BÀI 2: HÀM SỐ

NỘI DUNG

1- ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ

2- HÀM SỐ NGƯỢC

3- HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

4- HÀM HYPERBOLIC

XÁC ĐỊNH HÀM SỐ QUA BIỂU THỨC

Biểu thức:

Quen thuộc (dạng hiện): y = f(x)

VD: $y = x^2$, $y = e^x$

Dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

VD: x = 1 + t, y = 1 – t → Đường thẳng

VD: x = acost, y = asint → Đường tròn

Dạng ẩn F(x, y) = 0 ⇒ y = f(x) (implicit)

VD: Đtròn $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - 1 = 0$

CÁC HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

Hàm $y = x^{\alpha}$

❖ **MXĐ** : α tự nhiên $\Rightarrow$ D=R,

α nguyên âm $\Rightarrow$ D=R\{0},

$\alpha \in$ R(nói chung) $\Rightarrow$ D=(0, +∞)

(hàm căn: tuỳ tính chẵn lẻ)

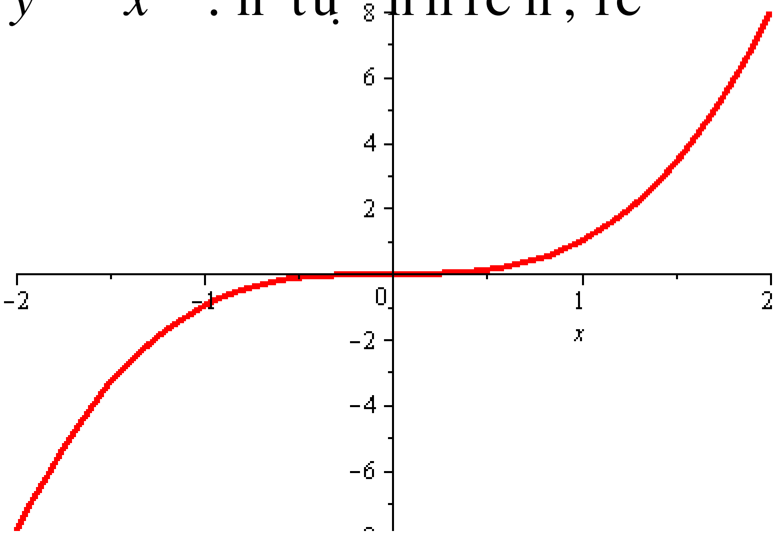
❖ **Tính đơn điệu** (chỉ xét x > 0):

$\alpha > 0 \rightarrow$ Tăng, $\alpha < 0 \rightarrow$ Giảm

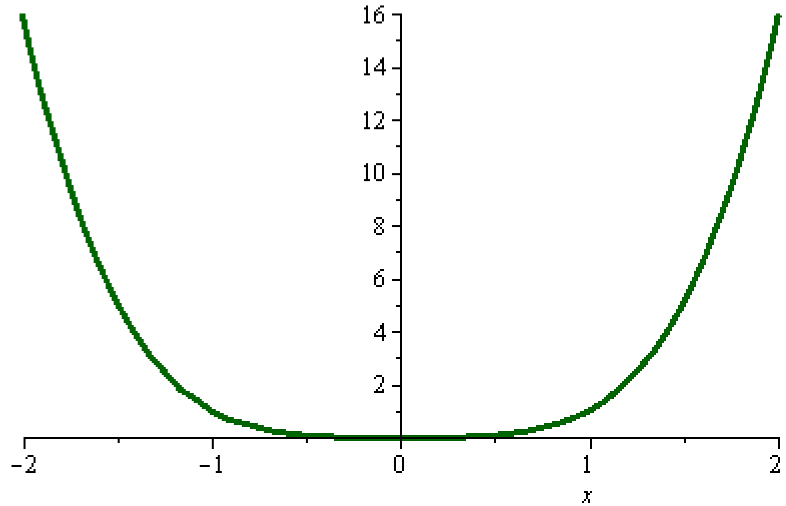
❖ **Giới hạn** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0 \, (\alpha < 0) \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty \, (\alpha > 0)$

ĐỒ THỊ HÀM LUỸ THỪA

$y = x^n$: n tự nhiên, lẻ

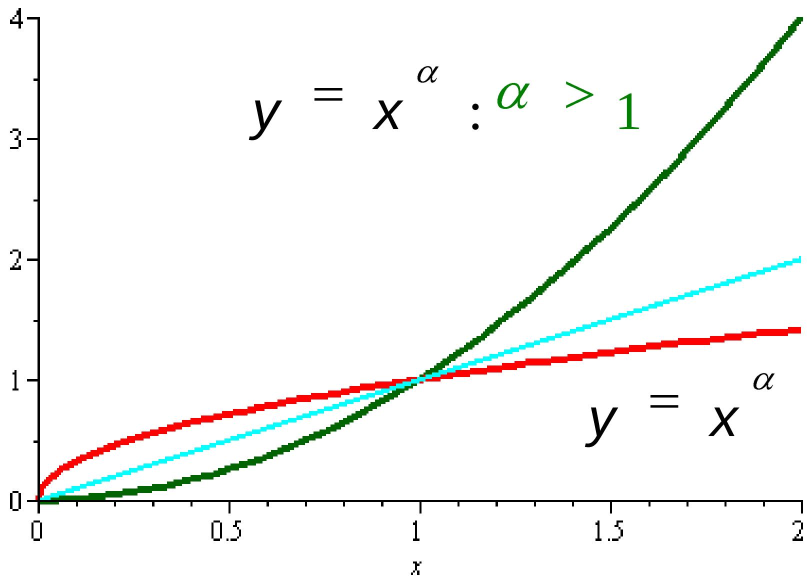


$y = x^n$: n tự nhiên, chẵn

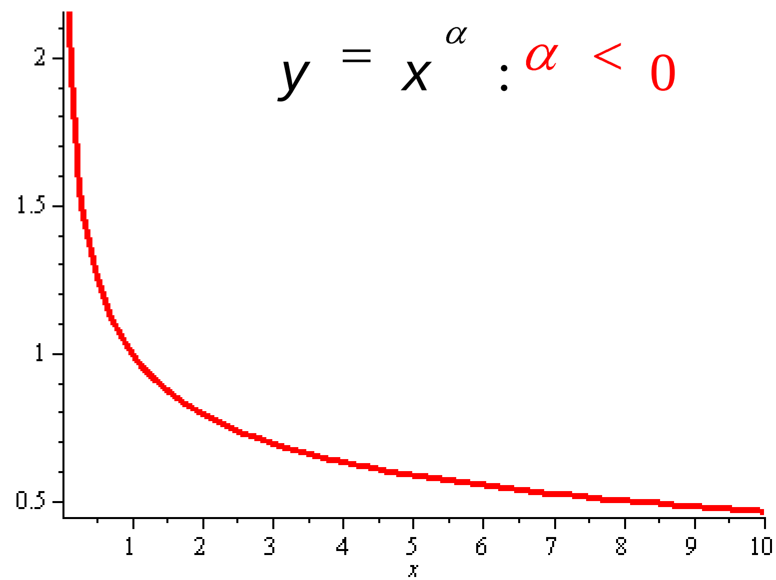


$y = x^\alpha$: $\alpha > 1$

$y = x^\alpha$: $0 < \alpha < 1$



$y = x^\alpha$: $\alpha < 0$



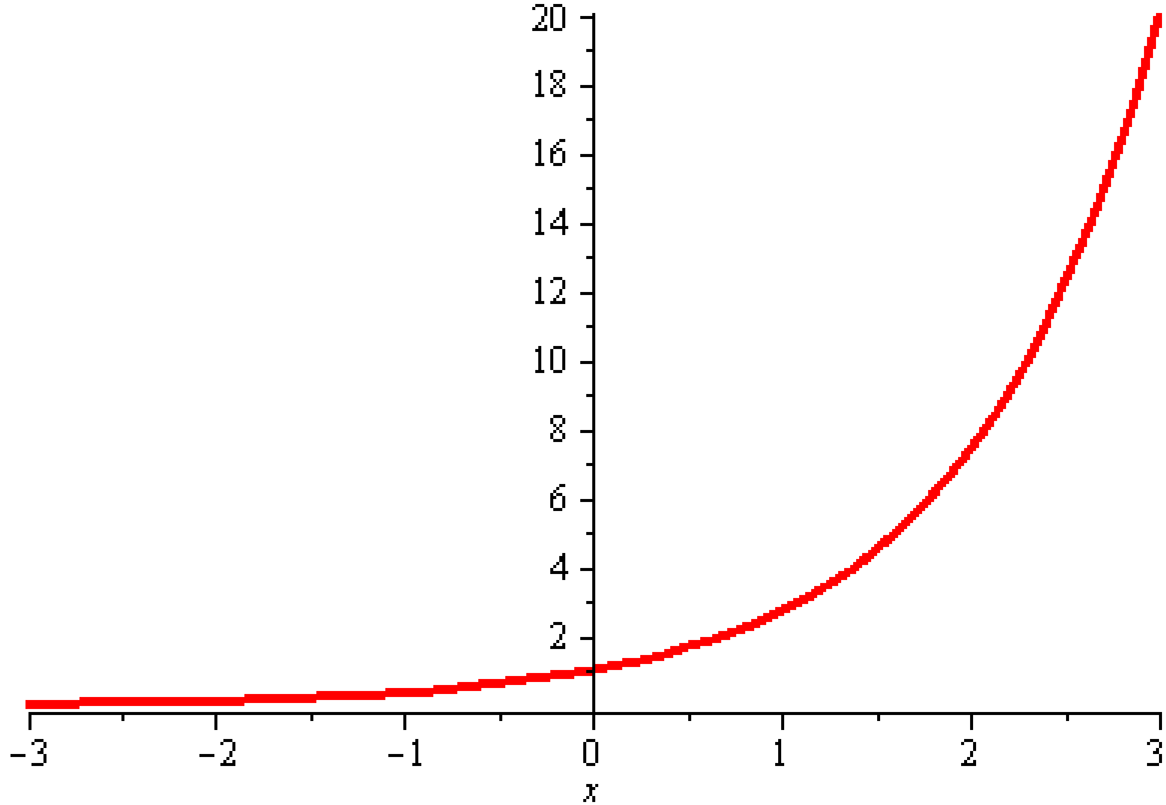
HÀM MŨ $\boxed{y = a^x \ (a > 0)}$

- **MXĐ: R; MGT: $(0, +\infty)$**
- **Đơn điệu : $a > 1 \Rightarrow$ Hàm tăng,**

  $0 < a < 1 \Rightarrow$ Hàm giảm
- **Giới hạn :** $\begin{cases} a > 1: \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \ \& \ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 ; \\ 0 < a < 1: \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 \ \& \ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \end{cases}$

