GiỚI HẠN HÀM SỐ
(phần 2)

Vô cùng bé – vô cùng lớn

ĐỊNH NGHĨA

- α(x) là vô cùng bé khi x $\to$ x_o nếu giá trị của α(x) rất bé khi x gần x_o.

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

- α(x) là vô cùng lớn khi x $\to$ x_o nếu giá trị của |α(x)| rất lớn khi x gần x_o.

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \left|\alpha(x)\right| = +\infty$$

Ví dụ

$1/\ \alpha > 0,\ \lim_{x \to 0} x^{\alpha} = 0$ — x^{α}, $\alpha > 0$ là VCB khi $x \to 0$

$2/\ \alpha > 0,\ \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$ — x^{α}, $\alpha > 0$ là VCL khi $x \to +\infty$

$3/\ \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$4/\ \lim_{x \to 0^{+}} \ln x = -\infty$

$5/\ \lim_{x \to 1} \ln x = 0$

lnx là VCB khi $x \to 1$

là VCL khi $x \to +\infty$, 0

TÍNH CHẤT CỦA VÔ CÙNG BÉ

1. Tổng, hiệu, tích các VCB là VCB.
2. c $\neq$ 0, α(x) là VCB $\Rightarrow$ c$\times\alpha$(x) là VCB.
3. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x),$$

   với α(x) là VCB khi x $\to$ x_o.

SO SÁNH BẬC CÁC VÔ CÙNG BÉ

$\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_o$, đặt

$$K = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

1. K=0, $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$,

   ký hiệu: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

2. $K \neq 0, \infty$: $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ đồng bậc.

   K= 1: $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ tương đương: $\alpha(x) \sim \beta(x)$

SO SÁNH BẬC CÁC VÔ CÙNG BÉ

$\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB khi $x \to x_o$, nếu tồn tại n>0

sao cho:

$$K = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^n} \neq 0, \neq \infty$$

(tức là $\alpha(x)$ đồng bậc với $[\beta(x)]^n$)

Thì $\alpha(x)$ được gọi là VCB bậc n đối với $\beta(x)$

VÍ DỤ

$$1/\ \begin{cases} \alpha(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^4} \\ \beta(x) = x \end{cases}$$ là 2 VCB khi x → 0

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{x} = \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^4}{x^3}} \xrightarrow{x \to 0} 1$$

$$\Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x)$$

$$2/\ \begin{cases} \alpha(x) = \ln(\cos x) \\ \beta(x) = x \end{cases}$$

là 2 VCB khi x → 0

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\ln(\cos x)}{x} = \frac{\ln(1+\cos x - 1)}{x}$$

$$= \frac{\ln(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x - 1}{x^2} \times x$$

$$\xrightarrow{x \to 0} 1 \times (-1/2) \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = o(\beta(x))$$

α(x) bậc cao hơn β(x)

$$3/\begin{cases}\alpha(x)=\ln(\cos x)\\ \beta(x)=x\end{cases}$$ là 2 VCB khi x $\to$ 0

$$\frac{\alpha(x)}{\left[\beta(x)\right]^2}=\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$=\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\times\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x\to 0}1\times(-1/2)=-1/2$$

α(x) là VCB bậc 2 đối với β(x).

Các vcb tương đương cơ bản

Khi x $\to 0$

$\sin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$e^x - 1 \sim x$
$\tan x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$\arcsin x \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
$\arctan x \sim x$	

Ví dụ

$$\sin 2x \sim 2x, \quad \text{khi } x \to 0$$

$$1 - \cos x^2 \sim \frac{1}{2}x^4, \quad \text{khi } x \to 0$$

$$\tan(\ln(1+x)) \sim \ln(1+x) \sim x, \quad \text{khi } x \to 0$$

$$\ln x \sim x - 1, \quad \text{khi } x \to 1$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}, \quad \text{khi } x \to \pm\infty$$

Nguyên tắc thay tương đương VCB

1. Chỉ được thay tương đương qua tích các VCB

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x),\ \ \beta(x) \sim \beta_1(x)\ \text{ khi }\ x \to x_0$$

$$\Rightarrow\ \alpha(x) \times \beta(x) \sim \alpha_1(x) \times \beta_1(x)$$

VD: khi $x \to 0$

$$1/\ (e^x - 1) \times \sin x\ \sim x \times x = x^2,$$

$$2/\ \left(\sqrt[3]{1 - 2x^5} - 1\right)(e^x - 1) \times \tan \sqrt[3]{x}$$

$$\sim \frac{1}{3}(-2x^5) \times x \times \sqrt[3]{x} \quad = -\frac{2}{3} x^{\frac{16}{3}}$$

