GiỚI HẠN HÀM SỐ

http://e-learning.hcmut.edu.vn/

Khái niệm giới hạn hàm số

Hàm số y = f(x) xác định trong lân cận x_0(có thể không xác định tại x_0). Nếu giá trị của f(x) rất gần với a khi x đủ gần x_0 thì a gọi là giới hạn của f tại x_0.

Xem 2 VD số sau đây:

$$1/f(x) = \frac{\sin x}{x},$$ khi $x \approx 0$

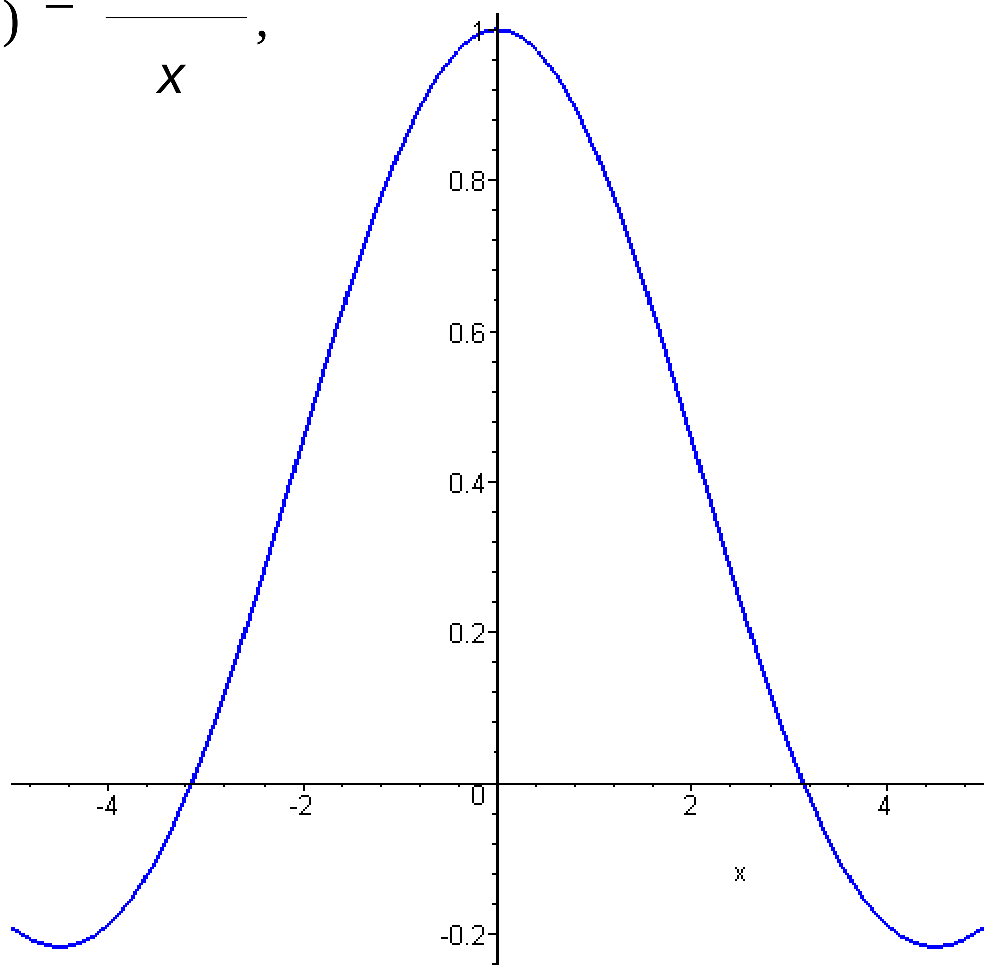
$$\begin{array}{cc} x & f(x) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 0.1000 & 0.8415 \\ 0.01000 & 0.9588 \\ 0.001000 & 0.9816 \\ 0.0001000 & 0.9896 \\ 0.00001000 & 0.9935 \end{bmatrix}} \end{array}$$

f(x) không xác định tại 0,

nhưng khi $x \approx 0$ thì $f(x) \approx 1$

Đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$,

không bị đứt tại x ≈ 0



Lúc này coi như f(0) ≈ 1

(giới hạn của f tại x = 0 là 1)