ĐỒ THỊ HÀM MŨ

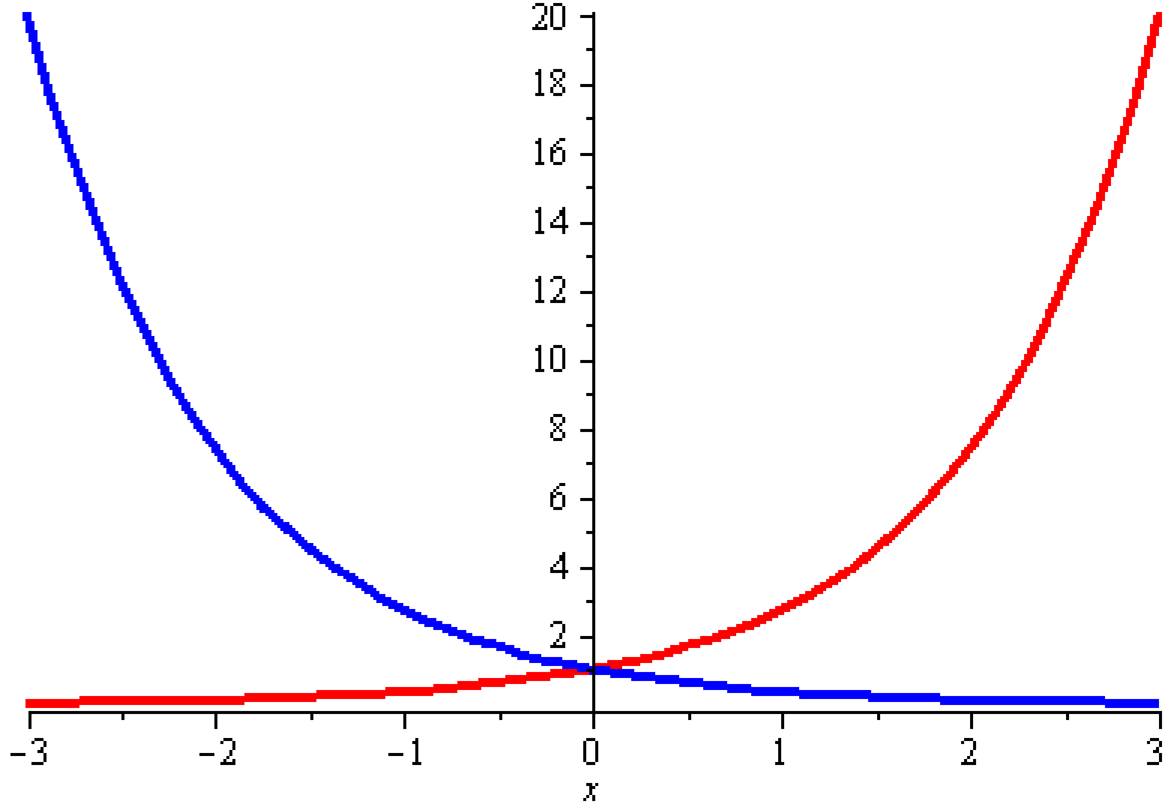
$$y = a^x, \quad a > 1$$



ĐỒ THỊ HÀM MŨ

$y = a^x, 0 < a < 1$

$y = a^x,\ a > 1$

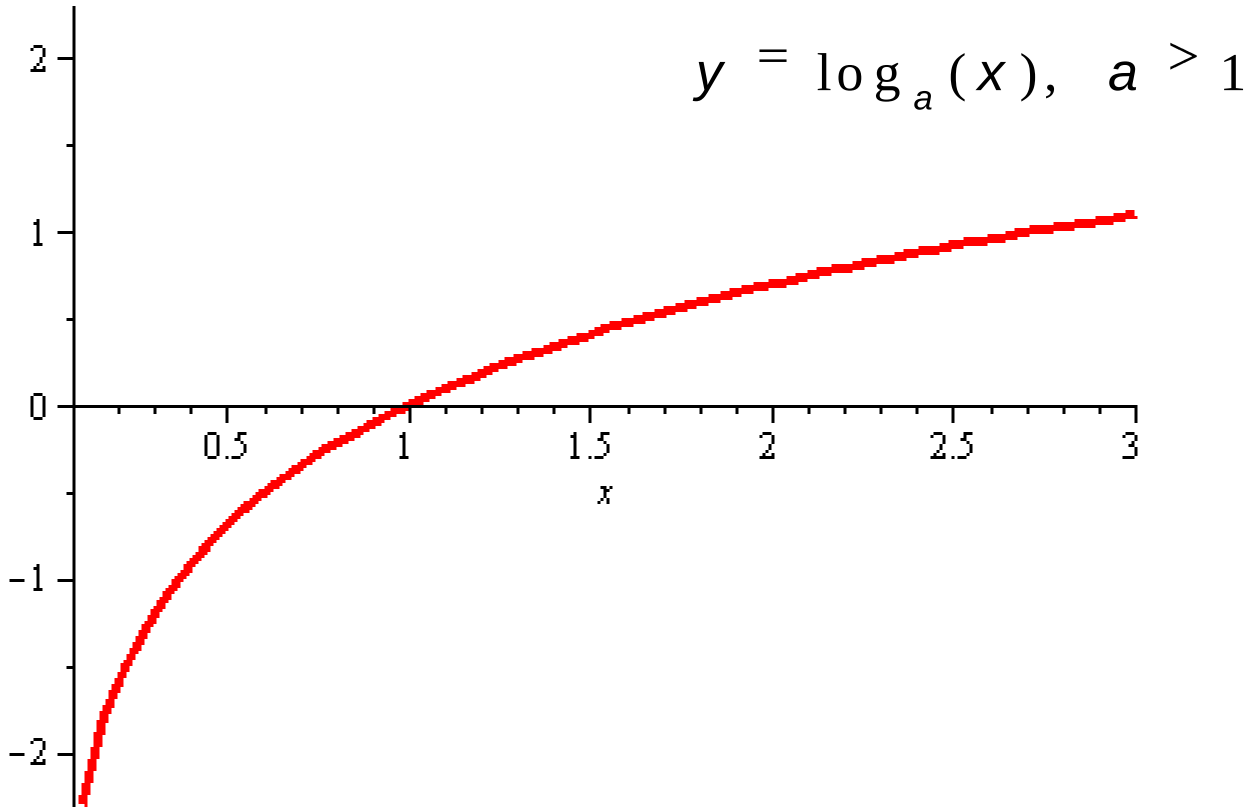


HÀM logarit $\boxed{y = \log_a x \ (a > 0)}$

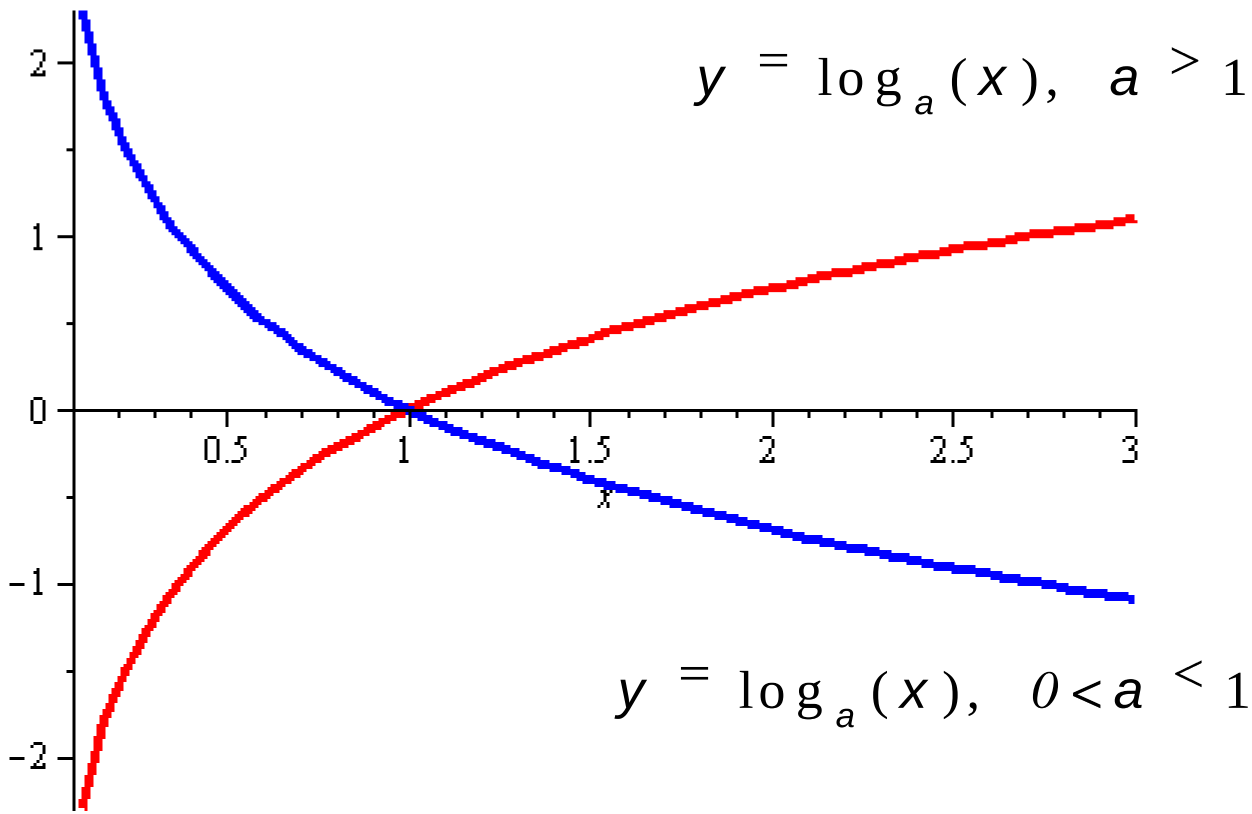
- **MXĐ: $x > 0$, MGT : R**
- **Đơn điệu: $a > 1 \Rightarrow$ TĂNG , $0 < a < 1 \Rightarrow$ GIẢM**
- **Ghạn**

$$\begin{cases} a > 1: \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \ \& \ \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \\ 0 < a < 1: \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \ \& \ \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \end{cases}$$

