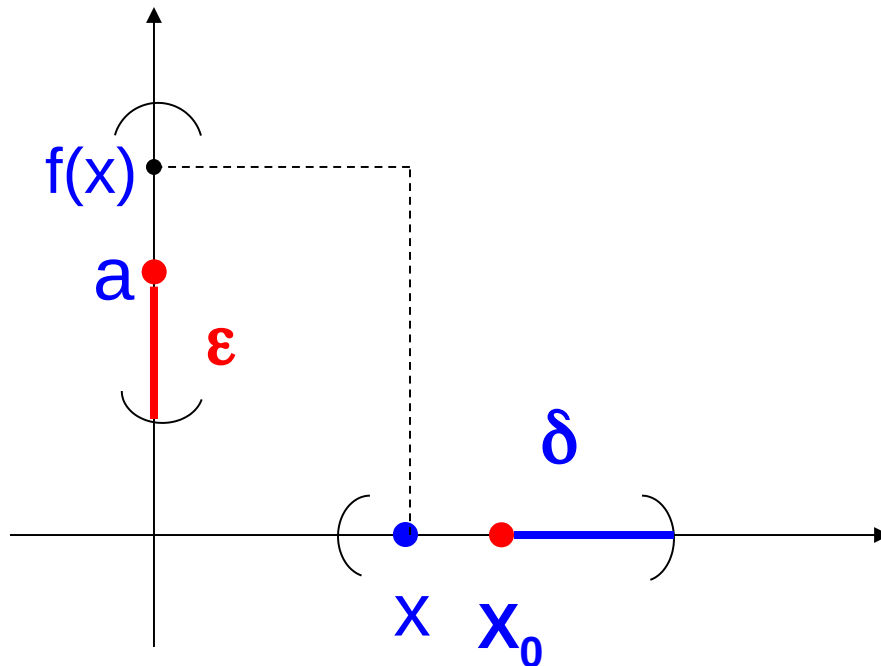
Hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận x_0 (có thể không xác định tại x_0). Nếu giá trị của $f(x)$ rất gần với a khi x đủ gần x_0 thì a gọi là giới hạn của f tại x_0 .

- Lưu ý : trong khi lấy giới hạn, giá trị của hàm số được đánh giá trong lân cận x_0

ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN HÀM SỐ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad (\text{hữu hạn})$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$
$$(x \in D \text{ \& } x \neq x_0)$$



Hạn chế của đn:

Phải chia nhiều trường hợp
tùy thuộc vào giá trị của x_0

và a là vô hạn hay hữu hạn

ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN HÀM SỐ QUA DÃY

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset D \text{ \& } x_n \neq x_0,$$

$$\text{nếu } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ thì } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Tiện ích của đn:

1. Áp dụng chung cho cả trường hợp a hay x_0 là ∞ .
2. Các tính chất và phép toán của giới hạn dãy vẫn còn đúng cho giới hạn hàm số.
3. Dễ dàng trong việc chứng minh hàm số không có giới hạn.

VÍ DỤ ÁP DỤNG

Chứng minh: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Giả sử: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ (*),

Lấy dãy $\{x_n\}$ tùy ý (nằm trong D_f và D_g) sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Từ (*), theo đn: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ & $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) + g(x_n)] = a + b$$

Vậy: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Phương pháp chứng minh hàm không có giới hạn

Chọn 2 dãy $\{x_n\}$ và $\{x'_n\}$ sao cho:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \end{cases}$$

Ví dụ: 1. Chứng minh $f(x) = \frac{1}{x}$ không có gh khi $x \rightarrow 0$

$$\text{Chọn } x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad f(x_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$$x'_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad f(x'_n) = -n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \Rightarrow \text{không có gh khi } x \rightarrow 0$$

2. Chứng minh: $f(x) = \sin x$ Không có gh khi $x \rightarrow +\infty$

$(x_0 = +\infty)$

Chọn $\left\{ \begin{array}{l} x_n = n\pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \\ x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \end{array} \right.$

$$f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

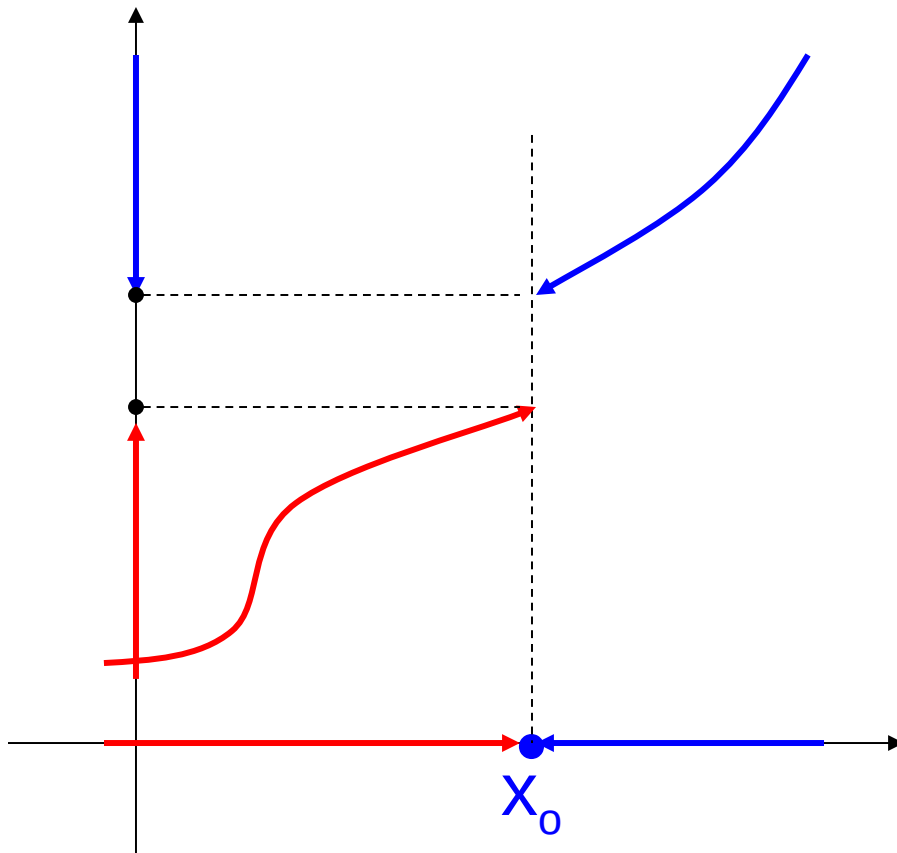
$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \Rightarrow f$ không có gh khi $x \rightarrow +\infty$

