

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN.

ĐẠO HÀM TẠI 1 ĐIỂM

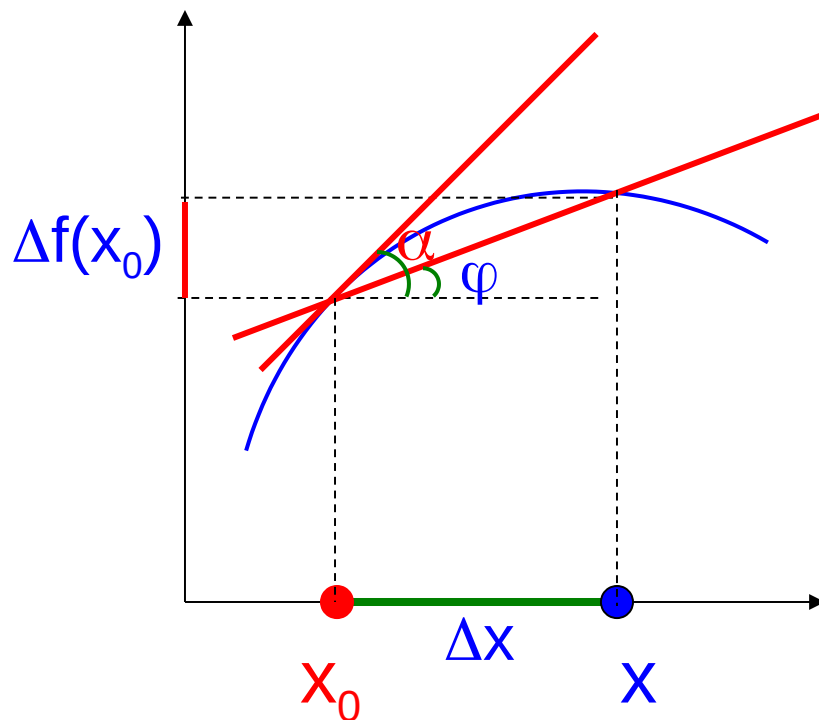
Cho $y = f(x)$ xác định trong $(a, b) \ni x_0$, xét tỷ số

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nếu tỷ số trên có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow x_0$ hay $\Delta x \rightarrow 0$ thì f có đạo hàm tại x_0 .

Đặt

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$



$$\tan \varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

↓ $x \rightarrow x_0$

$$\tan \alpha = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ là hệ số góc tiếp tuyến của đường cong

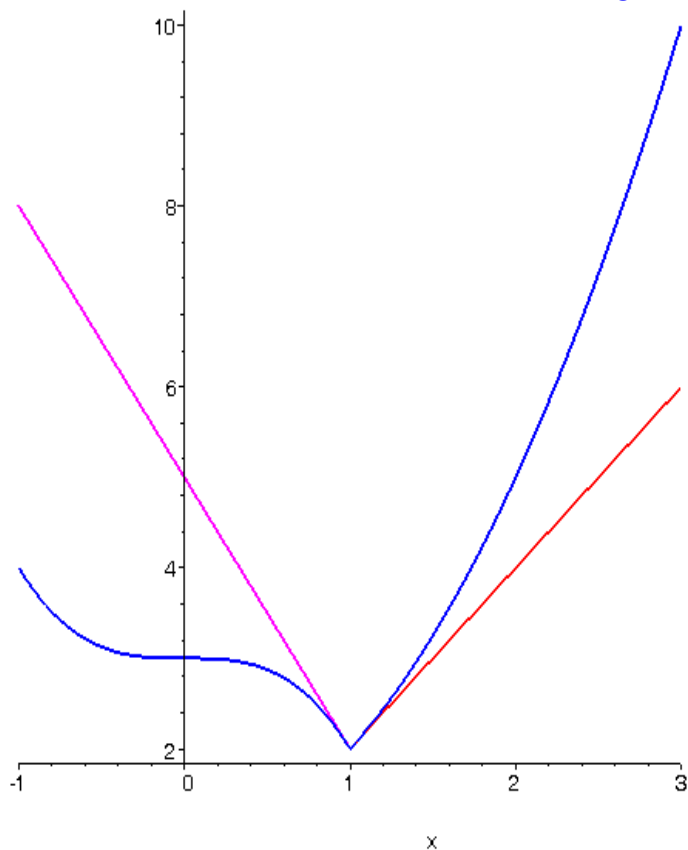
(C): $y = f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0, f(x_0))$