ĐỒ THỊ HÀM LOGARIT

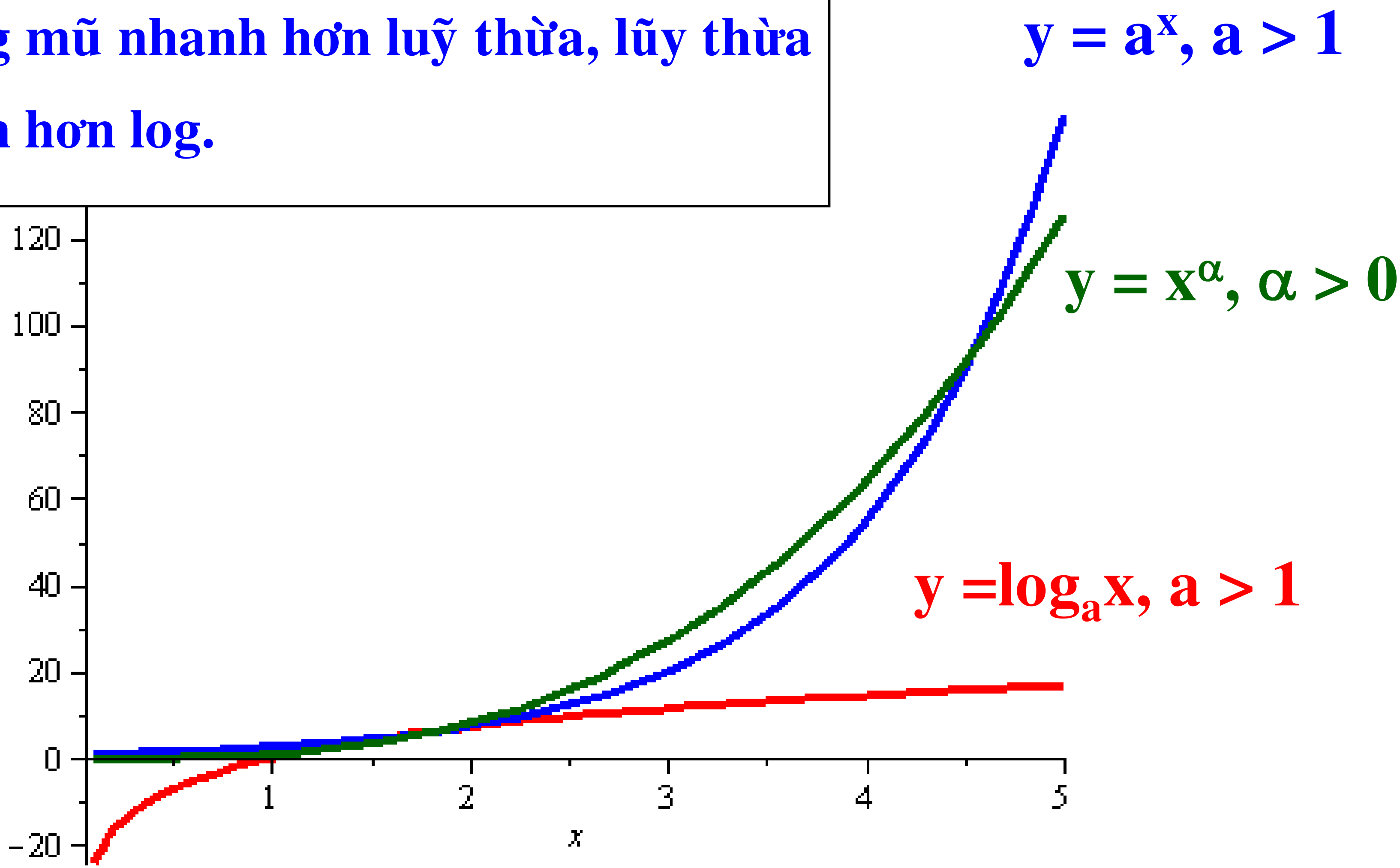


ĐỒ THỊ HÀM LOGARIT



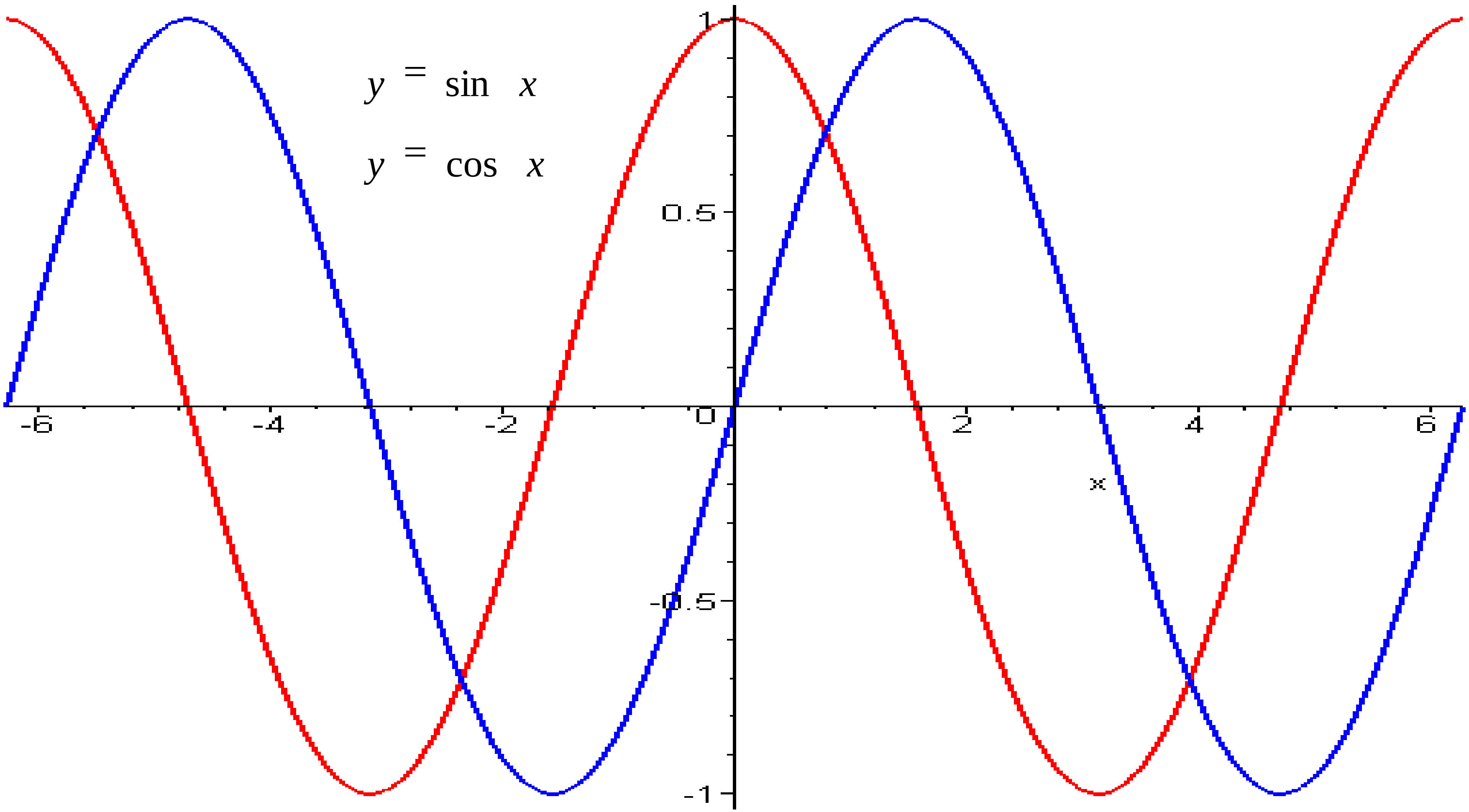
HÀM MŨ, LOGARIT: SO SÁNH VỚI LUỸ THỪA khi $x \to +\infty$

Khi $a > 1$ & $\alpha > 0$: Cùng ↑, → +∞, nhưng mũ nhanh hơn luỹ thừa, lũy thừa nhanh hơn log.



HÀM LƯỢNG GIÁC: sinx, cosx

y = sinx, y = cosx ⇒ MXĐ: R, MGT:[–1, 1], Tuần hoàn ...

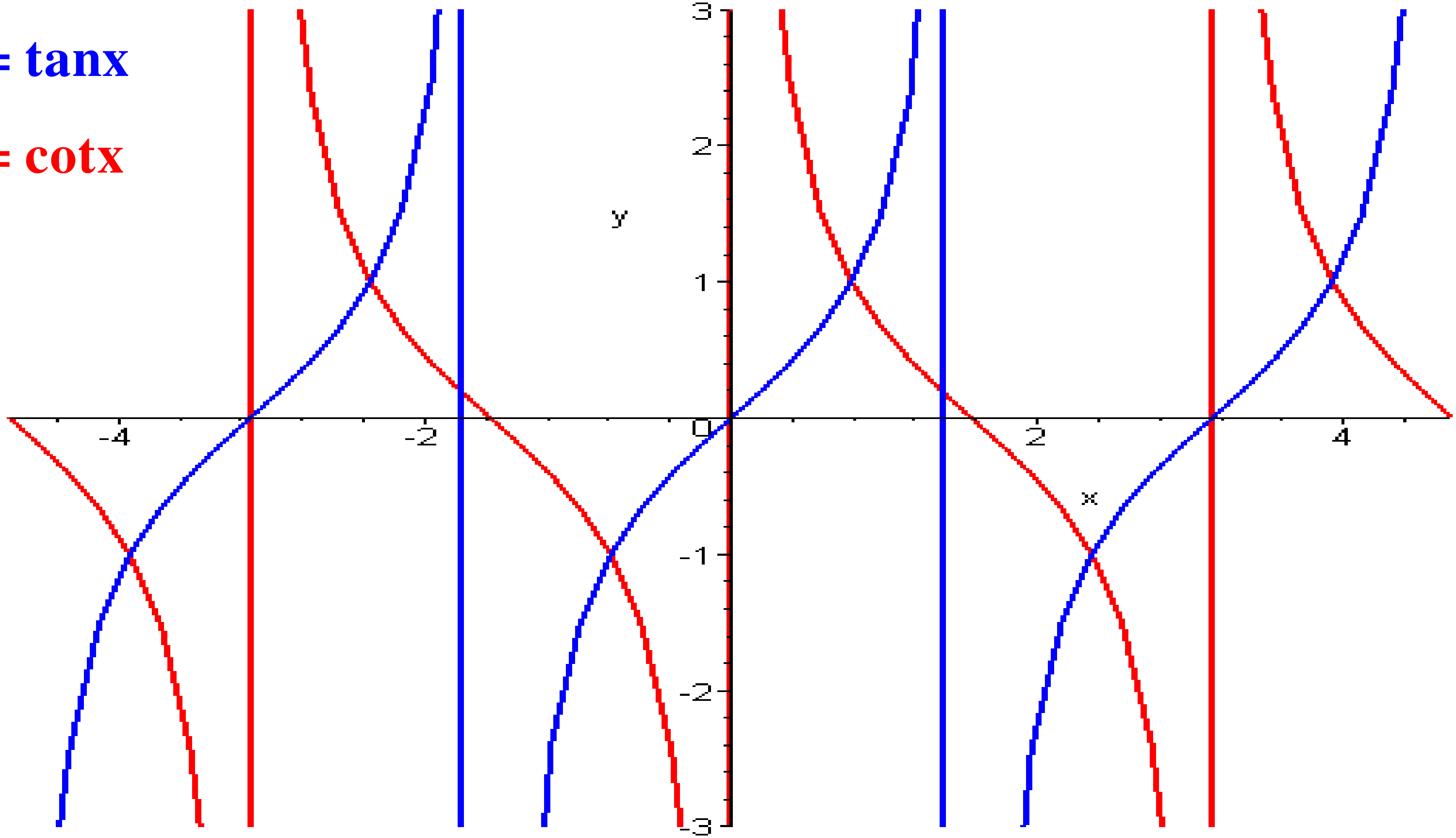


HÀM LƯỢNG GIÁC: tanx, cotx

y = tanx (x ≠ π/2 + k π), y = cotx (x ≠ kπ): MGT: R, TC đứng

y = tanx

y = cotx



HÀM NGƯỢC

Hàm số $y = f(x)$: $X \to Y$ thỏa: với mọi $y \in Y$, pt $f(x) = y$ có nghiệm x duy nhất gọi là 1 song ánh.