GIỚI HẠN MỘT PHÍA

- Giới hạn trái tại x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset D \text{ \& } x_n < x_0,$$

$$\text{nếu } \lim x_n = x_0 \text{ thì } \lim f(x_n) = a$$



- Giới hạn phải tại x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

(Xét $x_n > x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$)

GIỚI HẠN MỘT PHÍA

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \end{array} \right. \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

VD:

$$1/f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ 2x - 1, & x < 1, \end{cases}$$

Xét gh của $f(x)$ tại $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$2 / f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{Xét gh của } f(x) \text{ tại } x_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$\Rightarrow f(x)$ không có gh khi $x \rightarrow 0$.

$$3 / \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$$

Giới hạn cho hàm mũ cần nhớ

Xét hàm số có dạng: $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a > 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a^b$$

GIỚI HẠN CƠ BẢN log, mũ, lũy thừa

$$1 / \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$2 / \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$$

$$3 / \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Bảng tóm tắt gh cơ bản cho dạng vô định

$$1 / \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (1^\infty)$$

$$2 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$4 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$5 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$6 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$7 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$

$$8 / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \forall a > 1$$

∞/∞

LƯU Ý KHI TÍNH GIỚI HẠN

1. Nhớ kiểm tra dạng vô định trước khi lấy giới hạn.
2. Tùy theo dạng vô định, chọn gh cơ bản thích hợp.
3. Nếu dạng VĐ là $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, chuyển về $0/0$ hoặc ∞/∞
4. Nếu là dạng VĐ mũ, biến đổi theo các cách sau:
 - a. lấy lim của $\ln f(x)$
 - b. $[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$
 - c. Dạng 1^∞ , dùng gh $(1+x)^{1/x} \rightarrow e$

VÍ DỤ

$$1 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 2x}$$

Dạng 0/0

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos 5x}{(5x)^2}}{\frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2}} \times \frac{(5x)^2}{(2x)^2} = \frac{1/2}{1/2} \times \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$$

$$2 / \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = A$$

Dạng 0/0. Đặt:

$$u = x - x_0 = x - \frac{\pi}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} + u \right)}{-2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}$$

$$3 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \quad \text{Dạng } 0/0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1$$

$$4 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 3^x}{x} \quad \text{Dạng } 0/0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - (3^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{3^x - 1}{x} \right] = 2 - \ln 3$$

Có thể biến đổi như sau:

$$\frac{e^{2x} - 3^x}{x} = 3^x \frac{(e^2/3)^x - 1}{x} \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \times \ln \left(\frac{e^2}{3} \right)$$

$$5 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad \text{Dạng } 0/0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 \times \frac{1}{2}$$

$$6 / \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{4x+3} \quad (\text{Dạng } 1^\infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{4}{2x-1}}_{\downarrow 0} \right)^{4x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{4}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{4}} \right]^{\frac{4}{2x-1}(4x+3)}$$

$$= e^{16/2} = e^8$$

$$7 / \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = A \quad \text{Dạng } 0/0$$

Đặt: $u = x - x_0 = x - 1$

$$A = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(u+1)^2} - 1}{\sqrt[3]{u+1} - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u+1)^{2/5} - 1}{(u+1)^{1/3} - 1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u+1)^{2/5} - 1}{u} \times \frac{u}{(u+1)^{1/3} - 1}$$

$$8 / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{\sin^2 x} \quad \text{Dạng } 0/0 \quad (\text{Biểu thức trong ln tiến về 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{2x^2} \times \frac{x^2}{\sin^2 x} \times 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{2x^2} \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times 2$$

$$9 / \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln x \quad \text{Dạng } 0 \times \infty \quad (\text{Biểu thức trong ln tiến về 0})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x \times \ln x^{-1} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = - \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln u}{u} \right) = 0$$

Dạng $0 \times \infty$

$$10 / \lim_{x \rightarrow 0} x^{100} e^{\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u^{50}} = +\infty$$

11/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

Không có dạng vô định.

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \text{với mọi } x > 0$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$
$$x \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$