Đạo hàm trái tại x_0 :

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ (\Delta x \rightarrow 0^-)}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Đạo hàm phải tại x_0 :

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ (\Delta x \rightarrow 0^+)}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$



f có đạo hàm tại x_0

$$\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Cách tính đạo hàm

1. Nếu f xác định bởi 1 biểu thức sơ cấp: dùng công thức đạo hàm sơ cấp và các quy tắc(tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp).
2. Nếu tại x_0 , biểu thức f' không xác định: tính bằng định nghĩa.
3. Nếu hàm số có phân chia biểu thức tại x_0 : tính bằng định nghĩa.
4. Nếu $f(x) = u(x)^{v(x)}$ hoặc $f(x)$ là tích thương của nhiều hàm: tính $(\ln f)'$

Ví dụ: tính đạo hàm tại các điểm được chỉ ra

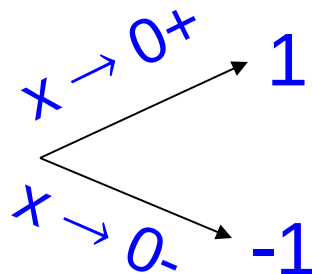
$$1 / f(x) = 2^{x \ln x} \quad \text{tại } x = 1$$

$$f'(x) = 2^{x \ln x} \ln 2 (x \ln x)' = 2^{x \ln x} \ln 2 (\ln x + 1)$$

$$f'(1) = \ln 2$$

$$2 / f(x) = |x| \quad \text{tại } x = 0 \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x}$$



$\Rightarrow f'(0)$ không tồn tại

$$4 / f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = x \sin \frac{1}{x} \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0)$$

$$5 / f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1) = 2$$

Đạo hàm và liên tục

f có đạo hàm tại x_0 thì f liên tục tại x_0 .

VD: tìm các hằng số a, b để f có đạo hàm tại x_0

(Nên xét tính liên tục tại x_0 trước)

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + b \cos x + 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Tìm a, b để f có đạo hàm tại $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + b \cos x + 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

f liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow b + 1 = 1 \Leftrightarrow b = 0$

Với $b = 0$: $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a \sin x + 1 - 1}{x - 0} = a$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1 - 1}{x - 0} = 2$$

f có đạo hàm tại $x = 0 \Leftrightarrow a = 2, b = 0$

Đạo hàm hàm ngược

Cho $y = f(x): (a, b) \rightarrow (c, d)$ liên tục và tăng ngặt.

Khi đó tồn tại hàm ngược $f^{-1}: (c, d) \rightarrow (a, b)$ liên tục và tăng ngặt.

Nếu tồn tại $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$ thì tại $y_0 = f(x_0)$, f^{-1} có đạo hàm và

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ta thường viết:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

Đạo hàm các hàm lượng giác ngược

$$1. y = \arcsin x, x \in (-1, 1) \quad \Leftrightarrow x = \sin y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2. y = \arctan x, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow x = \tan y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Bảng công thức đạo hàm các hàm mới

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\operatorname{coth} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

Đạo hàm hàm ẩn

Hàm số $y = f(x)$ xác định bởi phương trình

$$F(x, y) = 0 \quad (*)$$

gọi là hàm ẩn xác định bởi $(*)$

Cách tìm $y'(x)$: lấy đạo hàm pt $(*)$ theo x , giải tìm y' theo x và y .