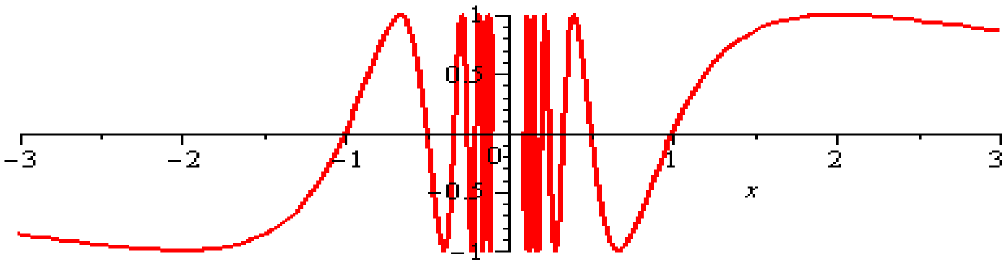
$$2/\ f(x) = \sin\frac{\pi}{x},$$ khi x ≈ 0

f(x) không xác định tại 0,

nhưng khi x ≈ 0 thì f(x) ≈ 0

SAI vì

$$\begin{array}{cc} x & f(x) \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0.0001 & 0 \\ 0.000001 & 0 \end{bmatrix}$$



$$x = \frac{2}{4k+1} \Rightarrow \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$$ $\Rightarrow$ f(x) = 1

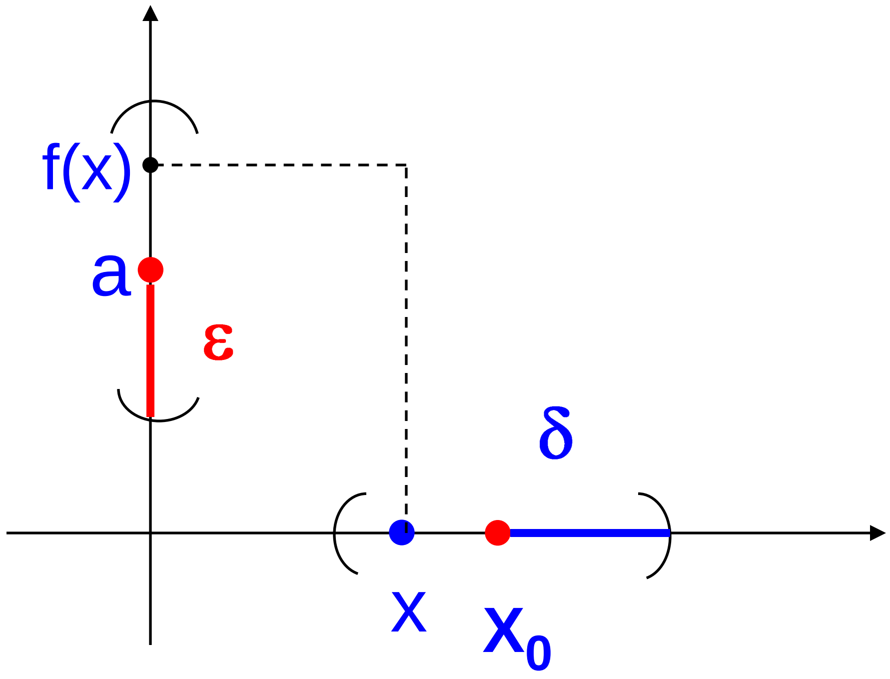
Có vô số giá trị x gần 0 mà f(x) = 0, hoặc f(x)=1