Ví dụ:

Hàm số $y = f(x) = 2x + 3$ là song ánh trên R vì $f : R \to R$ và pt $y = f(x) = 2x + 3$ có duy nhất nghiệm $x = (y - 3)/2$

Hàm số $y = x^2$ ($R \rightarrow R^+$) không là song ánh trên R

vì pt $y = x^2$ không có duy nhất nghiệm $x = \pm\sqrt{y}$

Hàm số $y = x^2$ là song ánh trên R^+($f: R^+ \rightarrow R^+$)

vì pt $y = x^2$ không có duy nhất nghiệm $x = \sqrt{y}$

HÀM NGƯỢC

Nếu $f: X \to Y$

$x \mapsto y = f(x)$

là song ánh

thì $\varphi: Y \to X$

$y \mapsto x = \varphi(y)$, với $y = f(x)$

gọi là hàm ngược của f

Ký hiệu hàm ngược : $\varphi = f^{-1}$

Cách tìm hàm ngược:

1. Từ pt $y = f(x)$, giải tìm nghiệm $x = f^{-1}(y)$
2. Đổi vai trò của x, y trong biểu thức nghiệm.

Ví dụ

1. Tìm hàm ngược của hàm số y = f(x) = 2x + 3 trên R

B1: giải pt y = f(x)

$$y = 2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y - 3}{2}$$

Biểu thức hàm ngược theo y : $x = f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$

B2: Đổi vai trò của x, y : $y = f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

2. Tìm hàm ngược của hàm số $y = f(x) = x^2$ trên R^+

$$\begin{cases} y = f(x) = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$$

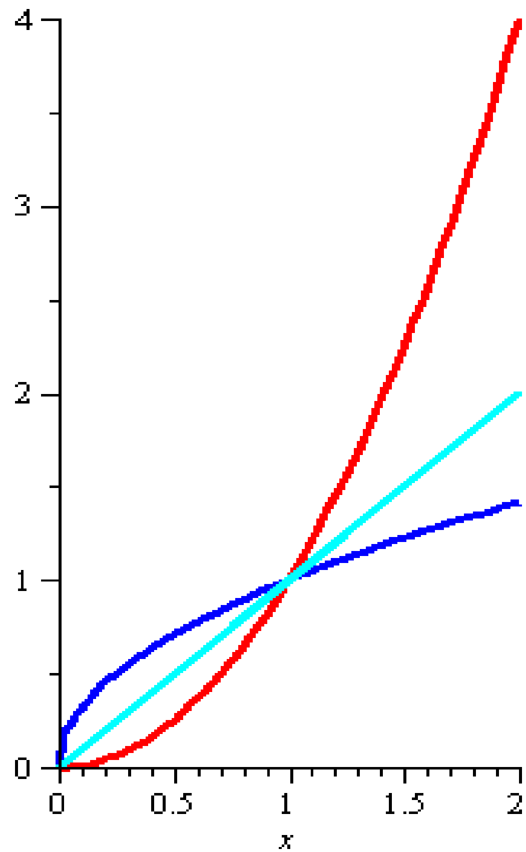
Vậy : $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

3. Tìm hàm ngược của hàm số $y = f(x) = e^x$

$f : R \to R^+$, với mỗi $y > 0$: $y = f(x) = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

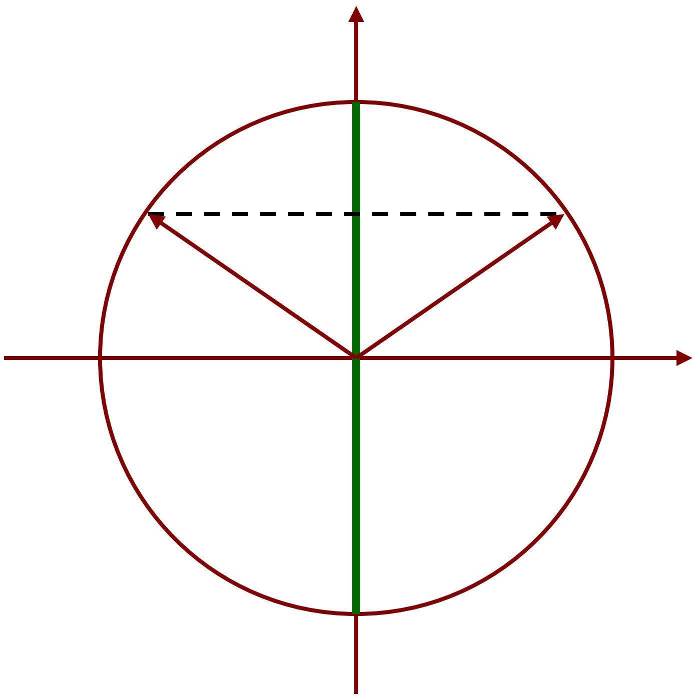
Vậy : $y = f^{-1}(x) = \ln x$

Đồ thị của hàm $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

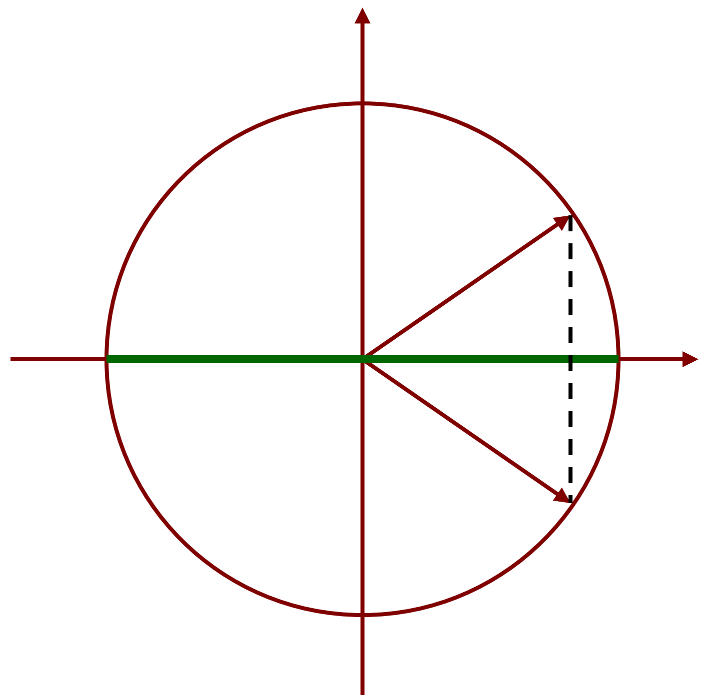


HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

Lưu ý: các hàm lượng giác trên toàn bộ miền xác định không phải là song ánh (pt y = f(x) có vô số nghiệm)

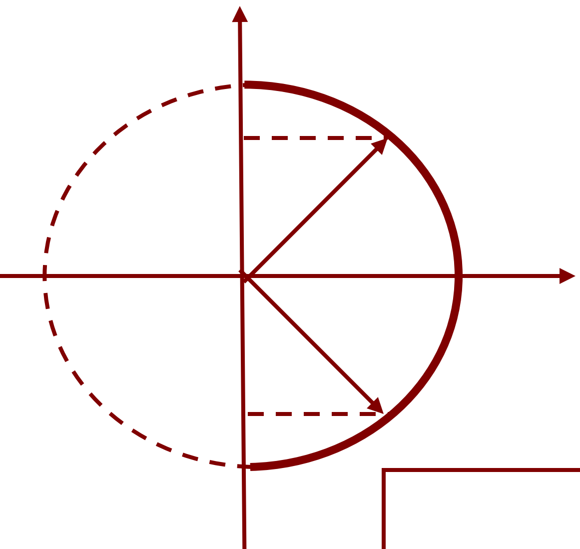


Các góc φ và π - φ có cùng giá trị sin



Các góc φ và - φ có cùng giá trị cos

HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC



$y = \sin x$ **là song ánh trên** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\text{s/a}} [-1,1]$$

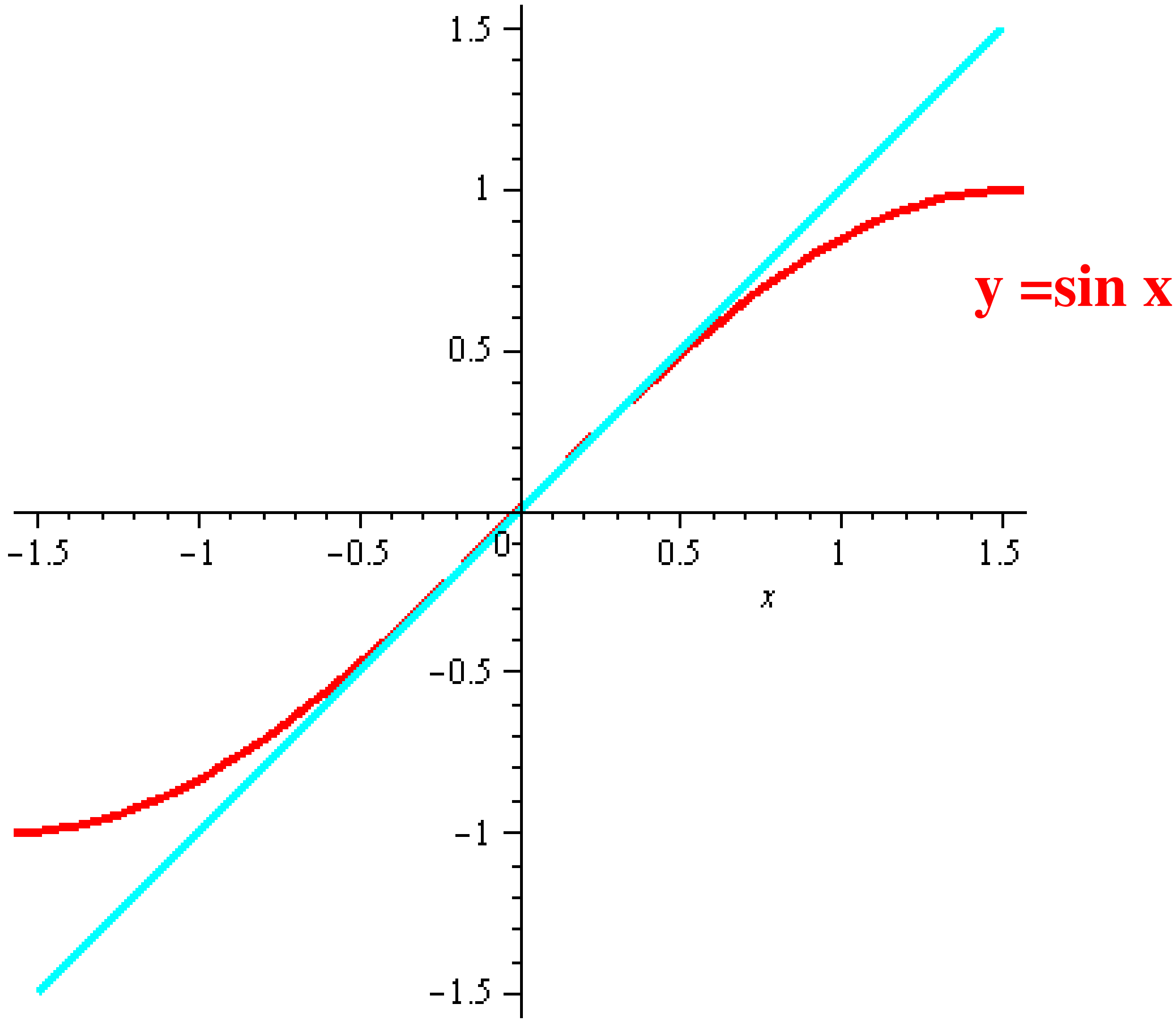
tồn tại hàm ngược

$$\boxed{y = \sin^{-1} x = \arcsin x : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