Ví dụ

1. Tìm $y'(x)$ với y xác định từ pt :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (*)$$

Lấy đạo hàm pt (*) theo x

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

So sánh với kết quả lấy đạo hàm từ các biểu thức

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$y' = \pm \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ví dụ

2. Tìm $y'(0)$ với $y = y(x)$ xác định bởi

$$1 + y + x.2^y = 0 \quad (*)$$

Lấy đạo hàm pt (*) theo x

$$0 + y' + 2^y + x.2^y \ln 2.y' = 0 \quad (**)$$

Từ (*), với $x = 0 \Rightarrow y = -1$

Thay vào (**): $y'(0) + 2^{-1} + 0 = 0$

$$\Rightarrow y'(0) = -\frac{1}{2}$$

3. Tìm đạo hàm tại $x = 1$ của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi pt:

$$(x - 1)e^{x+y} + xy = 0 \quad (*)$$

Lấy đạo hàm (*) theo x

$$e^{x+y} + (x - 1)(1 + y')e^{x+y} + y + xy' = 0 \quad (**)$$

Từ (*), $x = 1 \Rightarrow y = 0$, thay vào (**)

$$e^1 + 0 + 0 + 1.y'(1) = 0 \quad \Rightarrow y'(1) = -e$$

Đạo hàm hàm cho theo tham số

Cho các hàm số : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Nếu : * $x = x(t)$ có hàm ngược $t = t(x)$

* $x(t)$ và $y(t)$ có đạo hàm, $x'(t) \neq 0$

$$y'(x) = y'(t).t'(x)$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Ví dụ

Cho : $\begin{cases} x(t) = t.e^t - 1 \\ y(t) = t^2 + t \end{cases}$ Tính $y'(x)$ tại $x = -1$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t + 1}{e^t + t.e^t}$$

$$x = -1 \quad \Leftrightarrow t.e^t - 1 = -1 \quad \Leftrightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow y'(-1) = 1$$

ĐẠO HÀM CẤP CAO

Cho $f(x)$ có đạo hàm cấp 1 trong lân cận x_0 , nếu f' có đạo hàm tại x_0 , đặt

$$f''(x_0) = (f'(x))' \Big|_{x=x_0}$$

Có thể viết: $f''(x) = (f'(x))'$

Tổng quát: đạo hàm cấp n là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n - 1)$

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$$

Ví dụ

1. Tìm đạo hàm cấp 2 của f tại $x = 1$: $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} \right)^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{\frac{1+x^2}{x^2}} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{1+x^2} \right)' = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = \frac{1}{2}$$

2. Tìm đạo hàm cấp n của $f(x) = \cosh(2x)$

2. Tìm đạo hàm cấp 2 tại $x = 1$ của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi pt: $y^3 + x^2y - x + 1 = 0$ (1)

Lấy đạo hàm (1) theo x

$$3y^2 \cdot y' + 2xy + x^2 y' - 1 = 0 \quad (2)$$

Lấy đạo hàm (2) theo x

$$6y \cdot (y')^2 + 3y^2 y'' + 2(y + xy') + 2xy' + x^2 y'' = 0 \quad (3)$$

$$x = 1 \xrightarrow{(1)} y(1) = 0 \xrightarrow{(2)} y'(1) = 1$$

Thay $x = 1, y = 0, y' = 1$ vào (3)

$$0 + 0 + 2(0 + 1) + 2 + y''(1) = 0 \Rightarrow y''(1) = -4$$

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
a^x	$a^x (\ln a)^n$
e^x	e^x
$(ax + b)^\alpha$	$a^n \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) (ax + b)^{\alpha - n}$
$\frac{1}{ax + b}$	$(-1)^n n! \frac{a^n}{(ax + b)^{n+1}}$
$\ln(ax + b)$	$(-1)^{n-1} (n-1)! \frac{a^n}{(ax + b)^n}$
$\sin(ax + b)$	$a^n \sin\left(ax + b + n \frac{\pi}{2}\right)$
$\cos(ax + b)$	$a^n \cos\left(ax + b + n \frac{\pi}{2}\right)$

Công thức đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp cao của tổng hiệu:

$$(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$$

Đạo hàm cấp cao của tích:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

(công thức Leibnitz)