ĐỊNH NGHĨA GiỚI HẠN HÀM SỐ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{(hữu hạn)}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$x \in D \ \& \ x \neq x_0$$



Hạn chế của đn:

Phải chia nhiều trường hợp tùy thuộc vào giá trị của x_o và a là vô hạn hay hữu hạn

ĐỊNH NGHĨA GiỚI HẠN HÀM SỐ QUA DÃY

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \; x_n \subset D \;\&\; x_n \neq x_0,$$

nếu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$

Tiện ích của đn:

1. Áp dụng chung cho cả trường hợp a hay x_o là ∞.
2. Các tính chất và phép toán của giới hạn dãy vẫn còn đúng cho giới hạn hàm số.
3. Dễ dàng trong việc chứng minh hàm số không có giới hạn.

Giới hạn cho hàm mũ

Xét hàm số có dạng: $f(x) = u(x)^{v(x)}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a > 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a^b$$

Chứng minh:

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{v(x) \times \ln u(x)} = e^{b \times \ln a} = a^b$$

Phép biến đổi thường dùng

Phương pháp chứng minh hàm không có giới hạn

Chọn 2 dãy $\{x_n\}$ và $\{x'_n\}$ sao cho:
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \end{cases}$$

Ví dụ: 1. Chứng minh $f(x) = \dfrac{1}{x}$ không có gh khi $x \to 0$

Chọn $x_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $f(x_n) = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

$x'_n = -\dfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $f(x'_n) = -n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

2. Chứng minh: $f(x) = \sin x$ Không có gh khi $x \to +\infty$

$(x_o = +\infty)$

$$\text{Chọn } \begin{cases} x_n = n\pi \xrightarrow{n \to \infty} +\infty \\ x_n' = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow{n \to \infty} +\infty \end{cases}$$

$$f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$f(x_n') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

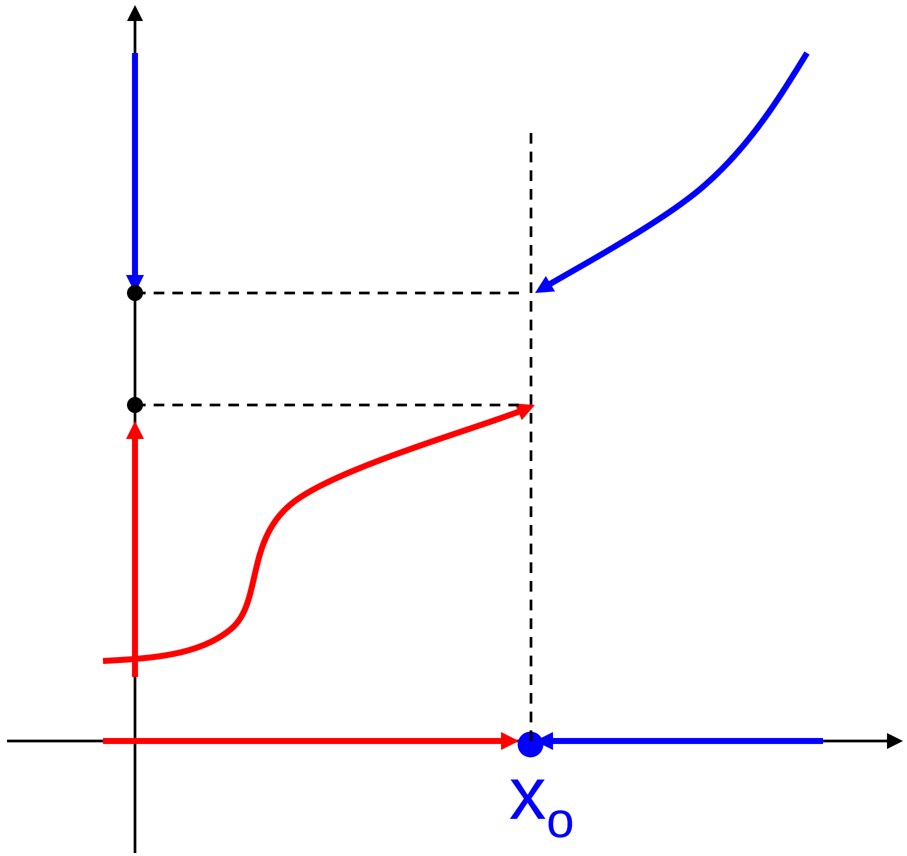
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(x_n')$$