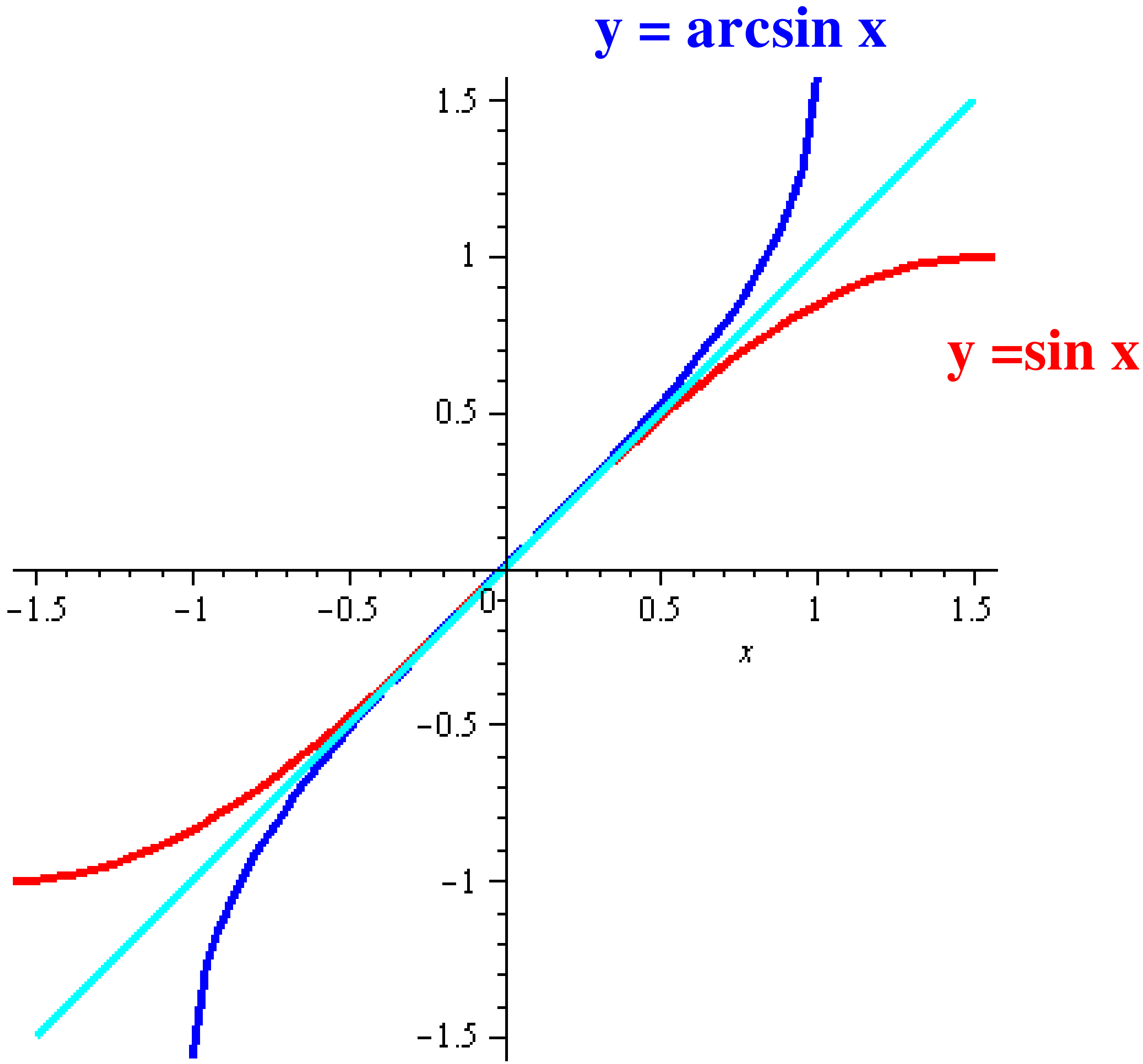
Miền xác định

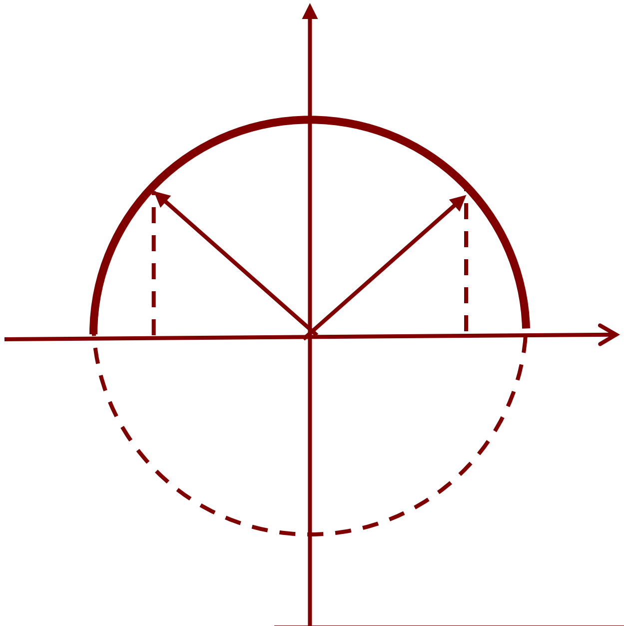
Miền giá trị

$$\boxed{y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x = \arcsin y}$$



y =sin x
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
x


y = arcsin x
y =sin x
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
0
x



$y = \cos x$ **là song ánh trên** $[0, \pi]$

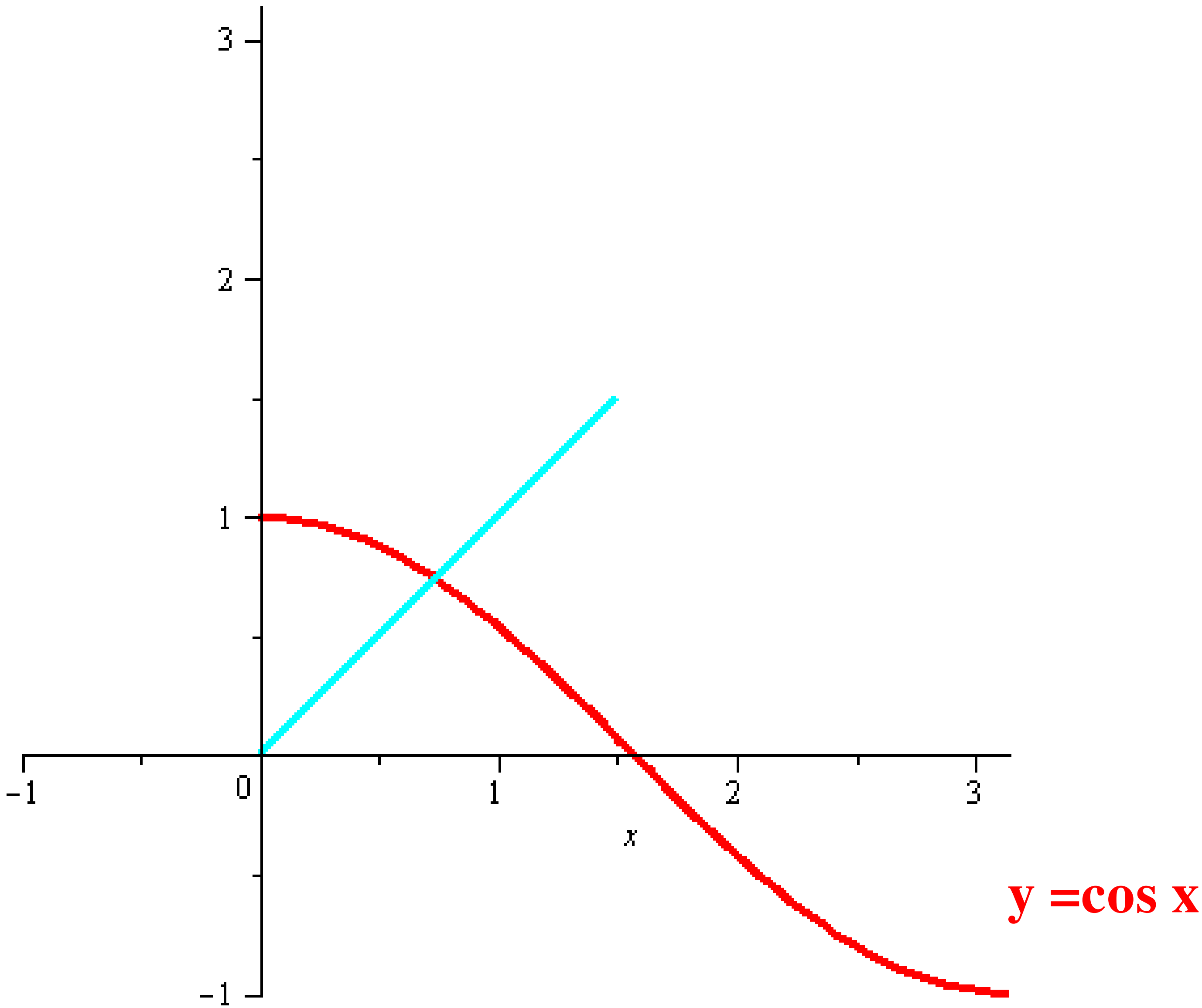
$$\cos : [0, \pi] \xrightarrow{\text{s/a}} [-1, 1]$$

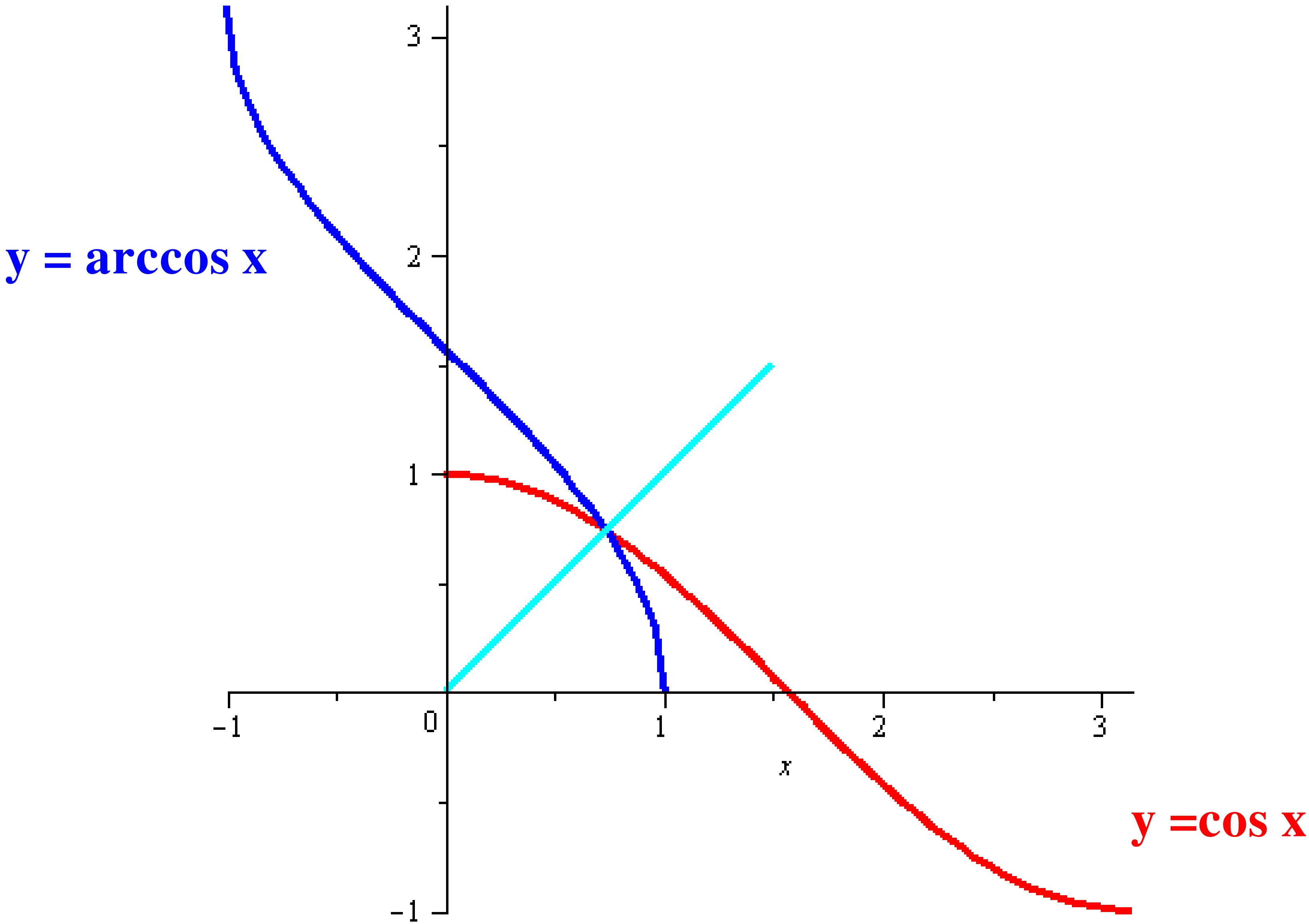
tồn tại hàm ngược

$$\boxed{y = \cos^{-1} x = \arccos x : [-1,1] \longrightarrow [0, \pi]}$$

Miền xác định (for $[-1,1]$) — **Miền giá trị** (for $[0,\pi]$)

$$\boxed{y = \cos x, x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \arccos y}$$


