

HÀM SỐ LIÊN TỤC

[**http://e-learning.hcmut.edu.vn/**](http://e-learning.hcmut.edu.vn/)

Định nghĩa

1. Cho hàm $f(x)$ xác định tại x_0 , f liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(đồ thị của hàm số $y = f(x)$ không bị ngắt tại x_0 .)

Ngược lại, f được gọi là gián đoạn tại x_0 .

2. f liên tục phải tại x_0 nếu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

3. f liên tục trái tại x_0 nếu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow f$ liên tục phải và trái tại x_0 .

Ví dụ

$$1 / f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\Rightarrow f$ liên tục tại $x_0 = 0$.

$$2 / f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$$

$\Rightarrow f$ liên tục phải nhưng không liên tục trái tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 2x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1) \Rightarrow f \text{ không liên tục tại } x = 1$$

Nhận xét: nếu đặt lại $f(1) = 1$, khi đó f liên tục tại 1

Phân loại điểm gián đoạn

Loại 1: Tồn tại hữu hạn:

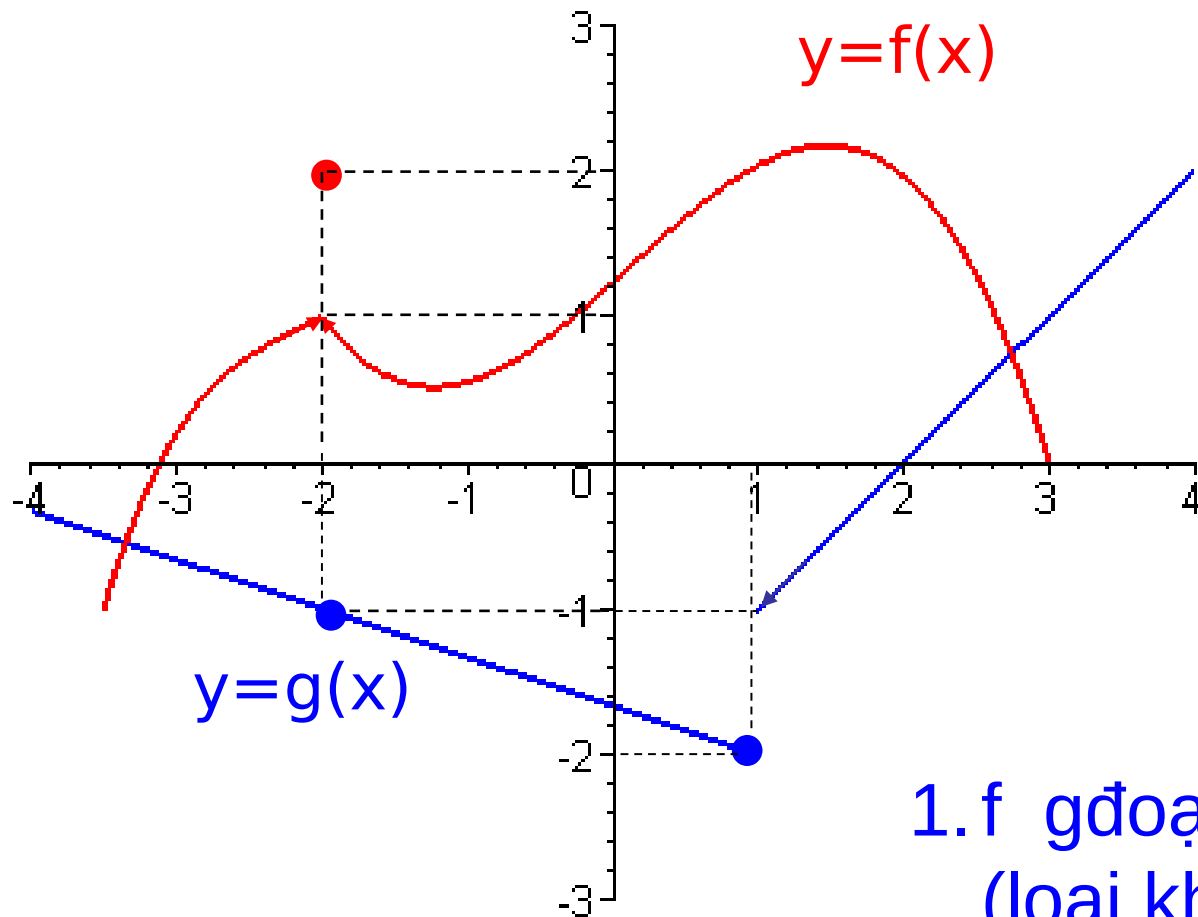
$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

* $f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0)$: Điểm gián đoạn khử được.

* $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$: Điểm gián đoạn không khử được.

$h = f(x_0^+) - f(x_0^-)$: Bước nhảy của f tại x_0 .

Loại 2: các trường hợp gián đoạn khác.



1. f gđoạn tại $x = -2$
(loại khử được)

2. g liên tục tại $x = -2$

3. g gđoạn tại $x = 1$
(loại không khử được)

Tính chất hàm liên tục

1. Tổng, hiệu, tích , thương (mẫu số khác 0 tại x_0)
các hàm liên tục là liên tục.
2. Nếu $f(u)$ liên tục tại u_0 , $u(x)$ liên tục tại x_0 và
 $u(x_0) = u_0$ thì $f(u(x))$ liên tục tại x_0
3. Các hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định.

Ví dụ

Phân loại điểm gián đoạn tại các điểm được chỉ ra,

$$1 / f(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}} - 1}{x-1} \quad x = 0, x = 1$$

$$2 / f(x) = \frac{x}{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \quad x = 0$$

Hàm số liên tục trên $[a, b]$

1. Hàm số f liên tục trên $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ liên tục tại mọi } x \text{ nằm trong } (a, b), \\ f \text{ liên tục phải tại } a, \text{ liên tục trái tại } b. \end{cases}$$

2. * f liên tục trên $[a, b]$ thì f bị chặn trên $[a, b]$

* f liên tục trên $[a, b]$ thì f đạt gtn và gtnn
trên $[a, b]$

3. f liên tục trên $[a, b]$, gọi m và M lần lượt là gtnn và gtln của f trên $[a, b]$, ta có

$$\forall k \in [m, M], \quad \exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = k$$

Hệ quả: nếu f liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong (a, b) .

VD: Xét phương trình $x.2^x - 1 = 0$ trong $(0, 1)$