GiỚI HẠN MỘT PHÍA

- Giới hạn trái tại x_o:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\ x_n \subset D \ \&\ x_n < x_0,$$

nếu $\lim x_n = x_0$ thì $\lim f(x_n) = a$



- Giới hạn phải tại x_o:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$$

(Xét $x_n > x_o$ và $x_n \to x_o$)

GiỚI HẠN MỘT PHÍA

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

VD:

$$1/f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \ge 1, \\ 2x - 1, & x < 1, \end{cases}$$

Xét gh của f(x) tại $x_o = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1 - \lim_{x \to 1^-} (2x - 1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$2/f(x)=\dfrac{1}{x},$ Xét gh của f(x) tại $x_o = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

$\Rightarrow$ f(x) không có gh khi $x \to 0$.

$$3/\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

GiỚI HẠN CƠ BẢN

1/ Các hàm log, mũ, lũy thừa: xem lại bài HÀM SỐ

$$2/\ \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$3/\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

$$4/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$$ vì với phép đặt : $e^x - 1 = u$, ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}} = 1$$

GiỚI HẠN CƠ BẢN

$$5/\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\times \ln a=\ln a$$

$$6/\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\alpha\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha$$

BẢNG TÓM TẮT CÁC GH HÀM SƠ CẤP

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0 \; (\alpha < 0) \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty \; (\alpha > 0)$$

$$\begin{cases} a > 1: \lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = +\infty \;\&\; \lim\limits_{x\to-\infty} a^{x} = 0; \\ 0 < a < 1: \lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = 0 \;\&\; \lim\limits_{x\to-\infty} a^{x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^{+}} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

BẢNG TÓM TẮT GH CƠ BẢN

1/ $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2/ $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3/ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$

4/ $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

5/ $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

6/ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

7/ $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$

8/ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^p x}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \forall a > 1$

LƯU Ý KHI TÍNH GiỚI HẠN

1. Nhớ kiểm tra dạng vô định trước khi lấy giới hạn.
2. Tùy theo dạng vô định, chọn gh cơ bản thích hợp.
3. Nếu dạng VĐ là $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, chuyển về 0/0 hoặc ∞/∞
4. Nếu là dạng VĐ mũ, biến đổi theo các cách sau:
   a. lấy lim của lnf(x)
   b. $[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$
   c. Dạng 1^{∞}, dùng gh $(1+x)^{1/x} \to e$

$$1/\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$2/\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$3/\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$4/\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$5/\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

$$6/\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$7/\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1,$$

$$8/\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^p x}{x^\alpha}=0,\quad \forall\alpha>0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\quad \forall a>1$$

VÍ DỤ

$$1/\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 2x}$$

Dạng 0/0

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos 5x}{(5x)^2}}{\dfrac{1-\cos 2x}{(2x)^2}}\times\frac{(5x)^2}{(2x)^2}$$

$$=\frac{1/2}{1/2}\times\frac{25}{4}=\frac{25}{4}$$

$$1/\ \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$2/\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$3/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1,$$

$$4/\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$$

$$5/\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

$$6/\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\frac{1}{2}$$

$$7/\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1,$$

$$8/\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^{p} x}{x^{\alpha}}=0,\quad \forall\alpha>0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0,\quad \forall a>1$$

$$2/\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=A$$ Dạng 0/0

Đặt: $u=x-x_0=x-\frac{\pi}{2}$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}{-2u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{2u}=\frac{1}{2}$$