3
2
1
-1
0
1
2
3
-1
x
y =cos x



y = arccos x
y =cos x
3
2
1
0
-1
-1
1
2
3
x

VÍ DỤ

$$\sin 0 = 0 \Leftrightarrow \arcsin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1 \Leftrightarrow \arccos 1 = 0,$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \Leftrightarrow \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \cos \pi = -1 \Leftrightarrow \arcsin(-1) = \pi$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$y = \tan x : \text{song ánh} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \arctan x : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \cot x : \text{song ánh} : \; 0, \pi \; \to R$$

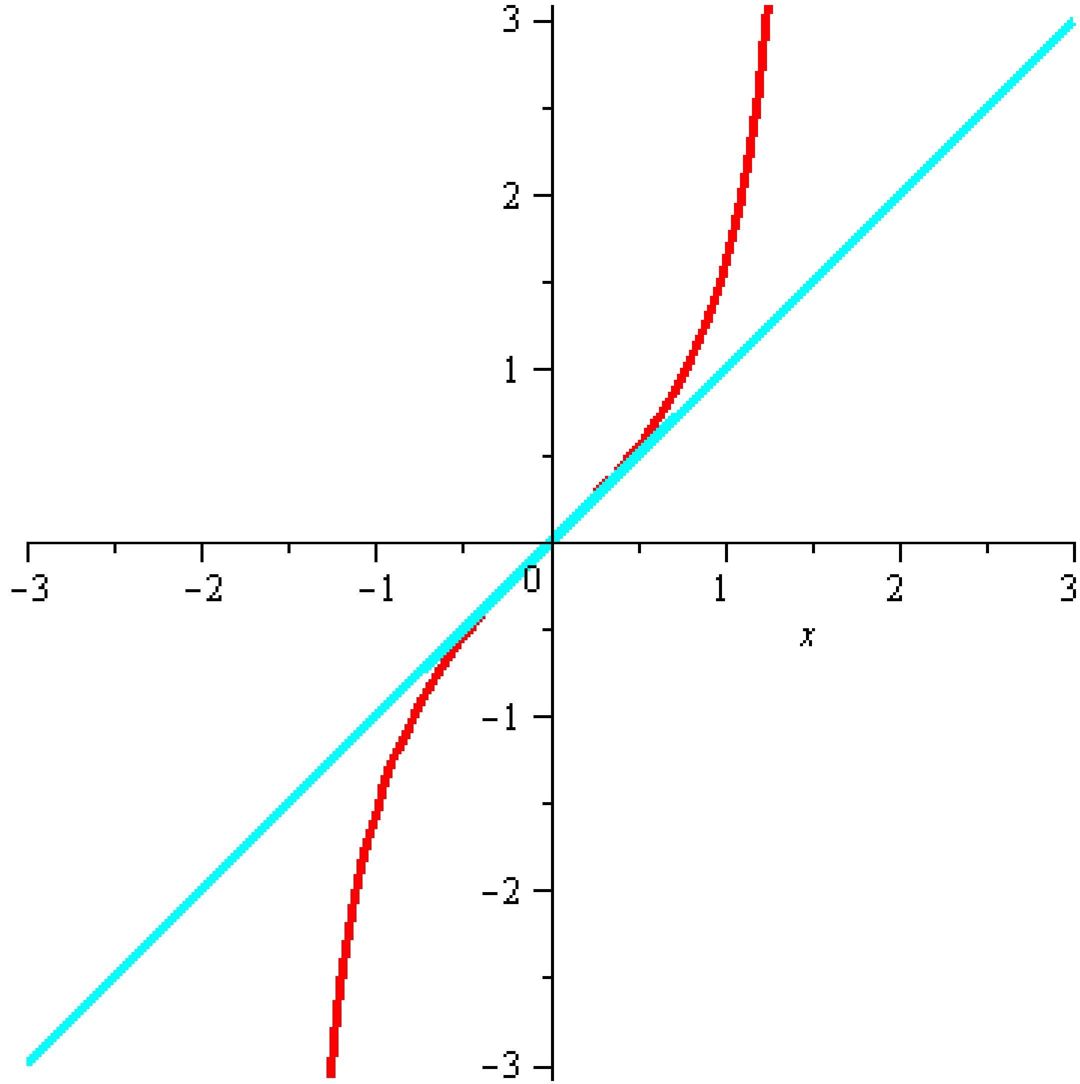
$$\Leftrightarrow \quad y = \operatorname{arccot} x : R \to \; 0, \pi$$

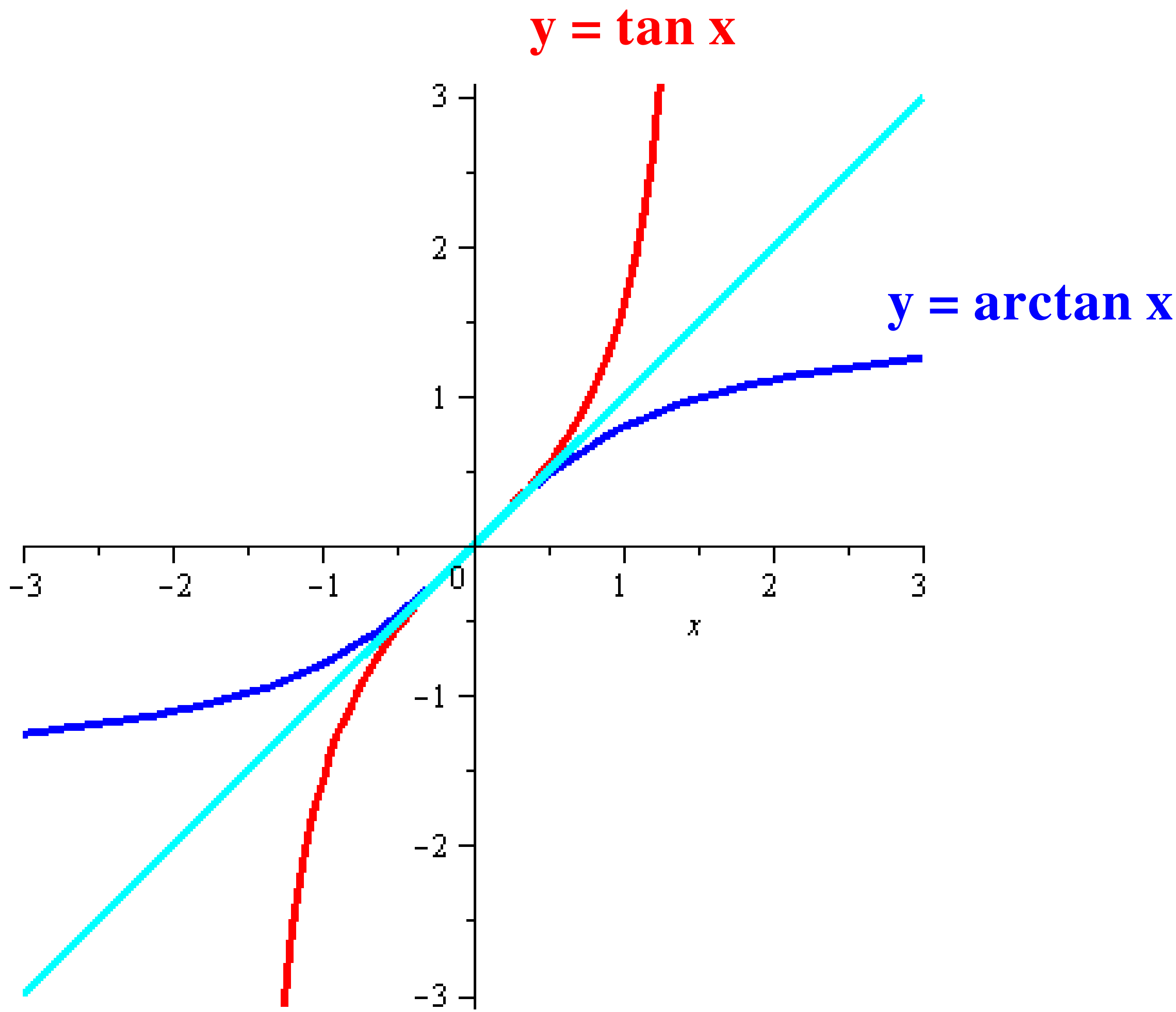
Tính chất:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