Nguyên tắc thay tương đương VCB

2. Nguyên tắc ngắt bỏ VCB bậc cao: tổng các VCB khác cấp tương đương với VCB bậc thấp nhất

$$\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\cdots+\alpha_n(x)\sim\alpha_i(x)$$

với α_i là VCB bậc thấp nhất

VD: khi x $\to$ 0

$$x^2-2x^3+3x \quad \sim 3x$$

$$\sin x^3-2x^2 \quad \sim -2x^2$$

Nguyên tắc thay tương đương VCB

3. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, khi $x \to x_o$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$

$$f(x) \times \alpha(x) \sim a \times \alpha(x) \sim a \times \alpha_1(x)$$

VD: khi $x \to 0$

$$1/\ (x+1) \times \ln(x+1) \sim 1 \times \ln(x+1) \sim x$$

$$2/\ e^{2x} - e^{x^2} = e^{x^2}\left(e^{2x-x^2} - 1\right)$$

$$\sim e^{0}\left(e^{2x-x^2} - 1\right) \sim 1 \times \left(2x - x^2\right) \sim 2x$$

4. Nguyên tắc thay tương đương trong tính giới hạn

$\alpha(x) \sim \alpha_1(x),\ \ \beta(x) \sim \beta_1(x)$ khi $x \to x_0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

VD: $1/\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - 3x^2}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$2/\ \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 1)\arctan x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x}{\ln(1+\cos x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\cos x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{-\dfrac{x^2}{2}} = 0$$

Nguyên tắc thay tương đương VCB

5. Phép thay qua hiệu **2** VCB

$$\begin{cases} \alpha(x) \sim \alpha_1(x), \;\; \beta(x) \sim \beta_1(x) \\ \alpha(x) \nsim \beta(x) \end{cases} \text{khi } x \to x_0$$

$$\Rightarrow \alpha(x) - \beta(x) \sim \alpha_1(x) - \beta_1(x)$$

(chỉ thay tương đương qua hiệu nếu 2 VCB ban đầu không tương đương)

Cách thực hiện

Thay α và β qua các tương đương trung gian (chẳng hạn x^p khi $x \to 0$), đến khi không còn thay được nữa, nếu hiệu triệt tiêu thì α và β là 2 VCB tương đương $\Rightarrow$ không thay qua hiệu trong trường hợp này

VÍ DỤ

1/ $\arctan x - \sin x^2$

$$x - x^2 \sim x$$

2/ $\tan x - \sin x$

$$x \cancel{-} x$$

3/ $(e^x - 1)(x+1) - \sin x$

$$x \cdot 1 \cancel{-} x$$

4/ $\underbrace{x - \ln(x^2+1)} - \sin x$

$$\underbrace{x - x^2} - x$$

$$x \cancel{-} x$$

Lưu ý

1. Không chuyển vế trong tương đương cơ bản.

2. Không thay tương đương qua hàm số ngoại trừ hàm lũy thừa dương(chỉ thay tương đương cho VCB, VCL.)

3. Tính triệt tiêu trong tương đương tổng hiệu chỉ xét cho từng cặp hàm

Ví dụ

Xét tính đúng, sai trong các tương đương sau

Khi x → 0

$e^x \cancel{\sim} 1 + x$ $\qquad$ $\sin^2 x \overset{\text{Đ}}{\sim} x^2$ $\qquad$ $\sin^{-2} x \cancel{\sim} x^{-2}$

$\ln(1+\sin x) \cancel{\sim} \ln(1+x) \sim x$ $\qquad$ $\ln(1+\sin x) \overset{\text{Đ}}{\sim} \sin x \sim x$

$e^{\sin x} - 1 \cancel{\sim} e^x - 1 \sim x$ $\qquad$ $e^{\sin x} - 1 \overset{\text{Đ}}{\sim} \sin x \sim x$