Ví dụ

1. Tính đạo hàm cấp 7 tại $x = 1$.

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 2} = \frac{5}{3x + 1} + \frac{1}{3x - 2}$$

$$f^{(7)}(x) = \frac{5}{3} \frac{(-1)^7}{(x+1)^8} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^7}{(x-2)^8}$$

$$f^{(7)}(1) = \frac{5}{3} \frac{(-1)^7}{(1+1)^8} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^7}{(1-2)^8} = -\frac{1}{3} \left(\frac{5}{2^8} + 1 \right)$$

2. Tính đạo hàm cấp 7 tại $x = 1$: $f(x) = (x^2 - x).e^{2x}$

$$\begin{aligned}f^{(7)}(x) &= \sum_{k=0}^7 C_7^k (x^2 - x)^{(k)} (e^{2x})^{(7-k)} \\&= C_7^0 (x^2 - x)^{(0)} (e^{2x})^{(7)} + C_7^1 (x^2 - x)^{(1)} (e^{2x})^{(7-1)} \\&\quad + \dots + C_7^7 (x^2 - x)^{(7)} (e^{2x})^{(7-7)} \\&= 1.(x^2 - x).2^7 e^{2x} + 7.(2x - 1).2^6 e^{2x} \\&\quad + \frac{7.6}{2} .2 .2^5 .e^{2x} + 0 \\f^{(7)}(1) &= 28.2^6 .e^2\end{aligned}$$

Đạo hàm cấp cao của hàm tham số

Cho các hàm số : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y''(x) = (y'(x))'_x = \frac{(y'(x))'_t}{x'(t)} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)'_t}{x'(t)}$$

$$y''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}$$

$$y^{(n)}(x) = \frac{(y^{(n-1)}(x))'_t}{x'(t)}$$

Ví dụ

Cho $y(t) = t^2 + 1$, $x(t) = t^3 - t + 2$, tính $y''(t)$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t}{3t^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{(y'(x))'_t}{x'(t)} = \frac{\left(\frac{2t}{3t^2 - 1} \right)'_t}{3t^2 - 1} = \frac{2(3t^2 - 1) - 6t \cdot 2t}{(3t^2 - 1)^3} \\ &= \frac{-2 - 6t}{(3t^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

Cách 2:

$$y''(x) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3} = \frac{2 \cdot (3t^2 - 1) - 6t \cdot 2t}{(3t^2 - 1)^3} = \frac{-2 - 6t}{(3t^2 - 1)^3}$$

SỰ KHẢ VI VÀ VI PHÂN

f khả vi tại x_0 nếu tồn tại một hằng số A sao cho

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = A.(x - x_0) + o(x - x_0)$$

hay $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A.\Delta x + o(\Delta x)$