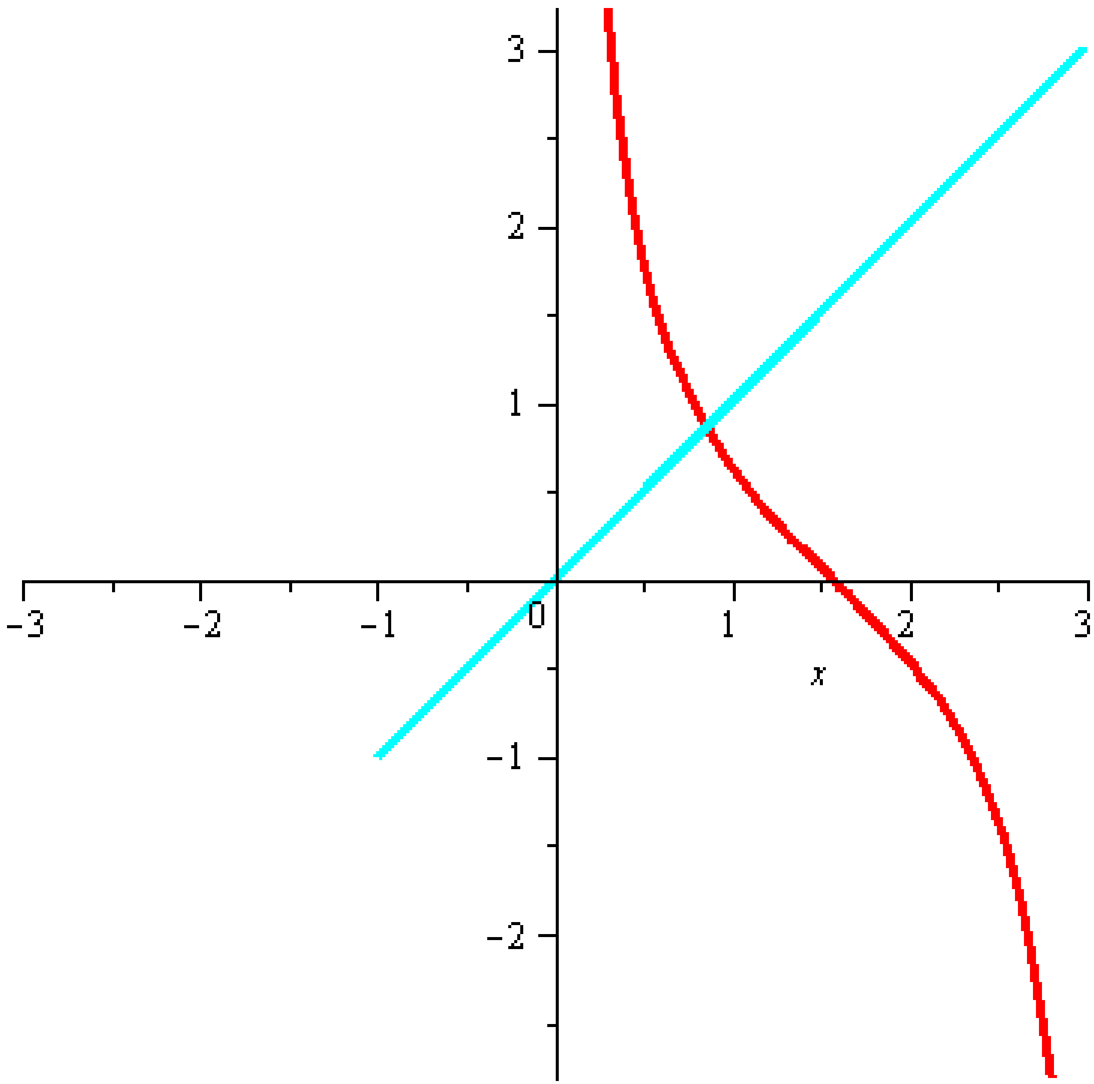
$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

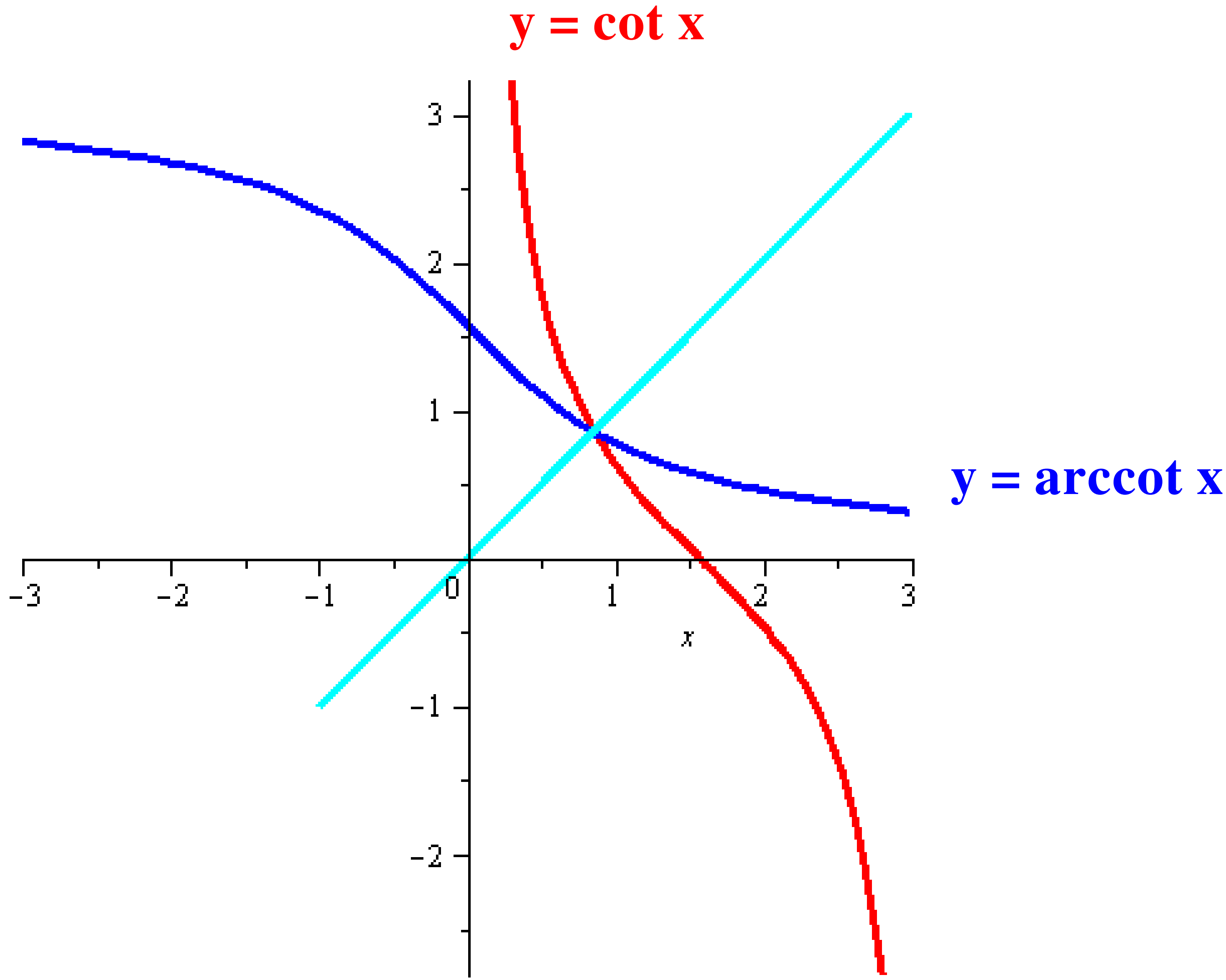
y = tan x




y = tan x
y = arctan x
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
x

$y = \cot x$





y = cot x
y = arccot x
3
2
1
−1
−2
−3
0
x

HÀM HYPERBOLIC (Toán 1, ĐCK, trang 23 – 24)

$$\sinh x = \mathrm{sh}\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \mathrm{ch}\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

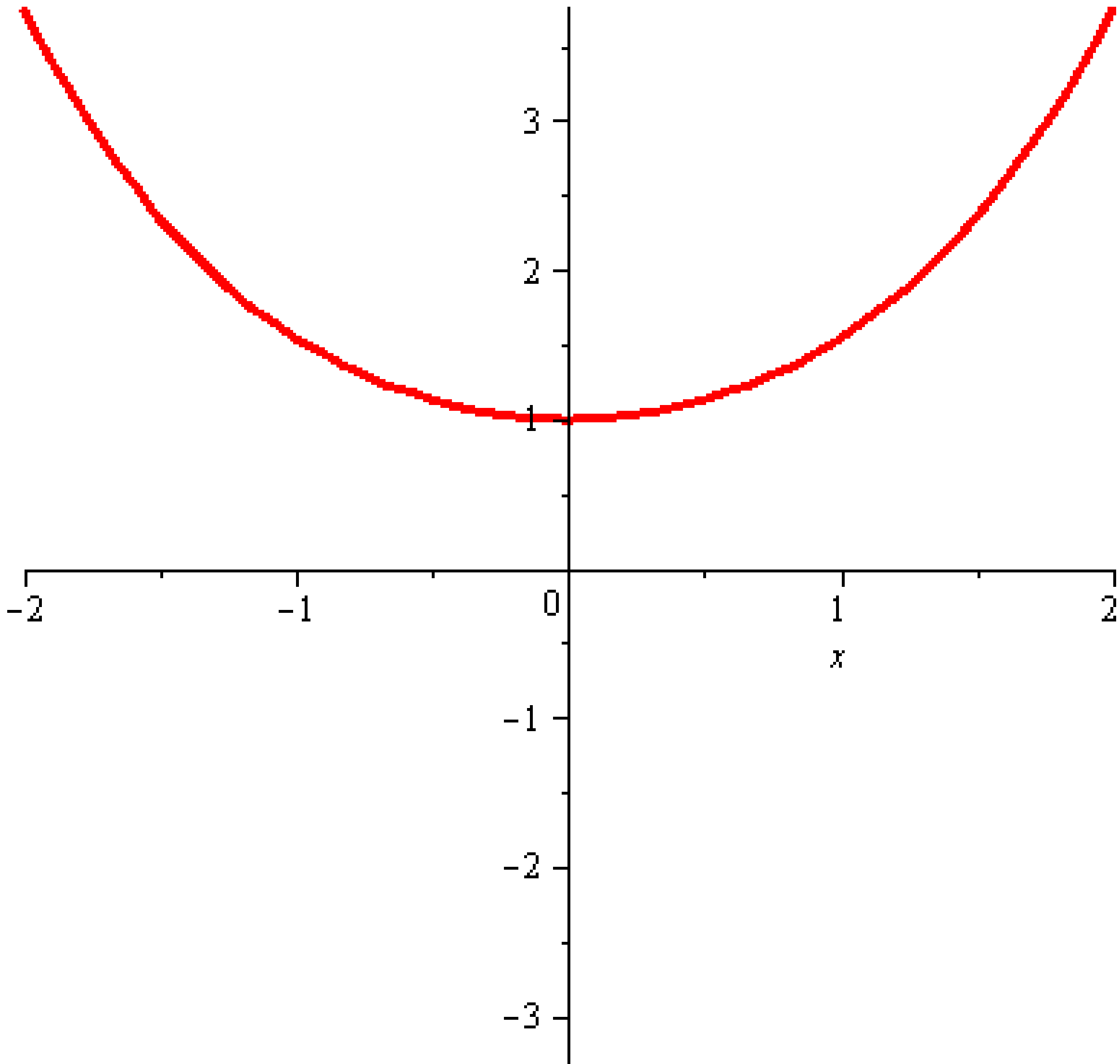
$$\tanh x = \mathrm{th}\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \mathrm{cth}\, x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Miền xác định của các hàm số trên?