VÍ DỤ TỔNG HỢP

1. Tìm các hằng số a và p sao cho

$$\alpha x \sim a x^{p}, \quad \boldsymbol{khi}\ x \to 0$$

2. So sánh bậc các VCB

3. Tính giới hạn

Tìm các hằng số a và p sao cho $\alpha x \sim a x^p, \ \textbf{\textit{khi}}\ x \to 0$

$$1/\ \alpha(x) = \sin(x^2 - 2x) \sim x^2 - 2x \sim -2x$$

$\Rightarrow$ a = -2, p = 1

$$2/\ \alpha(x) = \sin(x^2 - \tan 2x)$$

$$\sim x^2 - \tan 2x$$

$$\sim x^2 - 2x$$ $\Rightarrow$ a = -2, p = 1

Tìm các hằng số a và p sao cho $\alpha x \sim a x^{p},\ \textbf{\textit{khi}}\ x \to 0$

$$3/\ \alpha(x) = \sin x - \tan 2x$$

$$\sim x - 2x = -x$$ $\Rightarrow$ a = -1, p = 1

$$4/\ \alpha(x) = \ln\left[1 + \sin^3(e^x - 1)\right]$$

$$\sim \sin^3(e^x - 1)$$

$$\sim (e^x - 1)^3 \sim x^3$$ $\Rightarrow$ a = -1, p = 3

Tìm các hằng số a và p sao cho $\alpha x \sim a x^p, \ \textbf{\textit{khi}}\ x \to 0$

$$5/\ \alpha(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$$

$$\sim \frac{x}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}, p = 1$$

So sánh bậc các VCB khi x → 0

$$1/\ \begin{cases} \alpha(x) = \sin(x^2 - 2x) \\ \beta(x) = \sqrt[3]{1 - 3x^2} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(x) \sim -2x & \text{Bậc 1 theo x} \\ \beta(x) \sim \dfrac{1}{3}(-3x^2) & \text{Bậc 2 theo x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta(x) = o(\alpha(x))$$ (β(x) bậc cao hơn α(x))

So sánh bậc các VCB khi x $\to$ 0

$$2/\begin{cases}\alpha(x)=\arctan x\\ \beta(x)=e^{x(x+1)}-1\end{cases}$$

$$\alpha(x)\sim x$$

$$\beta(x)\sim x(x+1)\quad\sim x$$

$\Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x)$

So sánh bậc các VCB khi $x \to +\infty$

$$3/\ \alpha(x) = \frac{1}{\ln x}, \beta(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln x} \times \frac{e^x}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} \times \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $\beta(x)$ bậc cao hơn $\alpha(x)$

Tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x\tan x}-e^{3x^2}\right)}{x^3+\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}\left(e^{x\tan x-3x^2}-1\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1\left(x\tan x-3x^2\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-3x^2\right)}{x^2}=-2$$

Tính chất vô cùng lớn

1. Tích các VCL là VCL.
2. c $\neq$ 0, $\alpha(x)$ là VCL $\Rightarrow c \times \alpha(x)$ là VCL.
3. f(x) bị chặn trong lân cận x_o,

   $\alpha(x)$ là VC khi $x \to x_o$

   $\Rightarrow \alpha(x) + f(x)$ là VCL khi $x \to x_o$.

SO SÁNH BẬC CÁC VÔ CÙNG LỚN

$\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCL khi $x \to x_o$, đặt

$$K = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right|$$

1. K= + ∞, $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.

2. K$\neq$ 0,∞ : $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ đồng bậc.

   K= 1: $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ tương đương: $\alpha(x) \sim \beta(x)$

Nguyên tắc thay thế VCL

1. Chỉ được thay tương đương qua tích các VCL

2. Nguyên tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp: tổng các VCL khác cấp tương đương với VCL bậc cao nhất

3. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, khi $x \to x_o$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$

$$f(x) \times \alpha(x) \sim a \times \alpha(x) \sim a \times \alpha_1(x)$$

4. Nguyên tắc thay tương đương trong tính giới hạn: giống VCB

5. $f(x)$ bị chặn trong lân cận x_o, $\alpha(x)$ là VCL

khi $x \to x_o \Rightarrow \alpha(x) + f(x) \sim \alpha(x)$ khi $x \to x_o$.

VÍ DỤ

1. Khi $x \to +\infty$, $m > n > 0$:

   x^m là VCL bậc cao hơn x^n.

2. Khi $x \to +\infty$, $p > 0$, $\alpha > 0$, $a > 1$:

$$\ln^p x \ll x^\alpha \ll a^x$$

3. Khi $x \to +\infty, \ln x + \sin x \sim \ln x$

$$1/\ \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{x/2}}{e^{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x/2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{2}}{e^{x/2}}2 = 0$$

$$2/\ \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{x/2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}e^{x/2} = 0$$