Khi đó đại lượng: $dy = df(x_0) = A.\Delta x$

gọi là vi phân của f tại x_0

Ví dụ

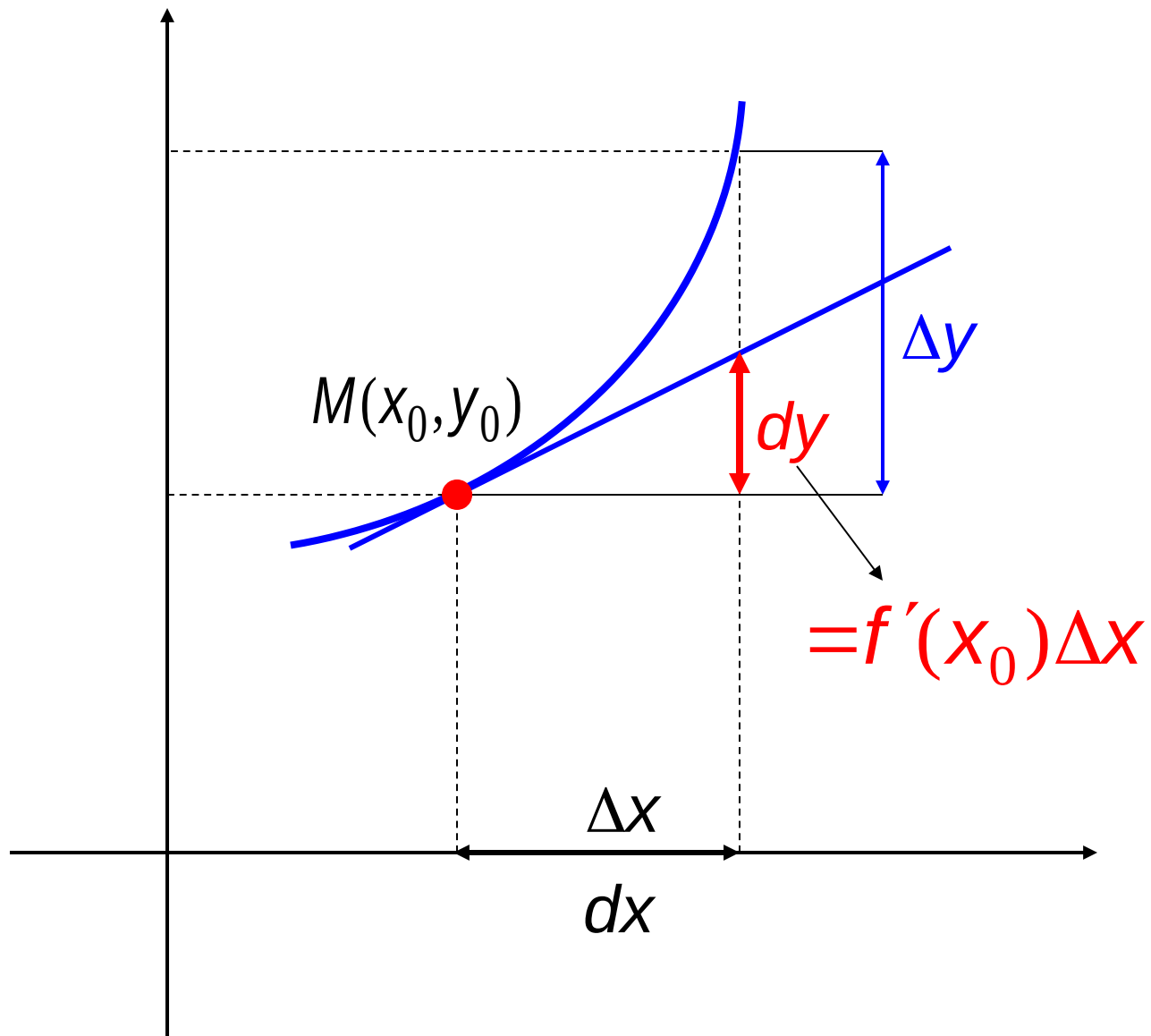
Cho $f(x) = x^2$, chứng minh f khả vi và tìm $df(1)$

$$f(x) - f(1) = x^2 - 1$$

$$= (x - 1)(x + 1)$$

$$= (x - 1)(x - 1 + 2)$$

$$= \underbrace{2(x - 1)}_{df(1)} + \underbrace{(x - 1)^2}_{o(x - 1)}$$



Đạo hàm và vi phân

f khả vi tại $x_0 \Leftrightarrow f$ có đạo hàm tại x_0

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Cách viết thông thường:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

Cách viết khác của đạo hàm:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

Ví dụ

1. Cho $f(x) = 3x^2 - x$, tìm số gia Δf và vi phân df tại $x = 1$
với $\Delta x = 0.01$

$$\begin{aligned}\Delta f(1) &= f(1 + \Delta x) - f(1) = 3(1 + \Delta x)^2 - (1 + \Delta x) - (3 \cdot 1^2 - 1) \\ &= 5\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 5 \times 0.01 + 3(0.01)^2 = 0.0503\end{aligned}$$

$$df(1) = f'(1).dx = f'(1).\Delta x$$

$$f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(1) = 5$$

$$df(1) = (6 \cdot 1 - 1) \times 0.01 = 0.0500$$

2. Tìm vi phân của $f(x) = xe^x$ tại $x = 0$

$$df(0) = f'(0).dx$$

$$f'(x) = (x + 1)e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow df(0) = 1.dx = dx$$