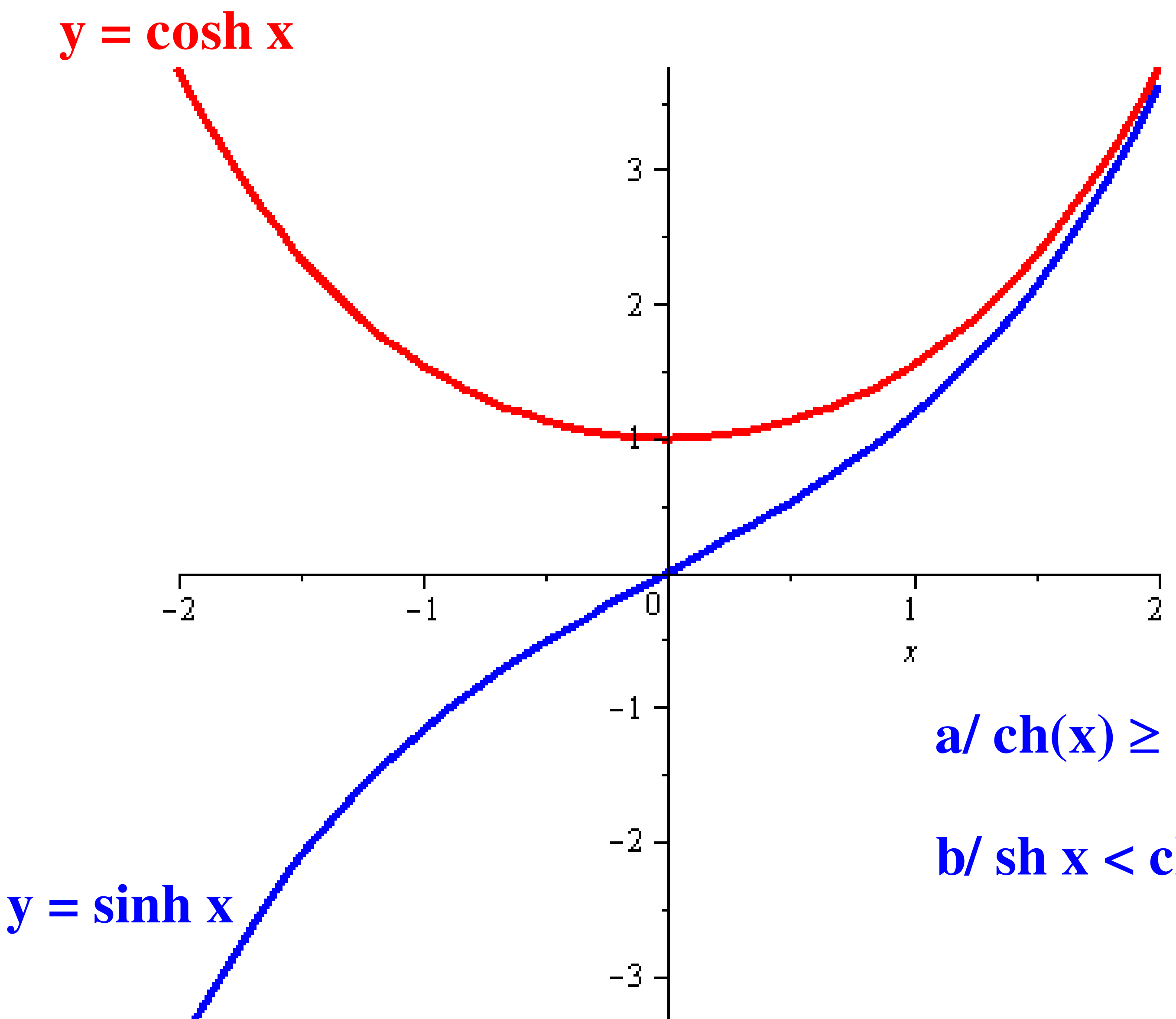
Tính chẵn lẻ?

ĐỒ THỊ HÀM Sinh x và Cosh x

y = cosh x



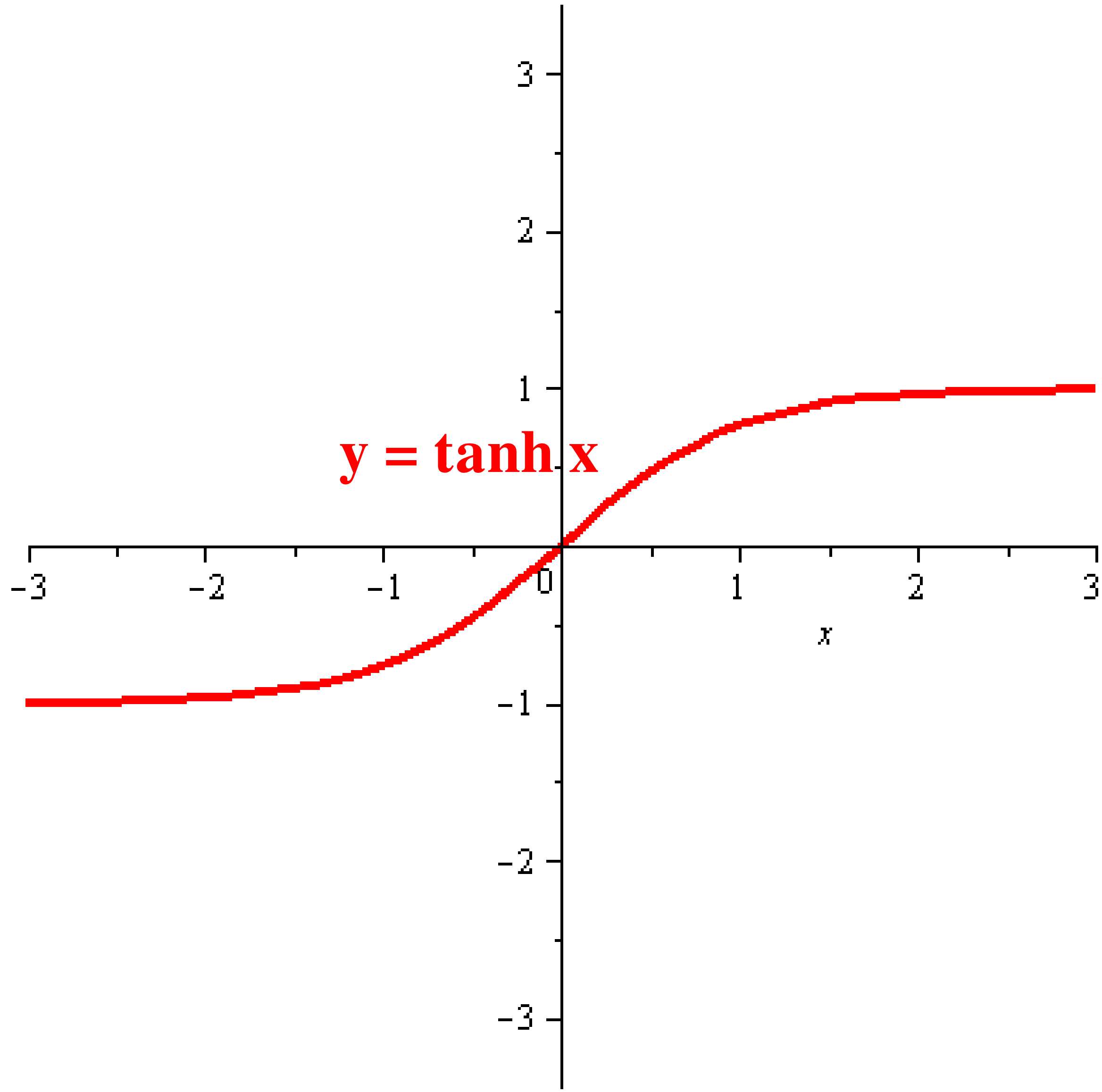
ĐỒ THỊ HÀM Sinh x và Cosh x



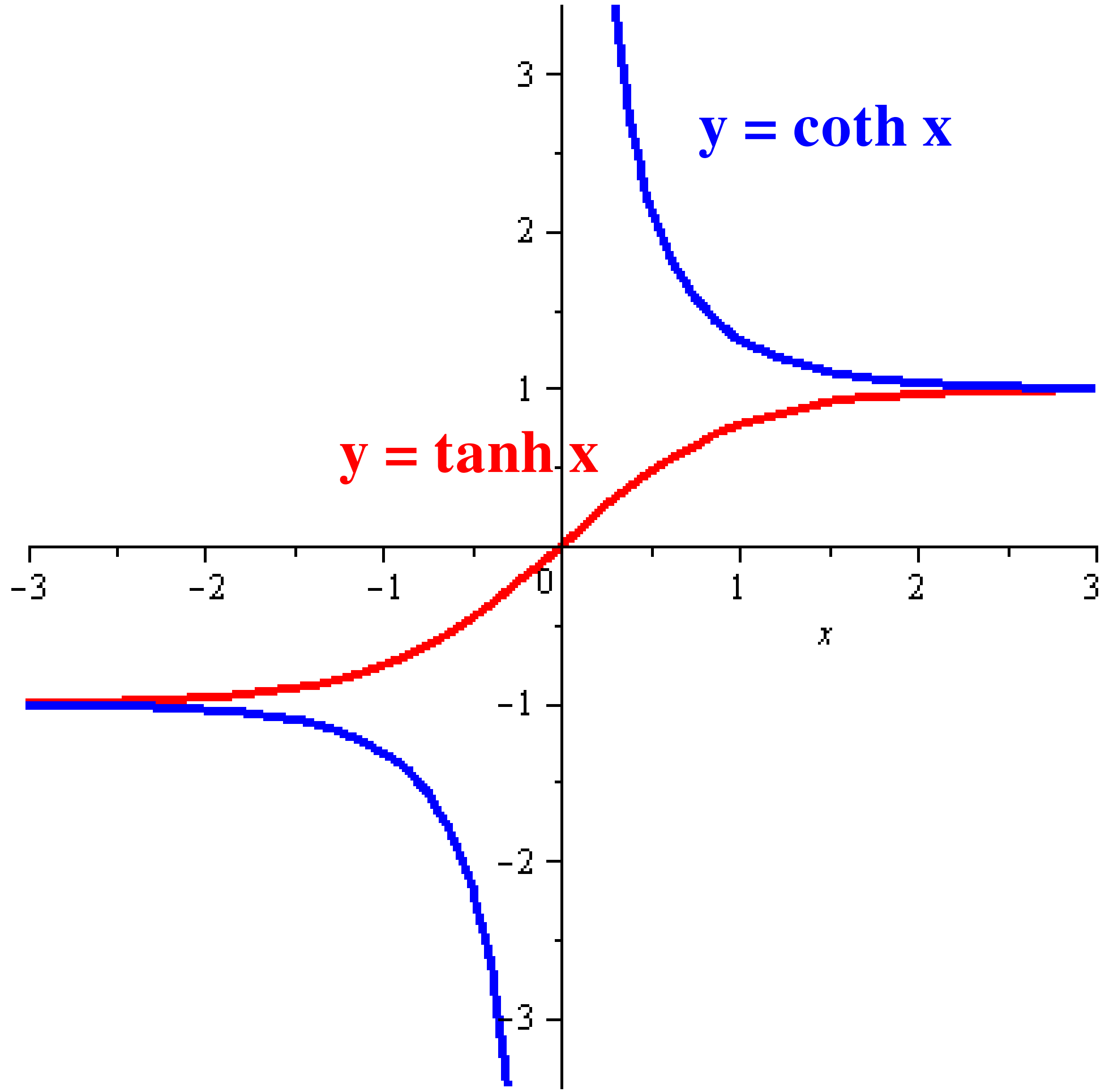
a/ ch(x) ≥ 1 ∀ x

b/ sh x < chx ∀ x

ĐỒ THỊ HÀM tanh x và coth x



ĐỒ THỊ HÀM tanh x và coth x



Ví dụ: **1/ Giải phương trình: sinh(x) = 1**

$$\Leftrightarrow e^{x} - e^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

2/ Chứng minh $ch^2x - sh^2x = 1, \forall x$ (So sánh: $\cos^2x + \sin^2x = 1$)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

BẢNG CÔNG THỨC HÀM HYPERBOLIC

Công thức lượng giác	Công thức Hyperbolic
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$	$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y \pm \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, x$
$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$	$\mathrm{ch}(2x) = 2\,\mathrm{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 x$
$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$	$\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\mathrm{ch}\, x + \mathrm{ch}\, y = 2\,\mathrm{ch}\frac{x+y}{2}\mathrm{ch}\frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$	$\mathrm{ch}\, x - \mathrm{ch}\, y = 2\,\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\mathrm{sh}\frac{x-y}{2}$

$$\sin \times \sin \to -\sinh \times \sinh$$