$$1/\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$2/\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$3/\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$4/\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$5/\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

$$6/\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$7/\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1,$$

$$8/\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^p x}{x^\alpha}=0,\quad \forall\alpha>0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\quad \forall a>1$$

$$3/\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$$

Dạng 0/0

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}$$

$$=1\times 1=1$$

$$1/\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2/\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$$

$$4/\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

$$5/\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$$

$$6/\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$7/\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1,$$

$$8/\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^p x}{x^\alpha} = 0,\quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = 0,\quad \forall a > 1$$

$$4/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-3^x}{x}$$

Dạng 0/0

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-(3^x-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{3^x-1}{x}\right] = 2-\ln 3$$

Có thể biến đổi như sau:

$$\frac{e^{2x}-3^x}{x} = 3^x\,\frac{\left(e^2/3\right)^x-1}{x}$$

$$\xrightarrow{x\to 0} 1\times\ln\left(\frac{e^2}{3}\right)$$

$$1/\ \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2/\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3/\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$4/\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$5/\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$6/\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$7/\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$

$$8/\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^p x}{x^\alpha} = 0,\quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0,\quad \forall a > 1$$

$$5/\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$ Dạng 0/0

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2}\frac{\tan x}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{\sin x}{x} \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right] = 0$$ SAI

$1/\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$2/\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$3/\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$

$4/\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$5/\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$

$6/\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$7/\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$

$8/\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^p x}{x^{\alpha}} = 0, \quad \forall \alpha > 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{a^x} = 0, \quad \forall a > 1$

$5/\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ Dạng 0/0

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2} = 1 \times \frac{1}{2}$

$$1/\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$2/\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$3/\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1,$$

$$4/\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$$

$$5/\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

$$6/\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\frac{1}{2}$$

$$7/\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1,$$

$$8/\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^{p} x}{x^{\alpha}}=0,\quad \forall\alpha>0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0,\quad \forall a>1$$

$$6/\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x+3}$$

(Dạng 1^{∞})

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\underbrace{\frac{4}{2x-1}}_{\to\ 0}\right)^{4x+3}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4}{2x-1}(4x+3)}$$

$$=e^{16/2}=e^{8}$$

$$1/\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$2/\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$3/\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

$$4/\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$5/\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

$$6/\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$7/\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1,$$

$$8/\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^p x}{x^\alpha}=0,\quad \forall \alpha>0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\quad \forall a>1$$

$$7/\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=A$$ Dạng 0/0

Đặt: $u=x-x_0=x-1$

$$A=\lim_{u\to 0}\frac{\sqrt[5]{(u+1)^2}-1}{\sqrt[3]{u+1}-1}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(u+1)^{2/5}-1}{(u+1)^{1/3}-1}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(u+1)^{2/5}-1}{u}\times\frac{u}{(u+1)^{1/3}-1}$$

$$1/\ \lim_{x\to 0} 1+x^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2/\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3/\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1,$$

$$4/\ \lim_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$$

$$5/\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$$

$$6/\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^{2}} = \frac{1}{2}$$

$$7/\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$

$$8/\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^{p} x}{x^{\alpha}} = 0,\quad \forall \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{a^{x}} = 0,\quad \forall a > 1$$

$$10/\ \lim_{x\to 0} x^{100} e^{\frac{1}{x^{2}}}$$

Dạng $0\times\infty$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^{2}}}}{\left(\frac{1}{x^{2}}\right)^{50}}$$

$$= \lim_{u\to +\infty} \frac{e^{u}}{u^{50}} = +\infty$$

$11/\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ Không có dạng vô định.

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x},$$ với mọi x > 0

$$\underset{0}{\left\downarrow -\frac{1}{x}\right.} \qquad \underset{0}{\left\downarrow \frac{1}{x}\right.} \qquad x\to+\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$