3. Tìm vi phân của $f(x) = x \sin x$

$$df(x) = f'(x).dx = (\sin x + x \cos x) dx$$

Các phép tính vi phân

$$d(c.f) = cdf, c = \text{const}$$

$$d(f \pm g) = df \pm dg$$

$$d(f.g) = gdf + fdg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

Vi phân hàm hợp

Nếu $y = f(x)$ khả vi theo x (biến độc lập): $dy = f'(x)dx$

Nếu $x = x(t)$, $y = f(x)$ khả vi, $x = x(t)$ khả vi

$\Rightarrow y = f(x(t))$ khả vi theo t (biến độc lập):

$$y'(t) = [f(x(t))]' = f'(x).x'(t)$$

$$dy = y'(t)dt = f'(x).x'(t)dt = f'(x)dx$$

Dù x là biến độc lập hay hàm số, dạng vi phân của y theo x không đổi.

Ví dụ áp dụng

Cho $y = f(x) = \sin(x^2)$,

1. Tính dy theo dx

2. Với $x = x(t) = \arctan(t)$, tính dy theo dt tại $t = 1$

$$1. \quad dy = y'(x)dx = 2x \cos(x^2)dx$$

$$2. \quad y = \sin(x^2) = \sin(\arctan^2 t)$$

$$\begin{aligned} dy = y'(t)dt &= (\arctan^2 t)' \cos(\arctan^2 t) dt \\ &= 2 \arctan t \frac{1}{1+t^2} \cos(\arctan^2 t) dt \end{aligned}$$

Cách khác: dùng vi phân hàm hợp

$$dy = y'(x)dx = 2x \cos(x^2)dx \quad (dx = x'(t)dt)$$

$$= 2x \cos(x^2) \cdot (\arctan t)' dt$$

$$= 2x \cos(x^2) \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

Tại $t = 1$, $x = \pi/4$

$$\Rightarrow dy = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi^2}{16}\right) dt$$

VI PHÂN CẤP CAO

1. Nếu x là biến độc lập: $dx = \Delta x$: là hằng số

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y''dx)dx = y''dx^2$$

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \longrightarrow y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

2. Nếu x = x(t): $dx = x'dt$: là hàm số

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y').dx + y'd(dx)$$

$$d^2y = y''dx^2 + y'd^2x$$

Ví dụ

Cho $y = \sin(x)$

1. Tính d^2y theo dx .

2. Nếu $x = \cosh(t)$, tính d^2y theo dt .

$$1. d^2y = y''(x)dx^2 = -\sin x dx^2$$

$$2. y = \sin(\cosh t)$$

$$d^2y = y''(t)dt^2$$

$$= \left[\cosh t \cos(\cosh t) - \sinh^2 t \sin(\cosh t) \right] dt^2$$

Cách 2: $d^2y = y''(x)dx^2 + y'(x)d^2x$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \cos x, \quad y''(x) = -\sin x \\ dx = \sinh t dt \Rightarrow dx^2 = \sinh^2 t dt^2 \\ d^2x = \cosh(t) dt^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d^2y &= -\sin x \cdot \sinh^2 t dt^2 + \cos x \cdot \cosh t dt^2 \\ &= (-\sin x \cdot \sinh^2 t + \cos x \cdot \cosh t) dt^2 \end{aligned}$$

Tổng kết.

1. Tính đạo hàm cho 3 loại hàm số ($y = f(x)$, hàm ẩn, tham số).
2. Nếu x là biến độc lập: tính vi phân là tính đạo hàm
3. Nếu $x = x(t)$ (là hàm số):
 1. Vi phân cấp 1 : $dy = y'(x)dx$, sau đó khai triển dx theo dt
 2. Vi phân cấp 2: $d^2y = y''dx^2 + y'd^2x$
cuối cùng phải đưa về dt^2 (chỉ tính đến cấp 2)